ЖЭТФ, 2023, том 164, вып. 1 (7), стр. 129–142

НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРО-ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

Е.С. Пикина [a,b]**,** ***А.Р. Муратов*** [b]**,** ***Е.И. Кац*** [a]**,** ***В.В. Лебедев*** [a,c]

[a] *Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау Российской академии наук*
142432, Черноголовка, Московская область, Россия

[b] *Институт проблем нефти и газа Российской академии наук*
119917, Москва, Россия

[c] *Высшая школа экономики*
101000, Москва, Россия

Поступила в редакцию 16 апреля 2023 г.,
после переработки 16 апреля 2023 г.
Принята к публикации 26 апреля 2023 г.

Представлена полная система нелинейных динамических уравнений для нематических и смектических A жидких кристаллов, находящихся под действием переменного электрического поля. Локальное электрическое поле, действующее в жидком кристалле, складывается из внешнего поля, поля, возникающего в результате деформации параметра порядка жидкого кристалла, и поля, создаваемого заряженными примесями. Система стремится уменьшить полное электрическое поле, поскольку это уменьшает плотность энергии. Подчеркнем, что данная проблема не является чисто академической. Прецизионность современных исследований жидких кристаллов настолько высока, что даже малые отклонения от линейного поведения системы могут быть обнаружены и измерены с высокой точностью. Мы работаем в рамках приближения макроскопической динамики (гидродинамики), что позволяет рассматривать процессы, происходящие в конденсированных средах на достаточно больших пространственных и временных масштабах. Хорошо известно, что нелинейные гидродинамические уравнения успешно применяются для описания течений простых жидкостей. Проблема включения мягких (голдстоуновских) степеней свободы параметра порядка в систему гидродинамических уравнений также была успешна решена для жидкокристаллических мезофаз, характеризующихся спонтанным нарушением ориентационной или трансляционной симметрии. Однако очевидно, что для изучения свойств сильно возмущенных жидкокристаллических систем, находящихся выше порога различных электро-гидродинамических неустойчивостей, полная система нелинейных уравнений гидродинамики должна учитывать и мягкие электромагнитные степени свободы. Примерами таких неустойчивостей являются классическая неустойчивость Цветкова–Карра–Хельфриха, обусловленная конкуренцией электрического и вязкого вращающих моментов сил, флексоэлектрическая неустойчивость и т.д. Все это говорит о необходимости построения для жидких кристаллов, находящихся под действием переменного электрического поля, полной точной системы электрогидродинамических уравнений, которая бы регулярно учитывала все нелинейные эффекты. Эту, вне всякого сомнения, амбициозную и масштабную задачу мы и решаем в данной работе, что открывает новые возможности развития и применения физики нелинейных эффектов, нелинейных сред, что является сейчас одним из передовых направлений исследований.

DOI: 10.31857/S004445102307012X
EDN:GGBNQV

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные явления в конденсированных средах и, в частности, в жидких кристаллах, являются сейчас одной из самых горячих тем как в физике, так и в связанных областях науки. Действительно, жидкие кристаллы — это «мягкие», т. е. легко возбуждаемые и легко деформируемые системы, и именно поэтому они оказываются одними из наиболее привлекательных объектов для изучения нелинейных эффектов. Совершенствование экспериментальных методов и повышение их точности привело к получению ряда новых интересных результатов, все еще ожидающих теоретического осмысления. В этой связи стоит отметить три недавние публикации [1–3], а также инициированные ими работы других групп, где аналогичные явления наблюдались для разных жидких кристаллов и при различных экспериментальных условиях [4–9]. В этих работах авторы наблюдали возникновение и распространение уединенного ограниченного в трех пространственных измерениях долгоживущего солитон-подобного возмущения переориентации нематического молекулярного директора в относительно тонком слое (3–30 мкм) однородно упорядоченного нематического жидкого кристалла, обладающего отрицательной анизотропией тензоров диэлектрической проницаемости и электропроводности и заключенного в электрооптическую ячейку, помещенную в сильное переменное электрическое поле. Для таких возбуждений, проявляющих солитоноподобные свойства, нелинейность системы должна играть существенную роль, компенсируя расплывание возбуждений (см., например, [10, 11] для гамильтоновых систем и [12–14] для диссипативных неравновесных систем).

В настоящей работе мы рассматриваем одноосные жидкие кристаллы, а именно, нематики (N) и смектики A (SmA), которые являются идеальными системами с точки зрения изучения нелинейных явлений. Нематические жидкие кристаллы [15] представляют собой анизотропные жидкости с дальним ориентационным порядком, определяемым единичным вектором (директором $\mathbf{n}$). В смектике A одноосная ориентационная анизотропия дополняется нарушенной в одном измерении трансляционной симметрией. Отправной точкой для теоретического исследования динамических явлений в жидких кристаллах является вывод полной системы нелинейных динамических уравнений. Полный набор динамических уравнений для любой системы должен включать все гидродинамические переменные, связанные с общими законами сохранения и нарушениями непрерывной симметрии. При достаточно низкой проводимости системы σ, что обычно имеет место для жидких кристаллов, нужно также учитывать мягкие (медленные для малых σ) электромагнитные степени свободы. Мы не нашли в литературе последовательного вывода общих нелинейных электрогидродинамических уравнений для жидкокристаллических мезофаз. Отметим, однако, две важные работы [16, 17], в первой из которых электромагнитные степени свободы были включены в описание динамики магнетиков, а во второй использованы для задач квантовой гравитации.

Цель данной работы — получить полную систему точных нелинейных динамических уравнений для нематической и смектической A мезофаз, что является обязательным шагом для изучения в них любых нелинейных эффектов, которые обсуждаются, начиная примерно с работ 50-летней давности [18] и до совсем недавнего времени [19].

Для вывода уравнений мы используем метод скобок Пуассона [20–22], позволяющий получать точные бездиссипативные (реактивные) нелинейные уравнения динамики для мягких (гидродинамических) переменных, которые автоматически удовлетворяют всем законам сохранения: массы, энергии, импульса. В рамках предложенного подхода флексоэлектрический эффект учитывается путем введения вектора флексополяризации, что позволяет принять во внимание взаимодействие электрического поля и жидкого кристалла, а упругость мезофаз учитывается путем введения в плотность энергии соответствующей упругой энергии. Далее, основываясь на общих термодинамических соотношениях, обеспечивающих рост энтропии, к реактивным уравнениям добавляются диссипативные члены, дополнительно учитывающие вязкость, теплопроводность и электропроводность системы. Полученный набор уравнений представляет не только интеллектуальный интерес. Он необходим для корректного изучения любых нелинейных динамических явлений в жидких кристаллах. В настоящей работе мы ограничимся только нематическими и смектическими A жидкими кристаллами, чтобы избежать громоздких выражений с большим количеством феноменологических параметров. Благодаря высокой симметрии указанных фаз (с осью вращения бесконечного порядка) уравнения могут быть представлены в относительно компактной форме. При необходимости могут быть построены уравнения и для менее симметричных типов жидких кристаллов (например, для двуосных нематиков или наклонных смектиков C).

В результате мы впервые представляем общие уравнения гидродинамики для нематиков или смектиков A во внешнем электромагнитном поле. Подчеркнем, что нелинейные динамические уравнения нематиков и смектиков A известны (см., например, [20, 21, 23]). Линейная теория низкочастотной электрогидродинамической неустойчивости также была разработана довольно давно [24]. Однако последовательная полная нелинейная гидродинамическая теория жидких кристаллов как с реактивными, так и с диссипативными (необратимыми) членами, включающая мягкие степени свободы электромагнитного поля, до сих пор отсутствовала. Этот пробел в теории существовал и требовал разрешения, несмотря на наличие некоторых относящихся к проблеме работ [25–30]. Дело в том, что в этих публикациях использовался подход, когда сначала выписываются все разрешенные симметрией члены рассматриваемого порядка по отклонениям переменных величин от равновесного значения в отсутствии внешнего поля, после чего, учитывая законы сохранения основных физических величин, производится отбор релевантных членов. Эта процедура громоздка даже для получения уравнений первого порядка (линейного приближения), а при учете нелинейностей второго порядка указанный подход требует полного повтора процедуры вывода уравнений, и так с каждым следующим порядком.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 мы иллюстрируем наш подход, выводя известные уравнения электромагнитного поля в сплошной изотропной среде. В разд. 3 выводятся нелинейные уравнения нематиков в присутствии переменного электромагнитного поля. В разд. 4 мы выводим нелинейные уравнения для смектиков A в присутствии переменного электромагнитного поля. В разд. 5 содержится заключение. В Приложении 5 мы выводим выражения для скобок Пуассона векторных полей. В Приложении 5 обсуждается роль конечной скорости среды в электромагнитных эффектах.

2. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Основной целью данной работы является получение полной системы точных нелинейных динамических уравнений нематиков и смектиков A во внешнем переменном электромагнитном поле. Для наглядной демонстрации нашего подхода приведем сначала вывод известных уравнений электромагнитного поля в изотропной сплошной среде. Будем использовать приближение слабого проводника, в рамках которого поляризуемость среды может конкурировать с проводимостью на интересующих нас частотах. Указанное приближение позволяет исследовать роль как поляризуемости среды, так и ее проводимости. Поляризуемость может быть учтена в рамках термодинамического подхода, тогда как проводимость является кинетическим явлением.

Электромагнитное поле в сплошной среде определяется уравнениями Максвелла

$$\partial_t \mathbf{D} = \mathbf{c}\,\nabla\times\mathbf{H}, \qquad (1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = -\mathbf{c}\,\nabla\times\mathbf{E}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{B}$ — поле магнитной индукции, $\mathbf{D}$ — поле смещения, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, а c — скорость света. Электрическое поле $\mathbf{E}$ и поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ выражаются через векторный потенциал электромагнитного поля. Уравнения (1), (2) должны быть дополнены условиями для дивергенций $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$. Мы предполагаем

$$\nabla\mathbf{D} = 0\,, \quad \nabla\mathbf{B} = 0\,. \qquad (3)$$

Соотношение $\nabla\mathbf{B} = 0$ является точным и справедливо для любого электромагнитного поля, а соотношение $\nabla\mathbf{D} = 0$ подразумевает электронейтральность среды, т. е. предполагает, что плотность свободного заряда в жидком кристалле равна нулю. Оба условия (3) совместны с уравнениями Максвелла (1), (2).

Чтобы замкнуть систему уравнений (1), (2), следует связать $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ с $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Это действие требует некоторой аккуратности. Прежде всего, рассмотрим идеальный диэлектрик, где диссипативными эффектами (например, протеканием электрического тока) можно пренебречь. Такие диэлектрики можно описывать в рамках термодинамики. Термодинамическое тождество для внутренней энергии U диэлектрика записывается как [31]

$$dU = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_0 d\mathbf{B} + \ldots . \qquad (4)$$

Здесь $\mathbf{D}_0$ — поле смещения, а $\mathbf{H}_0$ — магнитное поле, взятое с учетом только электрической и магнитной поляризуемости среды. Точки в уравнении (4) обозначают дополнительные слагаемые, связанные с другими термодинамическими величинами, такими как плотность массы ρ. В квадратичном приближении соотношение (4) приводит к

$$\mathbf{D}_0 = \epsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}_0, \qquad (5)$$

где ϵ — коэффициент диэлектрической проницаемости, а μ — коэффициент магнитной проницаемости.

Динамическое уравнение для идеального диэлектрика может быть найдено с помощью скобок Пуассона. В этих терминах в классической механике динамическое уравнение для переменной ϕ записывается как [32]

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \{\mathcal{H}, \phi\}, \qquad (6)$$

где $\mathcal{H}$ обозначает гамильтониан (энергию системы), а $\{...\}$ обозначает скобки Пуассона. В отличие от классической механики, переменные, описывающие сплошную среду, являются полями, зависящими от времени и пространственных координат. Уравнение для этих полей имеет тот же вид (6). Однако гамильтониан $\mathcal{H}$ среды является интегралом по пространству от плотности энергии U, зависящей от полей:

$$\mathcal{H} = \int dV\, U(\mathbf{D}_0, \mathbf{B}, \dots), \qquad (7)$$

где точки обозначают другие термодинамические переменные. Чтобы вывести динамические уравнения, необходимо знать выражения для скобок Пуассона для полей, см. [20, 21].

Рассмотрим динамические уравнения для электромагнитного поля. Чтобы найти скобки Пуассона для величин $\mathbf{D}_0, \mathbf{B}$, удобно использовать определения $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, выраженнные через векторный потенциал $\mathbf{A}$. Необходимую нам скобку Пуассона для векторов электрического смещения и магнитного поля можно вычислить, используя общие выражения для скобок Пуассона из Приложения 5:

$$\{B_j(\mathbf{r}), D_{0k}(\mathbf{x})\} = 4\pi c\, \epsilon_{jmk} \partial_m \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\,, \qquad (8)$$

(см. Приложение 5). Здесь ϵ_{jmk} — антисимметричный тензор Леви-Чивита, а производная $\partial_m \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})$ означает $\partial\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})/\partial r_m$. Важно отметить, что полученное нами выражение (8) для скобки Пуассона $\{B_j(\mathbf{r}), D_{0k}(\mathbf{x})\}$ совпадает с выражением, приведенным Воловиком в работе [17]. Скобки Пуассона $\mathbf{B}, \mathbf{D}_0$ с другими гидродинамическими переменными равны нулю.

Используя выражение (8), получаем

$$\partial_t \mathbf{B} = \{\mathcal{H}, \mathbf{B}\} = -c\nabla \times \mathbf{E},$$
$$\partial_t \mathbf{D}_0 = \{\mathcal{H}, \mathbf{D}_0\} = c\nabla \times \mathbf{H}_0\,, \qquad (9)$$

где мы использовали выражение (7) и термодинамическое тождество (4). Этот же результат получен в Приложении 5, см. уравнение (84). Уравнение (9) — это уравнение (1), где $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ заменены на $\mathbf{D}_0$, $\mathbf{H}_0$, как и должно быть в идеальном диэлектрике.

Теперь необходимо включить в рассмотрение диссипативные члены. Уравнение (2) является точным и никаких диссипативных членов добавлять к нему не следует. Диссипативный член, пропорциональный $\mathbf{E} = 4\pi\delta\mathcal{H}/\delta\mathbf{D}_0$, следует включить в уравнение для $\mathbf{D}_0$:

$$\partial_t \mathbf{D}_0 = c\nabla \times \mathbf{H} - 4\pi\sigma\mathbf{E}. \qquad (10)$$

Кинетический коэффициент σ является проводимостью, так что последний член в уравнении (10) является током свободных зарядов (со знаком минус). Мы игнорируем разницу между $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}_0$, пренебрегая магнитной диссипацией. Сравнивая уравнения (10) и (1), мы заключаем, что

$$\partial_t \mathbf{D} = \partial_t \mathbf{D}_0 + 4\pi\sigma\mathbf{E}\,. \qquad (11)$$

Это стандартное выражение для поля смещения, включающее поляризационный вклад и ток свободных зарядов.

Далее мы построим обобщение приведенной выше схемы для нематиков и смектиков A. Магнитные эффекты в жидких кристаллах слабы, поэтому мы полагаем коэффициент магнитной проницаемости равным единице, $\mu = 1$, и игнорируем эффекты, связанные с магнитной диссипацией. В этом случае $\mathbf{H} = \mathbf{B}$, что будет подразумеваться ниже. Напротив, электрическая поляризуемость и электропроводность играют значительную роль в жидких кристаллах. Для адекватного описания жидкокристаллических систем необходимо учитывать оба эти явления.

3. ДИНАМИКА НЕМАТИКОВ

Начнем наше рассмотрение с термодинамического описания нематиков. Используя идеальный диэлектрик как первое приближении для нематика, определим плотность энергии U, зависящую от плотности массы ρ, плотности энтропии S, плотности импульса $\mathbf{J}$ и директора $\mathbf{n}$, а также от поля смещения $\mathbf{D}_0$ и поля магнитной индукции $\mathbf{B}$ [31]. Обозначение $\mathbf{D}_0$ подразумевает, что мы учитываем только вклад в поле смещения, связанный с поляризацией жидкого кристалла, как это должно быть в идеальном диэлектрике. Вклад в уравнение для $\mathbf{D}_0$, связанный с проводимостью (т. е. с диссипацией), должен быть введен отдельно, как кинетический член.

Термодинамическое тождество для нематика в присутствии электрического и магнитного полей является прямым обобщением термодинамического тождества для твердого диэлектрика (см., например, [31]) и имеет вид

$$dU = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_0 d\mathbf{B} + TdS + \mu d\rho + \mathbf{v}d\mathbf{J} + \\ + \frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{n} + \frac{\partial U}{\partial(\partial_i \mathbf{n})} d(\partial_i \mathbf{n}). \qquad (12)$$

Здесь, как и выше, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{H}_0$ — магнитное поле, T — температура, $\mathbf{v}$ — скорость среды и μ — химический потенциал. Как и выше для $\mathbf{D}_0$, символ $\mathbf{H}_0$ означает, что мы учитываем только вклады в магнитное поле, связанные с магнитной поляризацией, игнорируя кинетические процессы. Заметим, что в соответствии с Галилеевской инвариантностью $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Давление системы p связано с U с помощью преобразования Лежандра

$$p = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{D}_0\mathbf{E} + \mathbf{B}\mathbf{H}_0) + \rho\mu + ST + \mathbf{J}\mathbf{v} - U. \qquad (13)$$

Из уравнения (13) получается следующее термодинамическое тождество для давления:

$$dp = \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}_0 d\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}d\mathbf{H}_0 + SdT + \rho d\mu + \mathbf{J}d\mathbf{v} + \\ -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{n}}d\mathbf{n} - \frac{\partial U}{\partial(\partial_i \mathbf{n})}d(\partial_i \mathbf{n}) \;, \quad (14)$$

эквивалентное соотношению (12).

3.1. Бездиссипативные уравнения

Как уже было отмечено, бездиссипативные динамические уравнения произвольной системы могут быть построены с помощью скобок Пуассона (см. [20,21]). В рамках этого метода уравнение для любого поля записывается в виде (6), где гамильтониан $\mathcal{H}$ является интегралом по пространству (7) от плотности энергии U, зависящей от полей. Для нематиков гамильтониан представляется в виде

$$\mathcal{H} = \int dV\, U(\mathbf{D}_0, \mathbf{B}, \mathbf{J}, S, \rho, \mathbf{n}, \partial_i \mathbf{n}). \qquad (15)$$

Динамические уравнения для полей $\mathbf{D}_0, \mathbf{B}, \mathbf{J}, S, \rho, \mathbf{n}$ можно записать в виде (6), используя соответствующие выражения для скобок Пуассона.

Найдем полный набор скобок Пуассона, необходимых для изучения нематодинамики в электромагнитном поле (включая динамику самого электромагнитное поле), следуя работам [20–22, 33]. Поскольку макроскопические динамические уравнения являются локальными, скобки Пуассона для любой пары гидродинамических переменных пропорциональны дельта-функции или ее пространственной производной. Скобки Пуассона для гидродинамических переменных $\rho, S, \mathbf{J}$ известны [20, 21], и соответствующие ненулевые скобки Пуассона имеют вид

$$\{J_i(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{x})\} = \rho(\mathbf{r})\partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \qquad (16)$$

$$\{J_i(\mathbf{r}), S(\mathbf{x})\} = S(\mathbf{r})\,\partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \qquad (17)$$

$$\{J_k(\mathbf{r}), J_i(\mathbf{x})\} = J_i(\mathbf{r})\partial_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \\ + \partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\, J_k(\mathbf{x})\,. \qquad (18)$$

Здесь, как и выше, производная вида $\partial_i \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})$ означает $\partial \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})/\partial r_i$.

Что касается директора $\mathbf{n}$, то как было отмечено в [21], в главном порядке по градиентам отличной от нуля оказывается только скобка Пуассона $\{\mathbf{J}(\mathbf{r}), \mathbf{n}(\mathbf{x})\}$

$$\{J_i(\mathbf{r}), n_k(\mathbf{x})\} = -\partial_i n_k \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) \\ -\partial_j \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\delta^{\perp}_{ik}(\mathbf{x}) n_j(\mathbf{x})\,, \qquad (19)$$

где $\delta^{\perp}_{ik} = \delta_{ik} - n_i n_k$. Данное выражение получено для единичного векторного поля в Приложении 5 (см. формулу (74)). Скобка Пуассона (19) совпадает с соответствующей скобкой, найденной Воловиком для системы идеальных стержней, вмороженных в поток жидкости [34]. Поправки к этой модели могут быть введены с помощью кинетических членов (см. разд. 3.2).

Скобка Пуассона для электромагнитного поля определяется уравнением (8). Скобки Пуассона $\mathbf{B}, \mathbf{D}_0$ с другими переменными равны нулю. Это подразумевает, в частности, что мы не включаем электромагнитный вклад в плотность импульса $\mathbf{J}$.

Зная все скобки Пуассона, мы получаем полный набор бездиссипативных нелинейных динамических уравнений для нематика

$$\partial_t \rho = \{\mathcal{H}, \rho\} = -\nabla \mathbf{J}, \quad \partial_t S = \{\mathcal{H}, S\} = -\nabla(S\mathbf{v})\,, \; (20)$$

$$\partial_t n_i = \{\mathcal{H}, n_i\} = -\mathbf{v}\nabla n_i + n_j \delta^{\perp}_{ik}\partial_j v_k\,. \; (21)$$

Напомним, что $\mathbf{v} = \mathbf{J}/\rho$.

Уравнения (20), (21) имеют тот же вид, что и в отсутствие электромагнитного поля. Уравнение для плотности импульса может быть записано как

$$\partial_t J_i = \{\mathcal{H}, J_i\} = -\partial_k(v_k J_i) - \nabla\left(\frac{\partial U}{\partial(\nabla n_j)}\partial_i n_j\right) - \\ -\partial_k(\Xi_j \delta^{\perp}_{ij} n_k) - \partial_i p + \frac{1}{4\pi}\partial_k\left(D_{0k}E_i + B_k H_{0i}\right) - \\ -\frac{1}{4\pi c}\partial_t[\mathbf{D}_0 \times \mathbf{B}]_i\,, \qquad (22)$$

где величина

$$\Xi_i = -\frac{\partial U}{\partial n_i} + \partial_k \frac{\partial U}{\partial(\partial_k n_i)} \qquad (23)$$

с точностью до знака совпадает с вариационной производная энергии по $\mathbf{n}$.

Последний член в уравнении (22), полученный с использованием уравнений (2), (3), (9), является взятой с обратным знаком производной по времени от плотности импульса электромагнитного поля (см. Приложение А). Уравнения (20)–(22) приводят к закону сохранения энергии

$$\partial_t U = -\nabla \mathbf{Q}^{(r)} = -\frac{c}{4\pi}\nabla[\mathbf{E}\times\mathbf{H}] - \\ -\nabla\left[\frac{\partial U}{\partial(\nabla n_i)}(\mathbf{v}\nabla n_i - n_k \delta^{\perp}_{ij}\partial_k v_j)\right] - \\ -\partial_i\left[(\rho\mu + TS + \mathbf{J}\mathbf{v})v_i\right] - \partial_k(\Xi_j n_k \delta^{\perp}_{ij} v_i), \qquad (24)$$

где реактивная плотность потока энергии обозначается через $\mathbf{Q}^{(r)}$.

Мы рассматриваем низкочастотные процессы и нерелятивистские гидродинамические движения. В этом случае индуцированное магнитное поле H мало по параметру v/c. Несмотря на это магнитное поле не может быть исключено из уравнений. Причина заключается в том, что вклад в уравнение (24), связанный с потоком электромагнитной энергии, плотность которого определяется вектором Пойнтинга, имеет вид

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}. \tag{25}$$

Таким образом, хотя магнитное поле имеет малость v/c, в выражении для потока электромагнитной энергии (25) эта малость компенсируется коэффициентом c.

3.2. Кинетические слагаемые

Итак, используя метод скобок Пуассона мы получили бездиссипативные динамические уравнения для нематических жидких кристаллов. Для учета диссипации эти уравнения должны быть дополнены кинетическими членами. Способ построения диссипативных членов основан на том, что они пропорциональны вариационным производным энергии по динамическим переменным (или их производным) с некоторыми коэффициентами (называемыми кинетическими коэффициентами). Кинетические коэффициенты должны удовлетворять симметрии Онсагера и приводить к положительному производству энтропии. Следуя этому подходу для нашего случая (нематические жидкие кристаллы), необходимо добавить кинетические члены к полученным выше динамическим уравнениям (9), (20)–(22).

Представленные ниже кинетические вклады в электрогидродинамические уравнения нематиков имеются в литературе по жидким кристаллам. Для директора $\mathbf{n}$ и гидродинамических степеней свободы они представлены в [15, 21, 25]. Вклады, обусловленные флексоэлектрическим эффектом и конечной проводимостью, но без гидродинамических степеней свободы, были выписаны в [27,28,35], а для линеаризованных электрогидродинамических уравнений в работе [36]. В нашей работе мы учитываем все кинетические термины вместе.

Уравнения, включающие диссипативные члены, могут быть найдены путем добавления упомянутых диссипативных вкладов в уравнения (20), (19) и (9):

$$\partial_t n_i = \{\mathcal{H}, n_i\} + \frac{1}{\gamma}\Xi_i - \frac{1-\lambda}{2}(n_j\delta^{\perp}_{ik} + n_k\delta^{\perp}_{ij})\partial_k v_j\,, \tag{26}$$

$$\partial_t D_{0i} = c\epsilon_{ikn}\partial_k H_n - 4\pi\sigma_{ik}E_k\,, \tag{27}$$

$$\partial_t J_i = \{\mathcal{H}, J_i\} + \partial_k(\eta_{iknm}\partial_n v_m) + \partial_k\left[\frac{1-\lambda}{2}(n_i\delta^{\perp}_{jk} + n_k\delta^{\perp}_{ij})\Xi_j\right], \tag{28}$$

$$\partial_t S = \{\mathcal{H}, S\} + \partial_i\left(\frac{\kappa_{ik}}{T}\partial_k T\right) + \frac{R}{T}\,, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\partial_t U = &-\nabla\mathbf{Q}^{(r)} + \partial_i(\kappa_{ik}\partial_k T) + \\ &+\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial(\nabla n_i)}\frac{\Xi_i}{\gamma}\right) + \partial_i(v_k\eta_{iknm}\partial_n v_m) - \\ &-\nabla\left[\frac{\partial U}{\partial(\nabla n_i)}\frac{1-\lambda}{2}(n_j\delta^{\perp}_{ik} + n_k\delta^{\perp}_{ij})\partial_k v_j\right] + \\ &+\partial_k\left[v_i\frac{1-\lambda}{2}(n_i\delta^{\perp}_{jk} + n_k\delta^{\perp}_{ij})\Xi_j\right],\end{aligned} \tag{30}$$

где

$$R = \frac{\kappa_{ik}}{T}\partial_i T\partial_k T + \frac{1}{\gamma}\Xi^2 + \eta_{iknm}\partial_i v_k\partial_n v_m + \sigma_{ik}E_iE_k\,. \tag{31}$$

Здесь σ_{ik} — тензор электропроводности, κ_{ik} — тензор теплопроводности, η_{iknm} — тензор вязкости, γ — коэффициент вращательной вязкости и λ — некоторый кинетический коэффициент.

Симметрия Онсагера приводит к выводам, что тензоры σ_{ik} и κ_{ik} симметричны, а $\eta_{iknm} = \eta_{nmik}$. Кинетический вклад в тензор напряжений должен быть симметричным. Член с кинетическим коэффициентом λ явно симметричен. Симметрия вязкого вклада подразумевает $\eta_{iknm} = \eta_{kinm}$. Поскольку R/T — это скорость производства энтропии, величина R должна быть положительныой. Это приводит к ряду необходимых неравенств для компонентов тензоров σ_{ik}, κ_{ik}, η_{iknm}, а также к условию $\gamma > 0$.

Существенно, что члены с кинетическим коэффициентом λ не вносят вклада в скорость производства энтропии, такие кинетические члены называются реактивными. Слагаемое с коэффициентом λ описывает отклонения от модели нематического жидкого кристалла в виде идеальных стержней, вмороженных в поток жидкости, что соответствует $\lambda = 1$. Отметим, что для аналогичной модели для вмороженных дискообразных молекул $\lambda = -1$ [34]. Для такого значения λ сумма реактивных членов и членов, полученных с помощью скобки Пуассона (19), эквивалентна использованию альтернативного выражения для скобки Пуассона $\{J_i, n_k\}$, которое может быть получено из уравнения(75).

Следуя логике, изложенной в разд. 2, уравнение (27) необходимо сравнить с уравнением Максвелла

(1), что приводит к следующему уравнению на вектор смещения $\mathbf{D}$:

$$\partial_t D_i = \partial_t D_{0i} + 4\pi\sigma_{ik}E_k\,, \tag{32}$$

которое является обобщением уравнения (11). В свою очередь, последний член в уравнении (32) является обобщением обычного вклада в поле смещения, связанного с проводимостью [31], для случая анизотропной среды (нематика). Выше мы проигнорировали диссипативный вклад в магнитное поле $\mathbf{H}$. В случае если поле магнитной индукции $\mathbf{B}$ намного больше, чем электрическое поле $\mathbf{E}$, то необходимо учитывать поправки, связанные с движением нематического жидкого кристалла. Такой случай проанализирован в Приложении B.

Отметим, что в одноосном нематике кинетические тензоры σ_{ik}, κ_{ik}, η_{iknm} являются «одноосными». Например, тензор электропроводности и тензор теплопроводности записываются в виде

$$\sigma_{ik} = \sigma_\parallel n_i n_k + \sigma_\perp(\delta_{ik} - n_i n_k)\,, \tag{33}$$
$$\kappa_{ik} = \kappa_\parallel n_i n_k + \kappa_\perp(\delta_{ik} - n_i n_k)\,. \tag{34}$$

В свою очередь, для определения тензора вязкости четвертого ранга η_{iknm} необходимы пять коэффициентов $\eta_1 \div \eta_5$ [21, 37–39]:

$$\begin{aligned}\eta_{ijkl}A_{kl} =& 2\eta_2 A_{ij} + 2(\eta_3-\eta_2)(A_{ik}n_k n_j + A_{jk}n_i n_k) + \\ &+(\eta_4-\eta_2)\delta_{ij}A_{kk} + 2(\eta_1+\eta_2-2\eta_3)n_i n_j n_k n_l A_{kl} + \\ &+(\eta_5-\eta_4+\eta_2)(\delta_{ij}n_k n_l A_{kl} + n_i n_j A_{kk})\,,\end{aligned}$$

где $A_{ij} = \partial_i v_j + \partial_j v_i$. Величины $\eta_1 \div \eta_5$ называются коэффициентами динамической вязкости.

Требование положительности производства энтропии, которое означает выполнение условия $R > 0$ (см. уравнение (31)), приводит к следующим неравенствам на коэффициенты в выражениях (33), (34) для тензоров электропроводности и теплопроводности:

$$\gamma > 0,\ \sigma_\parallel > 0\,,\ \sigma_\perp > 0,\ \kappa_\parallel > 0\,,\ \kappa_\perp > 0\,.$$

Из дальнейшего рассмотрения условия $R > 0$ следует, что коэффициенты $\eta_1 - \eta_5$, входящие в тензор вязкости η_{iknm} (см. уравнение (35)), должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned}\eta_4(2\eta_1+\eta_2) > (\eta_5-\eta_4)^2,\ \eta_2,\eta_3,\eta_4 > 0\,,\\ 2(\eta_1+\eta_5)-\eta_4+\eta_2 > 0\,,\end{aligned}$$

обеспечивающим рост энтропии за счет вязкости среды.

3.3. Минимальная модель для нематиков

С учетом флексоэлектрический эффекта в нематиках поле смещения $\mathbf{D}_0$ в основном приближении может быть записано как

$$\mathbf{D}_0 = \hat{\epsilon}\mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}_{fl}. \tag{35}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — электрическое поле, матрица $\hat{\epsilon}$ — матрица диэлектрической проницаемости нематика, а $\mathbf{P}_{fl}$ представляет собой флексоэлектрический вклад в вектор поляризации [24, 40], связанный с неоднородностью директора $\mathbf{n}$ и учитывающий взаимодействие электрического поля и нематического директора. При этом матрицу диэлектрической проницаемости и $\mathbf{P}_{fl}$ можно представить в следующем виде:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_\perp(\delta_{ik} - n_i n_k) + \epsilon_\parallel n_i n_k\,, \tag{36}$$
$$\mathbf{P}_{fl} = \zeta_1\mathbf{n}(\nabla\mathbf{n}) + \zeta_2(\mathbf{n}\nabla)\mathbf{n}\,, \tag{37}$$

где $\epsilon_\perp, \epsilon_\parallel, \zeta_1, \zeta_2$ — феноменологические коэффициенты, характеризующие диэлектрическую восприимчивость и флексоэлектрический отклик.

Далее мы игнорируем эффекты, связанные с магнитной поляризацией нематика, предполагая $\mu = 1$ и пренебрегая магнитными диссипативными эффектами. Однако стоит отметить, что существует магнитный эффект, обусловленный конечной проводимостью нематиков. Действительно, известно, что плотность электрического тока движущегося проводника равна

$$j_i = \sigma_{ik}\left(E_i + \epsilon_{ikn}\frac{v_k}{c}B_n\right)$$

(см. [31]). Конечно, на практике скорость нематика много меньше, чем c. При этом вклад в плотность электрического тока, связанный с магнитным полем, все-таки может быть существенным, если $B \gg E$, этот случай проанализирован в Приложении B. Однако такие сильные магнитные поля не являются объектом нашего рассмотрения и ниже мы пренебрегаем магнитным вкладом в плотность тока.

Внутренняя энергия U нематика в том же приближении записывается как

$$\begin{aligned}U = \tfrac{1}{8\pi}\mathbf{D}_0\hat{\epsilon}^{-1}\mathbf{D}_0 - \mathbf{P}_{fl}\hat{\epsilon}^{-1}\mathbf{D}_0 + \tfrac{1}{2\rho}J^2 + F_F + \\ + U_0(S,\rho)\,.\end{aligned} \tag{39}$$

В этом случае тождество $\mathbf{E} = 4\pi\partial U/\partial\mathbf{D}_0$ (см. уравнение (12)) воспроизводит соотношение (35). В рамках развитого подхода упругость нематической фазы учитывается путем введения в полную энергию (39) упругой энергии Франка F_F для нематического жидкого кристалла:

$$F_F = \frac{K_1}{2}(\nabla \mathbf{n})^2 + \frac{K_2}{2}[\mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{n})]^2 + \\ + \frac{K_3}{2}[\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n})]^2 \,. \qquad (40)$$

где K_1, K_2, K_3 — модули Франка для расширения, кручения, и изгиба.

Для реалистичных течений жидкий кристалл (нематический или смектический A) можно рассматривать как несжимаемый, т. е. плотность среды ρ однородна и $\nabla \mathbf{v} = 0$. Кроме того, в случае большой теплопроводности температура T является однородной. В противоположном случае малой теплопроводности однородна удельная энтропия S/ρ. Оба предельных случая позволяют исключить температуру или энтропию из рассмотрения. Набор уравнений можно сделать более компактным, предполагая, что константы Франка равны и сохраняя только один флексоэлектрический коэффициент (тем более, что в основном приближении это также относится к смектикам A, см. разд. 4).

Упрощенная модель качественно правильно определяет характерные временные и пространственные масштабы нелинейной динамики нематиков. При необходимости эти допущения модели могут быть устранены за счет более громоздкого набора уравнений. Важно, конечно, не переигрывать с такими упрощениями. Например, следует проявлять особую осторожность, предполагая единый (изотропный) коэффициент вязкости. Для различных типов электрогидродинамических неустойчивостей в нематиках именно различие между коэффициентами вязкости определяет порог нестабильности. Другим ярким примером является лиотропный смектик A. В этом случае [41] простой сдвиг в слоях воды определяется очень низкой вязкостью воды $10^{-2}\,ps$, тогда как все другие гидродинамические движения определяются вязкостью мембраны, которая в несколько сот раз больше.

4. СМЕКТИКИ

Расширяя область применения наших результатов, рассмотрим нелинейную электродинамику смектиков A. Вместо директора $\mathbf{n}$ смектик A характеризуется смещением u смектических слоев в z-направлении, где ось z выбрана перпендикулярно равновесному положению смектических слоев. Уравнения удобно формулировать в терминах переменной $W = z - u$, что позволяет записать уравнения в инвариантной относительно вращений форме (см., например, [15, 21]). Дифференциал внутренней энергии имеет вид

$$dU = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_0 d\mathbf{B} + TdS + \mu d\rho + \mathbf{v}d\mathbf{J} + \\ + \frac{\partial U}{\partial(\partial_i W)} d(\partial_i W) + M_{ik} d(\partial_i \partial_k W) \,, \qquad (41)$$

вместо уравнения (12).

В основном приближении вклады смектической упругой энергии в U могут быть записаны как

$$U_{sm} = \frac{B}{8}[(\nabla W)^2 - 1]^2 + \frac{K}{2}(\nabla^2 W)^2 \,, \qquad (42)$$

вместо уравнения (40). Таким образом,

$$U = \frac{1}{8\pi}\mathbf{D}_0 \hat{\epsilon}^{-1}\mathbf{D}_0 - \mathbf{P}_{fl}\hat{\epsilon}^{-1}\mathbf{D}_0 + \\ + \frac{1}{2\rho}J^2 + U_{sm} + U_0(S, \rho) \,.$$

Матрица диэлектрической проницаемости $\hat{\epsilon}$ и флексоэлектрический вклад в вектор поляризации $\mathbf{P}_{fl}$ смектика записываются в виде

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_\perp(\delta_{ik} - l_i l_k) + \epsilon_\parallel l_i l_k \,, \qquad (43)$$

$$\mathbf{P}_{fl} = \zeta_1 \mathbf{l}(\nabla \mathbf{l}) + \zeta_2 (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{l} \,, \qquad (44)$$

вместо уравнений (36), (37). В выражениях (43), (44) $\mathbf{l}$ — единичный вектор, перпендикулярный смектическим слоям: $\mathbf{l} = \nabla W / |\nabla W|$. Отметим, что насколько нам известно, флексоэлектрическая неустойчивость в смектической A фазе жидких кристаллов экспериментально не наблюдалась. Однако нет никаких сомнений в самом существовании флексоэлектрического эффекта в смектике A (см., например, [42], где был измерен коэффициент ζ_1).

Чтобы сформулировать бездиссипативные динамические уравнения для смектиков, мы снова используем метод скобок Пуассона, как и для нематиков. Скобка Пуассона для переменной W имеет вид

$$\{\mathbf{J}(\mathbf{r}), W(\mathbf{x})\} = -\nabla W \delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}) \,, \qquad (45)$$

вместо уравнения (19). Выражения для остальных скобок Пуассона (16)–(18) не изменяются. Уравнение для переменной W имеет вид

$$\partial_t W = \{\mathcal{H}, W\} = -\mathbf{v}\nabla W, \quad \partial_t u = v_z - \mathbf{v}\nabla u, \qquad (46)$$

где мы использовали выражения (41), (45), а уравнение для поля смещения u получается путем подстановки $W = z - u$.

В свою очередь, уравнение для плотности импульса смектика принимает вид

$$\partial_t J_i = -\partial_k(v_k J_i) - \partial_k\left(M_k \partial_i W\right) - \partial_k(M_{kj}\partial_i\partial_j W) -$$

$$-\partial_i p+\frac{1}{4\pi}\partial_k\left(D_{0k}E_i+B_kH_{0i}\right)-\frac{1}{4\pi c}\partial_t[\mathbf{D}_0\times\mathbf{B}]_i\,, \quad (47)$$

вместо уравнения (22). Здесь

$$M_i=\frac{\partial U}{\partial(\partial_i W)}-\partial_k M_{ik}$$

и

$$M_{ik}=\frac{\partial U}{\partial(\partial_i\partial_k W)}\,.$$

Давление p определяется прежним соотношением (13).

Следующим шагом является добавление диссипативных членов к написанным выше реактивным уравнениям для смектиков. Заметим, что диссипативные члены в уравнениях для электрического поля смещения и плотности импульса аналогичны диссипативным членам в уравнениях (27), (28), где следует заменить $\mathbf{n}\to\mathbf{l}$. Диссипативные вклады в уравнения для W и плотности энергии U имеют вид

$$\partial_t W=-\mathbf{v}\nabla W+\Theta,\Theta=-\xi_1|\nabla W|^2h-\frac{\xi_2}{T}\nabla W\nabla T, \quad (50)$$

$$\partial_t U=-\nabla\mathbf{Q}^{(r)}_{Sm}+\partial_i(\kappa_{ik}\partial_k T)+\partial_i(v_k\eta_{iknm}\partial_n v_m)+ \\ +\nabla\left(\frac{\partial U}{\partial(\nabla W)}\Theta\right)+\partial_i(M_{ik}\partial_k\Theta)-\partial_k(\partial_i M_{ik}\Theta)\,, \quad (51)$$

где величина

$$h=-\nabla\frac{\partial U}{\partial(\nabla W)}+\partial_i\partial_k M_{ik} \quad (52)$$

является вариационной производной энергии по W. В свою очередь, реактивная плотность потока энергии для смектиков

$$\left(Q^{(r)}_{Sm}\right)_i=\frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}_0\right]_i+M_i\left(v_k\partial_k W\right)+ \\ +M_{ik}\,\partial_k(v_l\partial_l W)+\left(\rho\mu+TS+\mathbf{J}\mathbf{v}\right)v_i. \quad (53)$$

В уравнении (50) ξ_1,ξ_2 — это так называемые коэффициенты просачивания [15]. Уравнение для плотности энтропии принимает вид

$$\partial_t S=\{\mathcal{H},S\}+\partial_i\left(\frac{\kappa_{ik}}{T}\partial_k T+\frac{\xi_2}{T}\partial_i W h\right)+\frac{R}{T}\,, \quad (54)$$

$$R=\frac{\kappa_{ik}}{T}\partial_i T\partial_k T+\xi_1(\nabla W)^2h^2+2\frac{\xi_2}{T}h\left(\nabla W\right)\nabla T+ \\ +\eta_{iknm}\partial_i v_k\partial_n v_m+\sigma_{ik}E_iE_k\,. \quad (55)$$

Положительное производство энтропии подразумевает выполнение условий $\xi_1>0$, $\kappa_\parallel\xi_1>\xi_2^2/T$, в дополнение к условиям, аналогичным тем, которые были сформулированы для нематиков.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение мы хотели бы подчеркнуть, что жидкие кристаллы далеко не исчерпанная тема исследований. Достаточно очевидно, что динамика жидкокристаллических фаз оказывается существенно сложнее и богаче, чем динамика обычной жидкости. Жидкие кристаллы, представляя собой мягкие (легко возбуждаемые и деформируемые) системы, открывают простор для изучения нелинейных эффектов, и нелинейная физика является одним из ведущих направлений их изучения. В этой работе мы показали, как включить электромагнитное поле в описание нелинейных динамических явлений в нематиках и смектиках A во внешнем переменном электрическом поле. Наш основной результат (сформулированный набор динамических уравнений для нематических и смектических A жидких кристаллов) позволяет начать изучение различных нелинейных динамических явлений в этих системах. Полезно перечислить несколько современных популярных тем исследований, связанных с обсуждаемыми вопросами.

- Электрически управляемые динамические трехмерные локализованные возмущения ориентации нематического директора (директроны).
- Классическая динамика доменных стенок (кинков), разделяющих стабильные и нестабильные конфигурации директора. Здесь естественным образом возникает несколько интересных вопросов, требующих полного набора нелинейных динамических уравнений.
- Динамические переходы между изотропной и нематической жидкокристаллическими фазами в неравновесных системах, управляемые внешним переменным электрическим полем (см., например, [43]).
- Эффекты анизотропного вязкого течения, создаваемые в жидких кристаллах вращающимися коллоидными частицами (см. сказаное выше о предположении об одном изотропном коэффициенте вязкости при сдвиге и недавнюю публикацию [44]).
- Роль дефектов (дисклинации в поле директора и гидродинамические вихри при сдвиговом течении нематика, см. [45]).

Во всех перечисленных случаях неустойчивость вызывается либо внешним электрическим полем (которое влияет на систему через диэлектрическую анизотропию, флексоэлектрическую связь или, в смектике, через так называемый электроклинный эффект [46,47]), либо внешним потоком. В этих случаях выше порогов неустойчивочти поведение системы контролируется нелинейными эффектами.

Для количественного исследования некоторых задач с использованием полученных уравнений, необходимо выполнить три дальнейших шага:
(1) линеаризовать и решить линейные уравнения;
(2) включить нелинейные слагаемые, относящиеся к интересующему режиму неустойчивости в конкретной рассматриваемой задаче;
(3) решить соответствующий нелинейный набор уравнений.

К сожалению, практически невозможно объединить эти три этапа в одной работе. Кроме того, это требует значительных численных расчетов, поскольку для описания более или менее реалистичной ситуации необходимо решить набор связанных уравнений Флоке в многопараметрическом фазовом пространстве. Мы откладываем эти шаги, работа над которыми ведется сейчас, для дальнейших публикаций.

Финансирование. Все соавторы, а именно Е.И.К., А.Р.М. и сотрудники В.В.Л. и Е.С.П. Лаборатории «Современная гидродинамика», созданной в рамках гранта Министерства науки и высшего образования РФ 075-15-2019-1893 в ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН, внесли равнозначный вклад в представленную работу. Работа Е.И.К. была поддержана Государственным заданием № 0029-2021-0003 ИТФ им. Л.Д. Ландау РАН. Работа А.Р.М. была поддержана государственным заданием FMME-2022-0008 (N. 122022800364-6). Работа сотрудников Лаборатории «Современная гидродинамика», В.В.Л. и Е.С.П. по выводу нелинейных динамических уравнений для жидкокристаллических мезофаз поддержана грантом РНФ № 23-72-30006, а их работа по вычислению скобок Пуассона была поддержана Государственным заданием № 0029-2021-0003.

ПРИЛОЖЕНИЕ А. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОБОК ПУАССОНА

Здесь мы приводим вывод некоторых выражений для скобок Пуассона, необходимых для построения нелинейных уравнений, представленных в статье. Заметим, что данные выражения являются универсальными [20, 21], т. е. не зависят от конкретной формы гамильтониана (энергии системы). Нам нужны скобки Пуассона, включающие электромагнитные степени свободы. Полученные в этом Приложении выражения полезны также, чтобы сформулировать нелинейные реактивные уравнения, описывающие динамику нематического директора.

А1. Векторные поля

Рассмотрим гамильтонову динамику для системы, описываемой канонически сопряженными векторными полями $\mathbf{p}, \mathbf{q}$. Гамильтониан системы записывается в виде

$$\mathcal{H} = \int dV\, H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \partial_i \mathbf{q}). \tag{56}$$

Канонические уравнения для полей $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ записываются в виде

$$\partial_t \mathbf{p} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta q} = -\frac{\partial H}{\partial q} + \partial_i \frac{\partial H}{\partial(\partial_i \mathbf{q})}, \tag{57}$$

$$\partial_t \mathbf{q} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta p} = \frac{\partial H}{\partial p}. \tag{58}$$

Эти уравнения могут быть записаны как

$$\partial_t \mathbf{p} = \{\mathcal{H}, \mathbf{p}\}, \quad \partial_t \mathbf{q} = \{\mathcal{H}, \mathbf{q}\}, \tag{59}$$

где $\{\ldots, \ldots\}$ обозначают скобки Пуассона. Ненулевые скобки Пуассона для канонически сопряженных полей $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ равны

$$\{p_i(\mathbf{r}), q_k(\mathbf{x})\} = \delta_{ik}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{x}). \tag{60}$$

Подставляя в уравнение (59) выражение (60), мы воспроизводим уравнения (57), (58).

Уравнения (57), (58) приводят к следующему уравнению для канонической плотности импульса:

$$\partial_t(-\mathbf{p}\partial_i \mathbf{q}) + \partial_k \Pi_{ik} = 0, \tag{61}$$

$$\Pi_{ik} = \left(\mathbf{p}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - H\right)\delta_{ik} + \frac{\partial H}{\partial(\partial_k \mathbf{q})}\partial_i \mathbf{q}. \tag{62}$$

В общем случае тензор напряжений (62) не является симметричным. Следовательно, закон сохранения момента импульса, основанный на канонической плотности импульса, не выполняется автоматически. Чтобы преодолеть эту трудность, мы используем вращательную инвариантность H:

$$\epsilon_{ikn}\left[p_k \frac{\partial H}{\partial p_n} + q_k \frac{\partial H}{\partial q_n} + \partial_j q_k \frac{\partial H}{\partial(\partial_j q_n)} + \right. \\ \left. + \partial_k q_j \frac{\partial H}{\partial(\partial_n q_j)}\right] = 0. \tag{63}$$

Отсюда мы получаем

$$\epsilon_{ikn}\Pi_{kn} = -\epsilon_{ikn}\partial_t(p_k q_n) - \epsilon_{ikn}\partial_j\left[q_k\frac{\partial H}{\partial(\partial_j q_n)}\right]. \quad (64)$$

Используя (64) и стандартное соотношение

$$\epsilon_{ikn}\epsilon_{njl} = \delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{kj},$$

уравнение (61) можно переписать как

$$\partial_t(-\mathbf{p}\partial_i\mathbf{q}) + \frac{1}{2}\partial_k(\Pi_{ik}+\Pi_{ki}) + \\ + \frac{1}{2}\partial_k(\Pi_{ik}-\Pi_{ki}) = 0\,, \quad (65)$$

где

$$\partial_k(\Pi_{ik}-\Pi_{ki}) = \partial_k(\epsilon_{ikn}\epsilon_{njl}\Pi_{jl}) = \\ = -\partial_t\partial_k(p_i q_k - p_k q_i) - \epsilon_{ikn}\epsilon_{njl}\partial_k\partial_m\left[q_j\frac{\partial H}{\partial(\partial_m q_l)}\right]. \quad (66)$$

Последний член в уравнении (66) всегда можно переписать как производную симметричного тензора, используя тождество

$$\partial_k\partial_j M_{kji} = \partial_k\partial_j\Big[M_{kji} - \frac{1}{2}\epsilon_{kji}(\epsilon_{pqs}M_{pqs}) - \\ -\epsilon_{kjs}\epsilon_{qls}M_{qil}\Big]. \quad (67)$$

Можно легко проверить, что комбинация в квадратных скобках в уравнении (67) инвариантна относительно перестановки $i \leftrightarrow k$. Следовательно, уравнение (65) может быть переписано как

$$\partial_t\left[-\mathbf{p}\partial_i\mathbf{q} + \partial_k(p_k q_i)\right] - \partial_k T_{ik} = 0, \quad (68)$$

где тензор напряжений T_{ik} симметричен.

Таким образом, мы приходим к выводу, что для векторных полей правильным выражением для плотности импульса является

$$J_i = -\mathbf{p}\partial_i\mathbf{q} + \partial_k(p_k q_i). \quad (69)$$

Помимо канонического вклада, выражение (69) содержит дополнительный член, характеризующий векторные поля. Используя соотношение (60), можно вывести из уравнения (69) выражение

$$\{J_k(\mathbf{r}), J_i(\mathbf{x})\} = J_i(\mathbf{r})\partial_k\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) + \partial_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})J_k(\mathbf{x}),$$

совпадающее с уравнением (18), тем самым подтверждая его универсальность.

С использованием соотношения (60), из выражения (69) выводятся следующие выражения для скобок Пуассона:

$$\{J_i(\mathbf{r}), p_k(\mathbf{x})\} = p_k(\mathbf{r})\partial_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) - \\ - \delta_{ik}\partial_n\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})p_n(\mathbf{x})\,, \quad (71)$$

$$\{J_i(\mathbf{r}), q_k(\mathbf{x})\} = -\partial_i q_k\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) + \\ + \partial_k\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})q_i(\mathbf{x}), \quad (72)$$

$$\{J_i(\mathbf{r}), b_k(\mathbf{x})\} = b_k(\mathbf{r})\partial_i\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) - \\ - \delta_{ik}\partial_j\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})b_j(\mathbf{x}), \quad (73)$$

где $\mathbf{b} = \nabla\times\mathbf{q}$. Из уравнений (71), (72) для единичных векторов получается

$$\left\{J_i(\mathbf{r}), \frac{p_k}{p}(\mathbf{x})\right\} = -\left(\partial_i\frac{p_k}{p}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) - \\ -\partial_n\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\left[\frac{p_n}{p}\left(\delta_{ik} - \frac{p_i}{p}\frac{p_k}{p}\right)\right], \quad (74)$$

$$\left\{J_i(\mathbf{r}), \frac{q_k}{q}(\mathbf{x})\right\} = -\left(\partial_i\frac{q_k}{q}\right)\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}) + \\ +\partial_j\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x})\left[\left(\delta_{jk} - \frac{q_j}{q}\frac{q_k}{q}\right)\frac{q_i}{q}\right], \quad (75)$$

где выражения в квадратных скобках являются функциями $\mathbf{x}$. Отметим, что выражения (74) и (75), полученные для векторных полей, совпадают с выражениями, найденными Воловиком для идеальных стержней и дисков, вмороженных в течение жидкого кристалла [34].

A2. Электромагнитное поле

Мы начнем с бездиссипативных динамических уравнений для электромагнитного поля в лагранжевой формулировке. Удобно использовать калибровку Вейля, в которой как электрическое поле $\mathbf{E}$, так и поле магнитной индукции $\mathbf{B}$, выражаются только через векторный потенциал $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\partial_t\mathbf{A}, \quad \mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}. \quad (76)$$

Плотность лагранжиана L зависит от $\mathbf{E}, \mathbf{B}$, т. е. от производных векторного потенциала $\mathbf{A}$, в соответствии с уравнением (76). Плотность лагранжиана L связана с плотностью внутренней энергии U с помощью преобразования Лежандра:

$$U = \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}_0\mathbf{E} - L, \quad \mathbf{D}_0 = 4\pi\frac{\partial L}{\partial\mathbf{E}}. \quad (77)$$

Таким образом, гамильтониан (энергия системы) записывается как

$$\mathcal{H} = \int dV\, U(\mathbf{D}_0, \mathbf{B}, \dots), \quad (78)$$

$$dU = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}d\mathbf{D}_0 + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_0 d\mathbf{B} + \dots, \quad (79)$$

где точки обозначают другие переменные.

Как можно получить из уравнений (77), (79),

$$dL = \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}_0 d\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}_0 d\mathbf{B} + \ldots . \tag{80}$$

Следовательно, переменная, канонически сопряженная $\mathbf{A}$, равна

$$\frac{\partial L}{\partial(\partial_t \mathbf{A})} = -\frac{\mathbf{D}_0}{4\pi c}. \tag{81}$$

Таким образом, мы приходим к следующему выражению для скобки Пуассона:

$$\{A_i(\mathbf{r}), D_{0k}(\mathbf{x})\} = 4\pi c \delta_{ik}\delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}). \tag{82}$$

Вычисляя ротор отношения (82), мы находим

$$\{B_j(\mathbf{r}), D_{0k}(\mathbf{x})\} = 4\pi c\, \epsilon_{jmk}\partial_m \delta(\mathbf{r}-\mathbf{x}), \tag{83}$$

т. е. уравнение (8). Важно отметить, что полученное нами выражение (82) для скобки Пуассона $\{A_i(\mathbf{r}), D_{0k}(\mathbf{x})\}$ совпадает с выражением, приведенным Воловиком в работе [16], более того, оба выражения (82) и (83) совпадают с выражениями для соответствующих скобок Пуассона, приведенными Воловиком в работе [17].

Теперь мы можем вывести канонические уравнения для электромагнитного поля. Используя термодинамическое тождество (77) и выражение (83), мы получаем уравнения Максвелла

$$\partial_t \mathbf{D}_0 = \{\mathcal{H}, \mathbf{D}_0\} = c\nabla \times \mathbf{H}_0, \tag{84}$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \{\mathcal{H}, \mathbf{B}\} = -c\nabla \times \mathbf{E}. \tag{85}$$

Заметим, что уравнение (85) является прямым следствием соотношений (76). Можно найти вклад в плотность импульса, связанный с электромагнитным полем. Подставляя в выражение (69) $\mathbf{p} = -(4\pi c)^{-1}\mathbf{D}_0$, $\mathbf{q} = \mathbf{A}$, получаем

$$\mathbf{J}^{em} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{D}_0 \times \mathbf{B}, \tag{86}$$

где мы положили, что $\nabla \mathbf{D}_0 = 0$. Данное условие означает, что плотность свободных зарядов равна нулю.

ПРИЛОЖЕНИЕ В. ПРОВОДИМОСТЬ ПРИ КОНЕЧНОЙ СКОРОСТИ

Нам неизвестны публикации с выводом проводимости для движущихся жидких кристаллов (несмотря на то, что хорошо известно, как выполнять такие расчеты). Таким образом, мы представили результаты таких расчетов в этом Приложении. Одним из побочных результатов нашего расчета является то, что в достаточно сильном магнитном поле электропроводность движущегося жидкого кристалла зависит от магнитного поля даже в пределе $v \ll c$.

Перейдем к термодинамическому потенциалу:

$$\tilde{U} = U - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\mathbf{H}_0, \tag{87}$$

$$d\tilde{U} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\, d\mathbf{D}_0 - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\, d\mathbf{H}_0 + \ldots . \tag{88}$$

Таким образом, производная по времени от плотности энергии равна

$$\partial_t \tilde{U} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\, \partial_t \mathbf{D}_0 - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\, \partial_t \mathbf{H}_0 + \ldots, \tag{89}$$

где мы приводим электромагнитные слагаемые. Нас интересует диссипативный вклад в $\partial_t \tilde{U}$.

Если скорость $\mathbf{v}$ системы отлична от нуля, то соотношение между плотностью тока свободных зарядов и электрическим полем $\mathbf{E}$ имеет вид

$$j_i = \sigma_{ik}\left(E_k + \epsilon_{knm}\frac{v_n}{c}B_m\right). \tag{90}$$

Это является следствием того факта, что векторы $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ и векторы $\mathbf{D}, \mathbf{H}$ могут быть представлены как компоненты четырехмерных антисимметричных тензоров второго порядка при условии, что плотность заряда равна нулю [31]. Аргументы, стоящие за уравнением (90), основаны на инвариантности Лоренца и восходят к Минковскому (1907 г.). Величина (90) представляет собой кинетический (диссипативный) вклад в $-\partial_t \mathbf{D}_0/(4\pi)$. Интересно отметить, что второе слагаемое в уравнении (90) может быть существенно даже при $v/c \ll 1$, если $B \gg E$. Аналогичные аргументы приводят к выводу, что диссипативный вклад в производную намагниченности $\partial_t H_{0i}/(4\pi)$ равен

$$\epsilon_{ilj}\frac{v_l}{c}\sigma_{jk}\left(E_k + \epsilon_{knm}\frac{v_n}{c}B_m\right). \tag{91}$$

Из уравнений (88), (90), (91) находим, что

$$R = \frac{1}{4\pi}\sigma_{ij}\left(E_i + \epsilon_{ink}\frac{v_n}{c}B_k\right)\left(E_j + \epsilon_{jml}\frac{v_m}{c}B_l\right) + \ldots, \tag{92}$$

где R/T — скорость производства энтропии. Таким образом, единственное отличие по сравнению со схемой, представленной в основном тексте, заключается в замене $\mathbf{E} \to \mathbf{E}'$, где

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \tag{93}$$

(ср. с [31], уравнение (63.1)). Подчеркнем, что соотношения, выведенные в разделе, верны при произвольной скорости $\mathbf{v}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bing-Xiang Li, V. Borshch, Rui-Lin Xiao, S. Paladugu, T. Turiv, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, *Electrically Driven Dynamic Three-Dimensional Solitons in Nematic Liquid Crystals*, Nat. Com. **9**, 2912 (2018).

2. Bing-Xiang Li, Rui-Lin Xiao, S. Paladugu, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, *Three-Dimensional Solitary Waves with Electrically Tunable Direction of Propagation in Nematics*, Nat. Com. **10**, 3749 (2019).

3. Bing-Xiang Li, Rui-Lin Xiao, S. V. Shiyanovskii, and O. D. Lavrentovich, *Soliton-Induced Liquid Crystal Enabled Electrophoresis*, Phys. Rev. Res. **2**, 013178 (2020).

4. Y. Shen and I. Dierking, *Dynamics of Dissipative Solitons in Nematics*, Soft Matter **16**, 5325 (2020).

5. Y. Shen and I. Dierking, *Dynamics of Electrically Driven Solitons in Nematic and Cholesteric Liquid Crystals*, Commun. Phys. **3**, 1 (2020).

6. Y. Shen and I. Dierking, *Electrically Driven Formation and Dynamics of Swallow-Tail Solitons in Smectic A Liquid Crystals*, Mater. Adv. **2**, 4752 (2021).

7. Y. Shen and I. Dierking, *Electrically Driven Formation and Dynamics of Skyrmionic Solitons in Chiral Nematics*, Phys. Rev. Appl. **15**, 054023 (2021).

8. Y. Shen and I. Dierking, *Annealing and Melting of Active Two-Dimensional Soliton Lattices in Chiral Nematic Films*, Soft Matter **18** 7045 (2022).

9. S. Aya and F. Araoka, *Kinetics of Motile Solitons in Fluid Nematics*, Nat. Com., **11**, 3248 (2020).

10. T. Dauxois and M. Peyrard, *Physics of Solitons*, Cambridge University Press, Cambridge, England (2006).

11. S. P. Novikov, S. V. Manakov, L. P.Pitaevskii, and V. E. Zakharov, *Theory of Solitons: The Inverse Scattering Method*, Springer, New York (1984).

12. *Dissipative Solitons*, in Lecture Notes in Physics, ed. by N. Akhmediev and A. Ankiewicz, **661**, 1 Springer, Berlin (2005).

13. S. K. Turitsyn, N. N. Rozanov, I. A. Yarutkina, A. E. Bednyakova, S. V. Fedorov, O. V. Shtyrina, and M. P. Fedoruk, *Dissipative Solitons in Fiber Lasers*, Phys. Usp. **59**, 642 (2016) [UFN **186**, 713 (2016)].

14. Y. L. Qiang, T.J.Alexander, and C.M. de Sterke, Phys. Rev. A **105**, 023501 (2022).

15. P. G. de Gennes and J. Prost, *The Physics of Liquid Crystals*, Clarendon Press, Oxford (1993).

16. G. E. Volovik and V. S. Dotsenko, *The Hydrodynamics of Defects in Condensed Matter on Example of Rotating HeII and Disclinations in Planar Magnets*, ZhETF **78**, 132 (1980) [JETP **51** 65 (1980)].

17. G. E. Volovik, *Dimensionless Physics: Continuation*, ZhETF **162**, 680 (2022) [JETP **135**, 663 (2022)].

18. P. J. Barratt and J .T. Jenkins, J. Phys. A **6**, 756 (1973).

19. B. C. Snow and I. W. Stewart, J. Phys.: Condens. Matter **33**, 185101 (2021).

20. I. E. Dzyaloshinskii and G. E. Volovik, *Poisson Brackets in Condensed Matter Physics*, Ann. of Phys. **125**, 67 (1980).

21. E. I. Kats and V. V. Lebedev, *Fluctuational Effects in the Dynamics of Liquid Crystals*, Springer-Verlag, New York (1993).

22. H.Stark and T. C. Lubensky, *Poisson Bracket Approach to the Dynamics of Nematic Liquid Crystals: The Role of Spin Angular Momentum*, Phys. Rev. E **72**, 051714 (2005).

23. H. Brand and H. Pleiner, Phys. Rev. A **37**, 2736 (1988).

24. S. A. Pikin, *Structural Transformations in Liquid Crystals*, Gordon and Breach Science Publishers, New York (1991).

25. H. Pleiner and H. R. Brand, *Hydrodynamics and Electrohydrodynamics of Nematic Liquid Crystals*, in: *Pattern Formation in Liquid Crystals*, ed. by A. Buka and L. Kramer, Springer, New York (1996).

26. H. Pleiner, M.Liu, and H. R. Brand, Rheological Acta **43**, 502 (2009).

27. O. D. Lavrentovich, I. Lazo, and O. P. Pishnyak, Nature **467**, 947 (2010).

28. O. M. Tovkach, C. Calderer, D. Golovaty, O. Lavrentovich, and N. J. Walkington, *Electro-Osmosis in Nematic Liquid Crystals*, Phys. Rev. E **94**, 012702 (2016).

29. T. Potisk, D.Svensek, H. R. Brand, H. Pleiner, D. Lisjak, N. Osterman, and A. Mertelj, Phys. Rev. Lett. **119**, 097802 (2017).

30. T. Potisk, A. Mertelj, N. Sebastian, N. Osterman, D. Lisjak, H. R. Brand, H. Pleiner, and D. Svensek, Phys. Rev. E **97**, 012701 (2018).

31. L. D.Landau and E. M.Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, London (1984).

32. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Pegamon Press, London (1978).

33. A. N. Beris and B. J. Edwards, *Thermodynamics of Flowing Systems: with Internal Microstructure*, Oxford Engineering Science Series, Oxford (1994).

34. G. E. Volovik, JETP Letters **31**, 273 (1980).

35. A. Earls and M.C. Calderer, Liquid Crystals **49**, 742 (2022).

36. A. Krekhov, W. Pesch, N. Eber, T. Toth-Katona, and A. Buka, Phys. Rev. E **77**, 021705 (2008).

37. P. C. Martin, P. S .Pershan, and J. Swift, Phys. Rev. Lett. **25**, 844 (1970).

38. P. C. Martin, O. Parodi, and P. S. Pershan, *Unified Hydrodynamic Theory for Crystals, Liquid Crystals, and Normal Fluids*, Phys. Rev. A, **6**, 2401 (1972).

39. L. D. Landau and E .M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Elsevier, Amsterdam (1986).

40. R. B. Meyer, Phys. Rev. Lett. **22**, 918 (1969).

41. F. Brochard and P. G. de Gennes, Pramana, Suppl. **1**, 1 (1975).

42. J. Prost and P. S. Pershan, J. of App. Phys. **47**, 2298 (1976).

43. Jong-Hoon Huh, Phys. Rev. E **106**, 014702 (2022).

44. Jun-Yong Lee, Jae Hoon Lee, B. Lev, and Jong-Hyun Kim, Phys. Rev. E **106**, 014706 (2022).

45. M.G. Clerc, M. Ferre, R. Gajardo-Pizarro, and V. Zambra, Phys.Rev.E, **106**, L012201 (2022).

46. I.-Ch. Khoo, *Liquid Crystals*, Wiley-Interscience, New Jersey (2007)

47. L. M. Blinov, *Structure and Properties of Liquid Crystals*, Springer, London (2011).