

ОПТИМИЗАЦИЯ ПЕРЕПУТЫВАЮЩИХ ЛОГИЧЕСКИХ ВЕНТИЛЕЙ НА ОСНОВЕ ЭФФЕКТА РИДБЕРГОВСКОЙ БЛОКАДЫ

Л. В. Герасимов^{a,b}, Д. В. Куприянов^a, С. С. Страуне^{a,c}*

*^a Центр квантовых технологий, физический факультет,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
119991, Москва, Россия*

*^b Центр перспективных исследований, Санкт-петербургский университет
195251, Санкт-Петербург, Россия*

*^c Российский квантовый центр
121205, Москва, Россия*

Поступила в редакцию 10 марта 2023 г.,
после переработки 6 апреля 2023 г.
Принята к публикации 6 апреля 2023 г.

Проанализирована реализация квантового логического вентиля в системе холодных атомов, удерживаемых оптическими микроловушками. Проведено моделирование динамики двух спиновых кубитов, в котором рассматривается ряд процессов, ограничивающих эффективность механизма перепутывания на основе эффекта ридберговской блокады, и предложена геометрия двухфотонного возбуждения ридберговских состояний атомов, позволяющая повысить устойчивость системы к вариации ряда параметров, а также снизить потери, связанные с процессами некогерентного рассеяния управляющего излучения.

*Статья представлена в рамках публикации материалов конференции
«Физика ультрахолодных атомов» (ФУХА-2022), Новосибирск, декабрь 2022 г.*

DOI: 10.31857/S0044451023080023
EDN:HZDZJWJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Массивы нейтральных атомов, удерживаемых оптическими микроловушками, являются весьма привлекательной физической платформой для реализации систем квантовой обработки информации, обладающей высоким потенциалом для масштабирования вплоть до нескольких сотен кубитов в одном массиве [1–4]. Разработанные на сегодняшний день методы индивидуального контроля спиновых и поступательных степеней свободы нейтральных атомов позволяют эффективно манипулировать состояниями одиночных кубитов, моделировать их динамику на квантовом уровне [5], а также обеспечить для них достаточно большое время спиновой когерентности [6–9].

Ключевой проблемой для работоспособности рассматриваемой платформы является низкая устойчивость и эффективность техники многокубитных логических операций, предполагающих создание перепутанных состояний между атомами. Разработанные на сегодняшний день протоколы перепутывания, основанные на эффекте ридберговской блокады [10–13], являются основным инструментом для существующих экспериментальных реализаций [14] и все еще демонстрируют относительно низкую достоверность как характеристику качества создаваемого перепутанного состояния.

В данной работе нами представлены результаты детального анализа различных физических механизмов, лежащих в основе спинового перепутывания атомов посредством эффекта ридберговской блокады. Разработанная модель продолжает наши исследования, изложенные в статье [15], и использована для проведения численного моделирования

* E-mail: gerasimov_lv@spbstu.ru

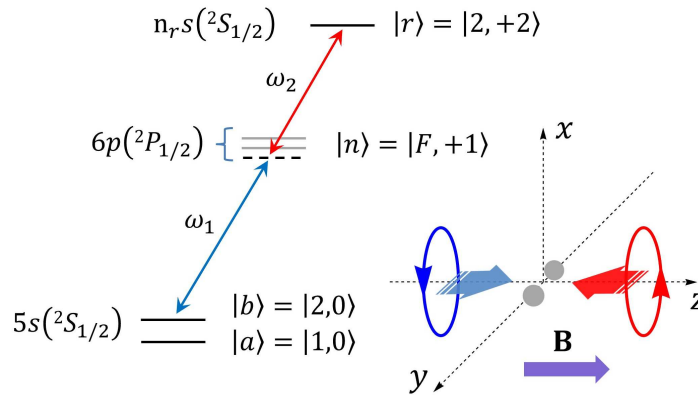


Рис. 1. Диаграмма энергетических переходов и геометрия возбуждения атомов ^{87}Rb двумя встречными лучами управляющих полей, имеющих круговую σ_+ -поляризацию. Ось квантования, задаваемая ориентацией внешнего магнитного поля \mathbf{B} сонаправлена с осью ловушек z , что отмечено стрелкой фиолетового цвета. Участвующие в схемах возбуждения состояния указаны определенными значениями полного (суммарного углового для электрона и спинового для ядра) момента $F_0 = 2, F = 1, 2, F_r = 2$ и их проекциями $M_0 = 0, M = +1, M_r = +2$. Рассматриваемая энергетическая конфигурация сводится к эффективной двухуровневой и позволяет проводить возбуждение одного из состояний кубита (в нашем случае $|b\rangle$) в единственное ридберговское состояние $|r\rangle$, характеризуемое главным квантовым числом $n_r \sim 50-100$

рассматриваемого протокола. В отличие от ряда предыдущих исследований, преимущественно фокусирующихся на квантовых вычислителях в многокубитных системах, мы были мотивированы выяснением физики процессов, способных ограничить эффективность процедуры перепутывания, достоверность которой является критически важным параметром для значительного числа предлагаемых на сегодняшний день систем квантовой обработки информации. Хотя в нескольких недавних работах были достигнуты значения достоверности двухкубитных операций на уровне 97–98% [16], для полноценной работы универсального квантового вычислителя эти величины все еще недостаточны, и в нашей работе исследован ряд трудностей, их причины и возможные пути их преодоления для дальнейшего усовершенствования квантовых логических систем.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЕРЕПУТЫВАЮЩЕГО ЛОГИЧЕСКОГО ВЕНТИЛЯ

Наряду с эффектом неидеальности ридберговской блокады (конечности блокадного сдвига), одним из основных источников ошибок двухкубитных логических операций является спонтанное рассеяние, которое неизбежно сопровождает когерентную динамику атома, возбуждаемого в ридберговское состояние в ходе двухфотонного процесса. Последний инициируется двумя одновременно включаемыми когерентными импульсами, имеющими различные несущие частоты: «синюю» ω_1 и «красную» ω_2 , и действующими через промежуточные состояния атома, которые обозначены на рис. 1 и 2 индексом n .

Проведенное нами численное моделирование основано на реалистичном описании всех этапов процесса взаимодействия и дало возможность оценить оптимальную длительность воздействия управляющих импульсов, а также соотношение частот Раби «синей» и «красной» мод, позволяющее повысить устойчивость протокола к флуктуациям их интенсивности и минимизировать некогерентные потери протокола в той или иной геометрии возбуждения. В частности, нами отмечена важная техническая деталь для практической реализации протокола, дающая возможность радикально снизить некогерентные потери, связанные с рассеянием управляющего излучения на промежуточных состояниях атомов, при использовании линейных π -поляризаций возбуждающих лучей. Часть потерь удастся избежать за счет того, что при возбуждении двухфотонного перехода π -поляризациями в нем будет задействовано лишь одно промежуточное состояние. Как следствие, такой базовый параметр квантово-перепутанного состояния на выходе логического вентиля CZ, как достоверность будет улучшен по сравнению со схемой возбуждения в круговых поляризациях. Сравнимые нами геометрии возбуждения изображены на рис. 1 и 2.

Проводя моделирование, мы фокусируемся на перепутывающем протоколе, изначально предложенном в работе [13], тогда как более современные модификации протокола CZ, основанного на эффекте ридберговской блокады, предлагают ряд средств для удобства отдельных аспектов его технической реализации, обобщения на большее количество перепутываемых кубитов, а также устойчивости к неко-

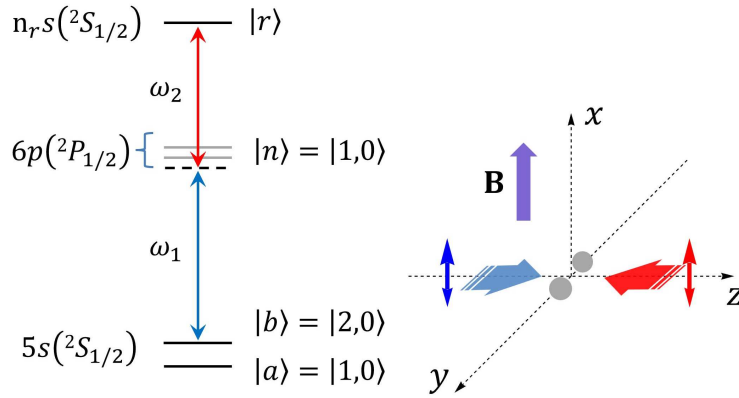


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но в случае возбуждения линейными π -поляризациями. Мы предполагаем, что ось квантования, задаваемая ориентацией внешнего магнитного поля \mathbf{B} , должна быть ориентирована в плоскости, ортогональной оси ловушек z , что отмечено стрелкой фиолетового цвета

торым шумам [16–18]. Тем не менее основные источники ошибок, а также сами физические механизмы, лежащие в основе процессов возбуждения атомов и их взаимодействия, сохраняются без качественных изменений. Таким образом, можно ожидать, что основные полученные нами результаты могут быть использованы также для оценки эффективности различных разрабатываемых сегодня перепутывающих протоколов.

Нами предполагается, что на контрольный атом, обозначаемый как A , последовательно действует два резонансных двухфотонных π -импульса, в паузе между которыми атом-мишень, обозначаемый как B , облучается аналогичным 2π -импульсом. Воздействие последнего может быть заблокировано эффектом ридберговской блокады в том случае, если оба атома изначально находились в спиновом состоянии $|b\rangle$. В идеальном случае матрица плотности двухатомной системы трансформируется под действием диагонального унитарного оператора эволюции $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$, что с точностью до фазового множителя соответствует логической операции CZ. Параметр достоверности F , характеризующий качество перепутывания в реалистичных условиях, определяется как проекция полученной матрицы плотности на матрицу плотности «идеального» состояния: $F = \langle \Psi | \hat{\rho} | \Psi \rangle_{AB}$.

Эффективный гамильтониан, описывающий динамический процесс связывания состояния кубита $|b\rangle$ с ридберговским состоянием $|r\rangle$, может быть записан с использованием базиса в импульсном пространстве $\{|r, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{q}\}; |b, \mathbf{p}\rangle\}$ следующим образом:

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{p} + \hbar\mathbf{q})^2}{2m} - \hbar\Delta & -\frac{\hbar\Omega_{eff}}{2} \\ -\frac{\hbar\Omega_{eff}^*}{2} & \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\hbar\mathbf{q} = \hbar\mathbf{k}_1 + \hbar\mathbf{k}_2$ — импульс отдачи, сообщаемый

возбуждаемому в ридберговское состояние атому управляющими импульсами с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , Ω_{eff} — эффективная частота Раби двухфотонного процесса. Двухфотонная отстройка $\Delta = \omega_1 + \omega_2 - \omega_{rb} - \Delta_{LS}$ учитывает смещение соответствующих атомных состояний на величину световых сдвигов $\Delta_{LS} = \Delta_r - \Delta_b$ под действием управляющих полей. В нее также может быть включен ридберговский сдвиг при моделировании эффекта блокады с учетом его конечности, например, на этапе действия 2π -импульса на атом B . Отметим, что указанные величины определены в точке фокусировки управляющих лучей, принимаемой за начало отсчета $\mathbf{r} = \mathbf{0}$:

$$\begin{aligned} \Omega_{eff} &= \Omega_{eff}(\mathbf{0}) = -\frac{1}{2} \sum_n \frac{\Omega_{rn}^{(2)} \Omega_{nb}^{(1)}}{\Delta_n}, \\ \Delta_r &= \Delta_r(\mathbf{0}) = \frac{1}{4} \sum_n \frac{|\Omega_{rn}^{(2)}|^2}{\Delta_n}, \\ \Delta_b &= \Delta_b(\mathbf{0}) = \frac{1}{4} \sum_n \frac{|\Omega_{nb}^{(1)}|^2}{\Delta_n}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\Delta_n \simeq -\omega_2 + \omega_{rn} \approx \omega_1 - \omega_{nb}$ — отстройка от промежуточных состояний $|n\rangle$, принимаемая нами приблизительно равной -3 ГГц, а $\Omega_{nb}^{(1)}$ и $\Omega_{rn}^{(2)}$ определяют частоты Раби управляющих мод относительно тех или иных разрешенных переходов через промежуточные состояния $|n\rangle$. Полезным также оказывается ввести амплитуды управляющих полей \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 и приведенные частоты Раби,

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= 2|\langle J_n || d || J_0 \rangle| \mathcal{E}_1, \\ \Omega^{(2)} &= 2|\langle J_r || d || J_n \rangle| \mathcal{E}_2, \end{aligned} \quad (3)$$

определенные относительно приведенных матричных элементов соответствующих переходов, где J_0 ,

J_n, J_r — полные (спиновые и орбитальные) угловые моменты электрона в основном, промежуточном и ридберговском состояниях атома соответственно.

Наконец, остаточное движение атома в про-

странственно-неоднородном поле управляющих лучей может быть описано с помощью следующей поправки к эффективному гамильтониану, записанной также в импульсном представлении:

$$\hat{V} = \begin{bmatrix} \hbar\Delta_r(\mathbf{0}) \left\{ \frac{\hbar^2}{z_{R2}^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{2\hbar^2}{w_{02}^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \Delta_{\perp} + \dots \right\} & -\frac{\hbar\Omega_{eff}}{2} \left\{ \frac{2\hbar}{z_*} \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\hbar^2}{z_*^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{2\hbar^2}{w_*^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \Delta_{\perp} + \dots \right\} \\ -\frac{\hbar\Omega_{eff}^*}{2} \left\{ -\frac{2\hbar}{z_*} \frac{\partial}{\partial p_z} + \frac{\hbar^2}{z_*^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{2\hbar^2}{w_*^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \Delta_{\perp} + \dots \right\} & \hbar\Delta_b(\mathbf{0}) \left\{ \frac{\hbar^2}{z_{R1}^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} + \frac{2\hbar^2}{w_{01}^2} \frac{\partial^2}{\partial p_z^2} \Delta_{\perp} + \dots \right\} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Здесь Δ_{\perp} — поперечный оператор Лапласа, w_{01}, w_{02} — перетяжки управляющих пучков в точке фокусировки, $z_{R1,2} = \pi w_{01,2}^2 / \lambda_{1,2}$ — соответствующие длины Рэлея, $\lambda_{1,2}$ — длины волн и для краткости введены следующие параметры:

$$\begin{aligned} \frac{2}{w_*^2} &= \frac{1}{w_{01}^2} + \frac{1}{w_{02}^2}, \\ \frac{2}{z_*} &= \frac{1}{z_{R1}} + \frac{1}{z_{R2}}, \\ \frac{2}{z_*^2} &\equiv \frac{1}{z_{R1}^2} + \frac{1}{z_{R2}^2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где знак «степени» у z_*^2 носит символический характер. Выражение поправки получено нами в результате разложения гауссовых профилей амплитуд вблизи точки фокусировки. В рамках предположения о бесконечном профиле волнового фронта управляющих полей ее вклад в динамику атомов будет пренебрежимо мал.

В проводимом нами расчете динамическая часть задачи, определяемая полным гамильтонианом $\hat{H} + \hat{V}$, в соответствии с соотношениями (1) и (2) может быть диагонализирована и решена численным образом при переходе к представлению чисел заполнения, определяющих колебательные состояния атомных осцилляторов в оптических микроловушках, которые выключаются на период выполнения перепутывающей операции и включаются вновь по ее завершении. Таким образом, могут быть найдены «одночастичные» операторы эволюции, определяющие динамику как спиновых, так и поступательных степеней свободы из атомов A и B под действием π - и 2π -импульсов управляющего излучения. Их последовательное действие на вектор начального состояния системы с последующим взятием следа по колебательным степеням свободы позволяет определить результирующую матрицу плотности двухатомной системы. Учет некогерентных эффектов: конечности времени жизни ридберговского состояния, а также спонтанного рассеяния на

промежуточных состояниях, проводится методом теории возмущений, как это описано в нашей предыдущей работе [15].

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Результаты проведенного моделирования представлены на рис. 3 и 4. Достоверность приготовления перепутанного состояния протоколом CZ была рассчитана как функция длительности π -импульса (рис. 3) при различных температурах продольного движения (поперечные степени свободы предполагаются охлажденными до основного колебательно-го состояния), а также для двух рассматриваемых схем возбуждения: с помощью управляющих полей с циркулярными (штриховые кривые) и линейными (сплошные кривые) поляризациями. Из представленных результатов расчета видно, что оптималь-

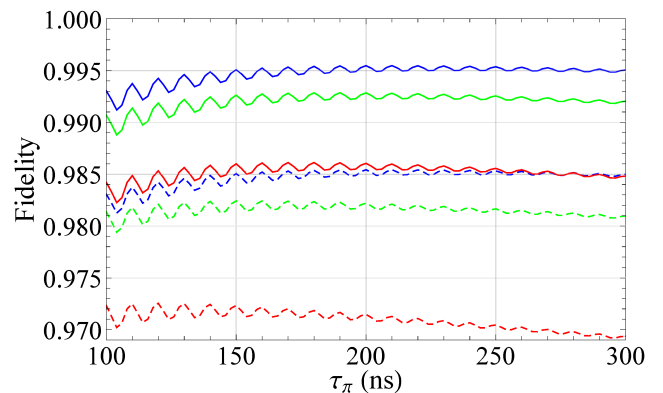


Рис. 3. Достоверность перепутанного состояния, приготовленного с помощью протокола CZ, инициируемого схемой возбуждения с круговыми (штриховые линии) или линейными (сплошные линии) поляризациями. Степени свободы поперечного движения атомов считаются «замороженными», однако продольное движение предполагается параметризованным различными величинами температуры $T = 0$ мкК (синие кривые), $T = 5$ мкК (зеленые), $T = 10$ мкК (красные). Достоверность рассматривается как функция длительности π -импульса

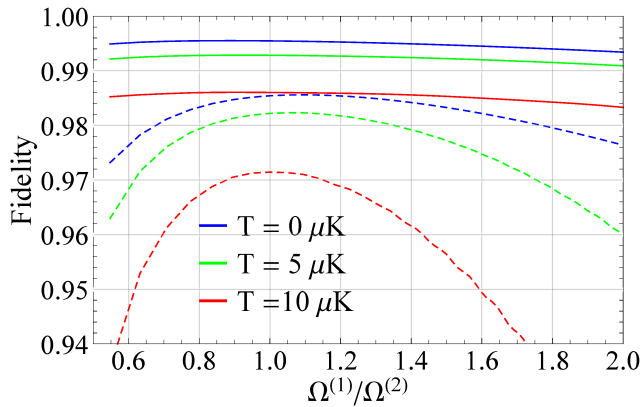


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для достоверности, рассматриваемой как функция отношения частот Раби управляющих полей относительно приведенных матричных элементов соответствующих переходов

ной длительностью при температуре 5 мкК является $\tau_\pi \sim 200$ нс. Данный результат превышает ранее полученное нами значение ~ 150 нс [15], что обусловлено использованием в качестве промежуточного состояния $6p(^2P_{1/2})$, имеющего в разы большее время жизни, чем состояние $5p(^2P_{1/2})$, которое рассматривалось нами ранее. Для более коротких сигналов достоверность протокола снижается за счет эффекта утечки блокады. Более длительное выполнение протокола связано с более высоким вкладом некогерентных потерь. Наблюдаемые осцилляции связаны с зависимостью вероятности заселения дважды возбужденного ридберговского состояния от длительности воздействия управляющими полями.

Кроме того, нами проанализировано то, как достоверность протокола CZ зависит от соотношения амплитуд управляющих полей. На рис. 4 показана достоверность как функция отношения частот Раби «синей» $\Omega^{(1)}$ и «красной» $\Omega^{(2)}$ мод относительно приведенных матричных элементов соответствующих переходов, см. (3). Видно, что схема возбуждения линейными поляризациями (сплошные кривые) является менее чувствительной к рассматриваемому параметру, чем схема возбуждения с круговыми поляризациями (штриховые кривые). Для обеих схем возбуждения наблюдается максимум достоверности при $\Omega^{(1)}/\Omega^{(2)} \sim 1$, смещающийся при разных температурах вследствие эффекта остаточного движения атомов в пространственно-неоднородных полях управляющих пучков. Небольшие различия в положениях максимумов для разных схем возбуждения обусловлены участием в них разных дипольных переходов, а также тем, что в случае линейных поляризаций в схеме переходов участвует только одно промежуточное состояние.

Таблица. Вклад различных механизмов в ошибки протокола

Источники ошибок	$1 - \mathcal{F}$	
	$\sigma_+\sigma_+$	$\pi\pi$
Некогерентное рассеяние	0.0114	0.0014
Распад состояния $ r\rangle$	0.0021	0.0021
Утечка блокады	0.0012	0.0012
Эффект отдачи	0.0004	0.0004
Неоднородность пучков	0.0044	0.0025

В таблице нами сведены ошибки выполнения перепутывающей операции при температуре $T = 5$ мкК, ширине перетяжки пучков $w_{01} = w_{02} = 1.5$ мкм, блокадном сдвиге $2\pi \cdot 50$ МГц и для π -импульса длительностью 200 нс, демонстрирующие относительный вклад различных механизмов, обуславливающих неидеальность протокола. Отклонения от единицы для достоверности оценены для двух рассматриваемых геометрий. Важно, однако, отметить, что приведенные в таблице значения носят лишь качественный характер и позволяют оценить только порядок величины ошибок, являющихся следствием того или иного механизма. Суммарные значения приведенных в таблице величин, вообще говоря, отличаются от значений в соответствующих точках на графиках рис. 3 и 4, где нами приводятся результаты полного моделирования протокола с одновременно действующими и потенциально коррелирующими между собой механизмами ошибок.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что построенная нами модель может быть использована для симуляции таких глобальных характеристик двухкубитных вентилей, как матрица истинности и матрица процесса. Полное квантовое томографирование двухкубитной операции предполагает расчет конечной матрицы плотности двухкубитной системы для 16 различных начальных состояний, см. [15].

Из проведенных симуляций видно, что даже использование рассмотренного нами базового протокола перепутывания позволяет достичь достоверности операции CZ на уровне порядка 99.5% при использовании оптимальной геометрии возбуждения с π -поляризациями управляющих полей, глубокого охлаждения атомов, а также оптимизации по параметрам частот Раби и длительности протокола. Вместе с тем создание универсального квантового вычислителя, позволяющего решать математи-

ческие задачи, представляющие практический интерес, требует более высоких значений параметра достоверности. Однако из приведенных нами в таблице результатов видно, что достигнутые показатели достоверности могут быть дополнительно улучшены. Так, негативное влияние пространственной неоднородности пучков может быть снижено оптимизацией их формы. Отбор задействованных в протоколе ридберговских состояний может снизить эффект утечки, а также влияние некогерентных эффектов. Некоторый ресурс для уменьшения вероятности неупругого рассеяния на промежуточных состояниях предоставляется варьированием отстройки управляющих полей, а также возможностью выбора состояний с большим временем жизни в качестве промежуточных. Безусловный интерес также представляет использование усовершенствованных вариантов перепутывающих протоколов, таких как предложенный в работе [16] и позволяющий сократить время реализации вентиля CZ, а также частично компенсировать эффект неидеальности ридберговской блокады за счет настройки двухфотонной отстройки [19]. Другим перспективным способом повысить эффективность перепутывающих операций является надлежащая модификация формы управляющих импульсов средствами оптимального управления квантовомеханическими процессами [20, 21].

Финансирование. Работа поддержана Российским научным фондом (грант № 18-72-10039), а также госкорпорацией «Росатом» в рамках Дорожной карты «Квантовые вычисления» (договор № 868-1.3-15/15-2021 от 5.10.2021 и договор № P2154 от 24.11.2021).

ЛИТЕРАТУРА

1. D. Bluvstein, H. Levine, G. Semeghini, T. T. Wang, S. Ebadi, M. Kalinowski, A. Keesling, N. Maskara, H. Pichler, M. Greiner, V. Vuletić, and M. D. Lukin, *Nature* **604**, 451 (2022).
2. T.-Y. Wu, A. Kumar, F. Giraldo, and D. S. Weiss, *Nature Phys.* **15**, 6 (2019).
3. T. M. Graham, M. Kwon, B. Grinkemeyer, Z. Marra, X. Jiang, M. T. Lichtman, Y. Sun, M. Ebert, and M. Saffman, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 230501 (2019).
4. P. Scholl, M. Schuler, H. J. Williams, A. A. Eberhart, D. Barredo, K.-N. Shymik, V. Lienhard, L.-P. Henry, T. C. Lang, T. Lahaye, A. M. Lauchli, and A. Browaeys, *Nature* **595**, 233 (2021).
5. L. V. Gerasimov, R. R. Yusupov, I. B. Bobrov, D. Shchepanovich, E. V. Kovlakov, S. S. Straupe, S. P. Kulik, and D. V. Kupriyanov, *Phys. Rev. A* **103**, 062426 (2021).
6. M. Saffman, *J. Phys. B: Atom. Mol. Opt. Phys.* **49**, 202001 (2016).
7. L. Henriot, L. Beguin, A. Signoles, T. Lahaye, A. Browaeys, G.-O. Reymond, and C. Jurczak, *Quantum* **4**, 327 (2020).
8. X. Wu, X. Liang, Y. Tian, F. Yang, C. Chen, Y.-C. Liu, M. K. Tey, and L. You, *Chinese Phys. B* **30**, 020305 (2021).
9. C. Sheng, X. He, P. Xu, R. Guo, K. Wang, Z. Xiong, M. Liu, J. Wang, and M. Zhan, *Phys. Rev. Lett.* **121**, 240501 (2018).
10. G. K. Brennen, C. M. Caves, P. S. Jessen, and I. H. Deutsch, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1060 (1999).
11. D. Jaksch, H.-J. Briegel, J. I. Cirac, C. W. Gardiner, and P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 1975 (1999).
12. L. You and M. S. Chapman, *Phys. Rev. A* **62**, 052302 (2000).
13. D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2208 (2000).
14. X.-F. Shi, *Quant. Sci. Technol.* **7**, 023002 (2022).
15. L. V. Gerasimov, R. R. Yusupov, A. D. Moiseevsky, I. Vybornyi, K. S. Tikhonov, S. P. Kulik, S. S. Straupe, C. I. Sukenik, and D. V. Kupriyanov, *Phys. Rev. A* **106**, 042410 (2022).
16. H. Levine, A. Keesling, G. Semeghini, A. Omran, T. T. Wang, S. Ebadi, H. Bernien, M. Greiner, V. Vuletić, H. Pichler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 170503 (2019).
17. M. Saffman, I. I. Beterov, A. Dalal, E. J. Pérez, and B. C. Sanders, *Phys. Rev. A* **101**, 062309 (2020).
18. I. I. Beterov, I. N. Ashkarin, E. A. Yakshina, D. B. Tretyakov, V. M. Entin, I. I. Ryabtsev, P. Cheinet, P. Pillet, and M. Saffman, *Phys. Rev. A* **98**, 042704 (2018).
19. I. Vybornyi, L. Gerasimov, D. Kupriyanov, S. Straupe, and K. Tikhonov, arXiv:2206.12171 [quant-ph] (2022).
20. А. Г. Бутковский, Ю. И. Самойленко, *Управление квантовомеханическими процессами*, Наука, Москва (1984).
21. T. H. Chang, T. N. Wang, H. H. Jen, and Y. C. Chen, arXiv:2303.16395 [quant-ph] (2023).