

# ПЕРЕХОДЫ ЛИФШИЦА И УГЛОВЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОВОДИМОСТИ В МЕТАЛЛАХ СО СЛОЖНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ ФЕРМИ

А.Я. Мальцев\*

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук  
119991, Москва, Россия

Поступила в редакцию 15 июня 2023 г.,  
после переработки 15 июня 2023 г.  
Принята к публикации 24 июня 2023 г.

Мы рассматриваем топологические переходы Лифшица и соответствующие им изменения гальваномагнитных свойств металла с точки зрения общей классификации открытых электронных траекторий, возникающих в магнитном поле на поверхностях Ферми произвольной сложности. Построение такой классификации составляет содержание задачи Новикова и основано на разделении незамкнутых электронных траекторий на топологически регулярные и хаотические траектории. Описание устойчивых топологически регулярных траекторий составляет при этом основу полной классификации незамкнутых траекторий на произвольных поверхностях Ферми и связано с особыми топологическими структурами на этих поверхностях. Используя эту классификацию, мы описываем здесь отличительные особенности изменений картины электронных траекторий при переходах Лифшица, а также изменений поведения проводимости в присутствии сильного магнитного поля. Как оказывается, использование такого подхода позволяет дать описание не только изменений, связанных с устойчивыми электронными траекториями, но и изменений общей картины диаграммы проводимости в сильных магнитных полях.

DOI: 10.31857/S0044451023110135

EDN: PKGFU

а именно, изменение топологии поверхности Ферми при прохождении критических точек дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  (см. рис. 1).

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы постараемся описать наиболее общую связь переходов Лифшица (см. [1, 2]), ведущих к изменению топологии поверхности Ферми, с угловыми диаграммами, описывающими поведение магнитопроводимости металла в сильных магнитных полях. Надо сказать, что в настоящее время топологическими переходами Лифшица часто называют весьма широкий круг явлений, связанных с топологическими свойствами поверхности Ферми и их изменениями, и само изучение многообразия таких явлений составляет интереснейшую и быстро развивающуюся область физики конденсированного состояния (см., например, [3, 4]).

Мы здесь, однако, будем рассматривать наиболее классическое определение переходов Лифшица [1],

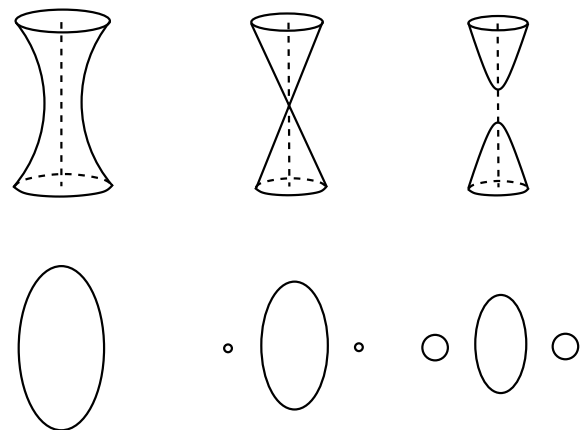


Рис. 1. Перестройка поверхности Ферми и появление новых компонент при прохождении критических точек соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  [1]

\* E-mail: maltsev@itp.ac.ru

Как хорошо известно, дисперсионное соотношение  $\epsilon(\mathbf{p})$  можно рассматривать или как периодическую функцию в пространстве квазиимпульсов  $\mathbb{R}^3$ , или как гладкую функцию на трехмерном торе  $\mathbb{T}^3$ , получаемом из  $\mathbb{R}^3$  факторизацией по векторам обратной решетки. Сингулярные точки функции  $\epsilon(\mathbf{p})$  определяются условием  $\nabla\epsilon(\mathbf{p}) = 0$ , а соответствующие им уровни энергии, как известно, отвечают появлению особенностей Ван Хова в электронной плотности состояний.

К сингулярностям функции  $\epsilon(\mathbf{p})$  относятся точки ее локальных минимумов и максимумов, а также седловые особые точки (в предположении, что все особые точки  $\epsilon(\mathbf{p})$  невырождены). Седловые точки функции в трехмерном пространстве, как известно, могут иметь индекс «1» или «2» в зависимости от того, представимо ли приращение функции вблизи этой точки в виде

$$d\epsilon(\mathbf{p}) = a^2 dp_1^2 + b^2 dp_2^2 - c^2 dp_3^2$$

или

$$d\epsilon(\mathbf{p}) = a^2 dp_1^2 - b^2 dp_2^2 - c^2 dp_3^2$$

в некоторой локальной евклидовой системе координат. Как хорошо известно из теории Морса, количество седловых особых точек обоих типов у функции на трехмерном торе всегда не меньше трех. В действительности, для реальных дисперсионных законов оно часто бывает больше, в частности, всякий раз, когда возникают поверхности Ферми рода больше 3. Здесь нам будут интересны именно седловые особые точки соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ .

Как было показано в работе [1], прохождение уровня Ферми через критические точки  $\epsilon(\mathbf{p})$  при определенном воздействии на образец (например, сильном внешнем давлении) приводит к особенностям в термодинамических величинах электронного газа в кристалле (переходам Лифшица), а также возможным резким изменениям в поведении магнитопроводимости в сильных магнитных полях. Последнее обстоятельство связано при этом с возможным существенным изменением геометрии траекторий системы

$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}_{\text{gr}}(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}] = \frac{e}{c} [\nabla\epsilon(\mathbf{p}) \times \mathbf{B}], \quad (1)$$

описывающей квазиклассическую динамику электронов во внешнем магнитном поле, на поверхности Ферми. Главным эффектом является при этом резкое изменение поведения магнитопроводимости благодаря появлению (или исчезновению) открытых траекторий системы (1) при топологических перестройках поверхности Ферми.

Важнейшая роль появления открытых траекторий системы (1) на поверхности Ферми при описании проводимости металлов в сильных магнитных полях была также впервые выявлена школой И.М. Лифшица (см. [2, 5–7]). При этом, поскольку траектории системы (1) задаются пересечениями поверхностей  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$  плоскостями, ортогональными магнитному полю, геометрия таких траекторий существенным образом определяется геометрией и топологией поверхности Ферми. В частности, огромное значение имеет вопрос, является ли поверхность Ферми ограниченной, или неограниченной в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

При этом, как было показано в работе [5], вклады замкнутых и открытых периодических траекторий в тензор проводимости существенно отличаются в пределе  $\omega_B\tau \rightarrow \infty$  (т.е. в пределе сильных магнитных полей). В частности, при наличии лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми проводимость в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , убывает во всех направлениях в указанном пределе. Асимптотическое поведение полного тензора проводимости может быть при этом представлено в виде

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & * \end{pmatrix} \quad (2)$$

( $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ ).

В то же время вклад открытых периодических траекторий в тензор проводимости является сильно анизотропным в плоскости, ортогональной  $\mathbf{B}$ , и может быть в главном порядке представлен в виде

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \\ (\omega_B\tau)^{-1} & * & * \end{pmatrix} \quad (3)$$

( $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ ).

В формулах (2), (3), как и везде далее, предполагается, что ось  $z$  направлена вдоль магнитного поля. В соотношении (3), кроме того, предполагается также, что направление оси  $x$  совпадает со средним направлением открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Знак « $\simeq$ » в обеих формулах означает асимптотическое поведение, т.е. каждая из компонент содержит в действительности еще некоторый безразмерный множитель порядка 1. Величина  $\omega_B$  играет роль электронной циклотронной частоты в металле, в то время как величина  $\tau$  представляет время свободного пробега электронов. Величина  $m^*$  имеет смысл эффективной массы электрона в

кристалле. Соотношение  $\omega_B\tau \gg 1$ , как также хорошо известно, требует использования достаточно чистых монокристаллических образцов при очень низких температурах ( $T \leq 1$  К) и достаточно сильных магнитных полей ( $B \geq 1$  Тл).

Величина  $n$  обычно играет роль концентрации носителей тока в металле. В формулах (2), (3), однако, она пропорциональна также мере соответствующих траекторий (замкнутых или периодических) на поверхности Ферми. Последнее обстоятельство особенно важно в рассматриваемой нами ситуации, поскольку мера открытых траекторий может определяться близостью к точке перехода Лифшица  $\epsilon_0$ . Именно эта ситуация имеет место, например, в работе [1], где рассматривается появление и исчезновение периодических открытых траекторий на поверхности типа «гофрированного цилиндра». Для главного члена в асимптотическом поведении тензора проводимости при наличии открытых траекторий на поверхности Ферми в этой ситуации в работе [1] была предложена формула

$$\sigma^{kl} = \begin{pmatrix} \gamma^2 a_{xx} & \gamma a_{xy} & \gamma a_{xz} \\ \gamma a_{yx} & \gamma^2 a_{yy} + \beta^{1/2} b_{yy} & \gamma a_{yz} + \beta^{1/2} b_{yz} \\ \gamma a_{zx} & \gamma a_{zy} + \beta^{1/2} b_{zy} & a_{zz} \end{pmatrix} \quad (4)$$

( $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ ), где  $\gamma = (\omega_B\tau)^{-1}$ ,  $\beta = |(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F|$ , величины  $a_{kl}$  представляют некоторые константы, а величины  $b_{kl}$  содержат слабую (логарифмическую) зависимость от  $\beta$ .

Как можно видеть, формула (4) позволяет не только наблюдать переход Лифшица в описываемой ситуации, но и определить близость к этому переходу при изменении параметров воздействия на образец.

В общей ситуации поверхность Ферми представляет собой произвольную 3-периодическую поверхность в  $\mathbf{p}$ -пространстве (рис. 2) и задача описания траекторий системы (1) является довольно сложной. Впервые задача полной классификации открытых траекторий системы (1) была поставлена Новиковым в работе [8] и затем интенсивно исследовалась в его топологической школе (см. [9–16]). В результате исследования задачи Новикова был получен целый ряд глубоких топологических результатов, и к настоящему времени представлена полная классификация открытых траекторий системы (1) для произвольных периодических законов дисперсии  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Следствия из топологических теорем, полученных при исследовании задачи Новикова, привели также к описанию целого ряда физических эффектов, связанных с поведением открытых траекто-

рий (1) и, кроме того, позволили дать полную классификацию возможных асимптотических режимов поведения проводимости в сильных магнитных полях для металлов со сколь угодно сложными поверхностями Ферми (см., например, [17–22]).

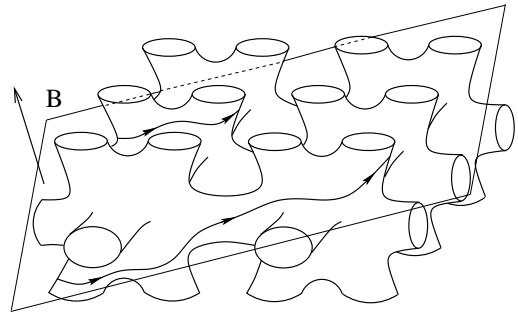


Рис. 2. Траектории системы (1) на периодической поверхности Ферми общего вида

Здесь нас будут интересовать изменения открытых траекторий системы (1) при переходах Лифшица, т.е. изменении топологии поверхности Ферми при прохождении особых точек дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Мы будем предполагать при этом, что поверхность Ферми имеет самый общий вид, а при описании траекторий пользоваться общей классификацией, полученной при исследовании задачи Новикова. Для описания ситуации мы будем пользоваться угловыми диаграммами, задающими тип траекторий системы (1) на поверхности Ферми в зависимости от направления магнитного поля. Угловая диаграмма, таким образом, представляет собой единичную сферу  $S^2$ , параметризующую направления  $\mathbf{B}$  и определяющую тип траекторий на поверхности Ферми для каждого направления. Поскольку тип траекторий системы (1) определяет асимптотическое поведение тензора проводимости в пределе сильных магнитных полей, такие диаграммы естественно также называть диаграммами проводимости (магнитопроводимости) для заданной поверхности Ферми. Нас, главным образом, будут интересовать здесь изменения таких диаграмм, сопровождающие переходы Лифшица. Экспериментальное наблюдение изменений (резких скачков) в таких диаграммах может в общем случае служить одним из инструментов изучения переходов Лифшица в металлах со сложными поверхностями Ферми.

Здесь мы представим общие закономерности изменений диаграмм проводимости при прохождении особенностей соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , основываясь на общей теории таких диаграмм, построенной при ис-

следовании задачи Новикова. В следующем разделе мы приведем общую классификацию диаграмм, отвечающих различным поверхностям Ферми, и опишем их связь с угловыми диаграммами для всего дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . В разд. 3 мы приведем описание типичных изменений на угловых диаграммах, отвечающих топологическим переходам различных типов на поверхностях Ферми произвольной сложности.

## 2. ОБЩИЕ ФАКТЫ ОБ УГЛОВЫХ ДИАГРАММАХ ПРОВОДИМОСТИ МЕТАЛЛОВ

Основой для классификации открытых траекторий системы (1) является описание ее устойчивых открытых траекторий. Здесь мы называем открытые траектории (1) устойчивыми, если они не исчезают и сохраняют свою глобальную геометрию при малых вариациях параметров задачи, в частности, малых вариациях уровня  $\epsilon_F$  и вращениях направления  $\mathbf{V}$ . Как следует из результатов работ [9, 10, 12] устойчивые открытые траектории системы (1) обладают следующими замечательными свойствами.

1) Каждая устойчивая открытая траектория системы (1) лежит в прямой полосе конечной ширины в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и проходит ее насквозь (рис. 3).

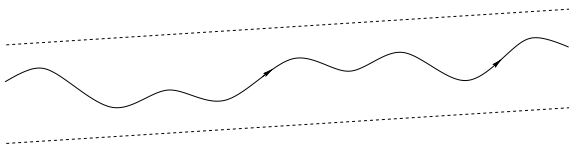


Рис. 3. Вид устойчивой открытой траектории системы (1) в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  (схематично)

2) Среднее направление всех устойчивых открытых траекторий (1) при заданном направлении магнитного поля задается пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и некоторой целочисленной (порожденной двумя векторами обратной решетки) плоскости  $\Gamma$ , направление которой неизменно при малых вариациях параметров задачи.

Свойство (1) устойчивых открытых траекторий проявляется непосредственно в поведении магнитопроводимости в сильных магнитных полях. А именно, здесь, как и в случае периодических открытых траекторий, наблюдается сильная анизотропия проводимости в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , а главный член в асимптотике тензора проводимости также

задается формулой (3). Для специальных направлений  $\mathbf{V}$  устойчивые открытые траектории (1) могут быть периодическими. В случае общего положения, однако, они являются квазипериодическими и не имеют периодов в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Направление максимального подавления проводимости принадлежит при этом соответствующей плоскости  $\Gamma$ , что делает ее экспериментально наблюдаемой [17, 19]. Целочисленная плоскость в  $\mathbf{p}$ -пространстве может быть также определена как плоскость, ортогональная некоторому целочисленному направлению исходной кристаллической решетки. Плоскость  $\Gamma$ , таким образом, может быть определена некоторой несократимой целочисленной тройкой  $(m^1, m^2, m^3)$ . Числа  $(m^1, m^2, m^3)$  были определены в работе [17] как топологические числа, наблюдаемые в проводимости нормальных металлов.

Каждое семейство устойчивых открытых траекторий задается некоторой областью (зоной устойчивости)  $\Omega$  на угловой диаграмме, отвечающей одним и тем же значениям  $(m^1, m^2, m^3)$ . В общем случае угловая диаграмма может содержать некоторое (конечное или бесконечное) число зон устойчивости  $\Omega_\alpha$ , отвечающих различным значениям  $(m_\alpha^1, m_\alpha^2, m_\alpha^3)$ . Наличие зон устойчивости и их расположение на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$  является важной составляющей угловой диаграммы проводимости металла в сильных магнитных полях.

Кроме устойчивых открытых траекторий системы (1) существуют также неустойчивые открытые траектории. К ним, прежде всего, могут относиться периодические траектории, рассмотренные выше. Периодические траектории являются, в некотором смысле, полуустойчивыми, а именно, они сохраняются при вращениях  $\mathbf{V}$ , ортогональных их среднему направлению, и разрушаются при всех других вращениях. Таким траекториям соответствуют одномерные дуги на угловой диаграмме, отмечающие наличие таких траекторий на поверхности Ферми при соответствующих направлениях  $\mathbf{V}$ . Совокупность соответствующих дуг на сфере  $\mathbb{S}^2$  также является важной частью диаграммы магнитопроводимости металла.

Периодические открытые траектории, однако, не являются единственным типом неустойчивых открытых траекторий системы (1). А именно, существуют открытые траектории системы (1) значительно более сложной геометрии, которые являются неустойчивыми как по отношению к малым вращениям направления  $\mathbf{V}$ , так и малым вариациям уровня Ферми  $\epsilon_F$  [11, 14, 15]. Такие траектории могут быть условно разделены на два основных типа, а

именно, траектории типа Царева и траектории типа Дынникова. Траектории типа Царева могут наблюдаться лишь при частично иррациональных направлениях  $\mathbf{V}$ , когда плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , содержит один (с точностью до пропорциональности) вектор обратной решетки. Напротив, траектории типа Дынникова могут возникать лишь для направлений  $\mathbf{V}$  полной иррациональности (плоскость, ортогональная  $\mathbf{V}$ , не содержит векторов обратной решетки).

Неустойчивые траектории обоих типов обладают довольно сложным поведением на поверхности Ферми, которая в этом случае сама должна обладать достаточной сложностью. При этом, однако, поведение траекторий типа Царева в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , существенно проще поведения траекторий типа Дынникова. А именно, траектории типа Царева обладают асимптотическим направлением, одним и тем же во всех плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , для заданного направления  $\mathbf{V}$ . Как следствие этого, вклад траекторий типа Царева в тензор проводимости также обладает сильной анизотропией в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и близок по форме к вкладу (3), хотя и отличается от него в некоторых деталях.

Траектории типа Дынникова обладают гораздо более сложным поведением в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , блуждая по ним довольно хаотическим образом (рис. 4). Среди особенностей вклада таких траекторий в тензор магнитопроводимости можно выделить подавление проводимости вдоль направления магнитного поля (см. [18]), а также появление дробных степеней параметра  $\omega_{B\tau}$  в асимптотиках компонент тензора в пределе  $\omega_{B\tau} \rightarrow \infty$  [18, 21]. Отметим здесь, что исследование появления и геометрических свойств траекторий типа Дынникова является активно развивающейся областью в настоящее время (см., например, [11, 13–15, 18, 20, 21, 23–41]).

Ввиду особой сложности геометрии траекторий типа Царева или Дынникова такие траектории принято называть хаотическими. Устойчивые открытые траектории системы (1), а также периодические траектории принято называть топологически регулярными.

Появление неустойчивых траекторий типа Царева или Дынникова на поверхности Ферми связано с особенно сложными угловыми диаграммами, которые мы опишем ниже. Расположение соответствующих направлений  $\mathbf{V}$  на таких диаграммах является, возможно, наиболее интересной информацией о поверхности Ферми.

Перед описанием типов диаграмм, отвечающих фиксированным поверхностям Ферми, удобно дать

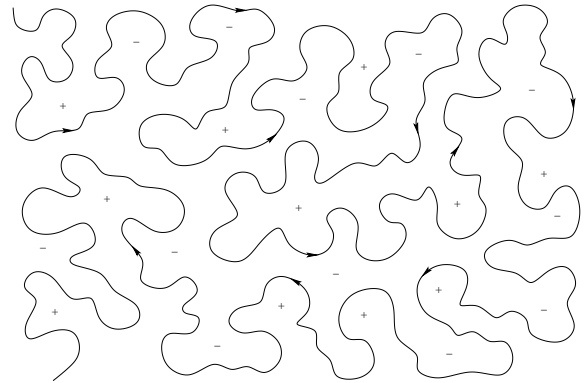


Рис. 4. Вид хаотической траектории Дынникова в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$  (схематично)

описание угловых диаграмм, отвечающих всему дисперсионному закону  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Такие диаграммы были введены в работе [16] и основаны на важном свойстве открытых траекторий системы (1), а именно, тип открытых траекторий системы (1) при заданном направлении  $\mathbf{V}$  одинаков для всех уровней энергии  $\epsilon(\mathbf{p}) = \text{const}$ , на которых они появляются. Более того, ситуация в общем случае может быть описана следующим образом [16].

Рассмотрим гладкую 3-периодическую функцию  $\epsilon(\mathbf{p})$ , значения которой лежат в интервале  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$ . Рассмотрим некоторое фиксированное направление  $\mathbf{V}$  и соответствующую ему систему (1). Будем считать для простоты, что направление  $\mathbf{V}$  не является рациональным. Тогда можно сформулировать следующие утверждения.

1) Открытые траектории системы (1) возникают или в некотором замкнутом интервале энергий

$$\epsilon_{\min} < \epsilon_1(\mathbf{V}) \leq \epsilon(\mathbf{p}) \leq \epsilon_2(\mathbf{V}) < \epsilon_{\max}$$

или лишь на одном уровне энергии  $\epsilon_0 = \epsilon_1(\mathbf{V}) = \epsilon_2(\mathbf{V})$ .

2) В случае  $\epsilon_1(\mathbf{V}) < \epsilon_2(\mathbf{V})$  все неособые открытые траектории в интервале  $[\epsilon_1(\mathbf{V}), \epsilon_2(\mathbf{V})]$  лежат в прямых полосах конечной ширины в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , и проходят их насквозь (см. рис. 3). Все они имеют при этом одно и то же среднее направление, задаваемое пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , с некоторой целочисленной плоскостью  $\Gamma$  в  $\mathbf{p}$ -пространстве.

3) Для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения величины  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$  совпадают со значениями некоторых непрерывных функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ , определенных всюду на  $\mathbb{S}^2$ . Однако для направлений  $\mathbf{V}$ , отвечающих появлению периодических открытых тра-



екторий, значения  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$  имеют «скачки», при этом всегда имеют место неравенства

$$\epsilon_1(\mathbf{V}) \leq \tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) \leq \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}) \leq \epsilon_2(\mathbf{V}).$$

4) Свойство  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) < \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ , а также целочисленная плоскость  $\Gamma$  устойчивы относительно малых вращений направления  $\mathbf{V}$ , так что каждая из плоскостей  $\Gamma_\alpha$  отвечает определенной «зоне устойчивости»  $\hat{\Omega}_\alpha$  в пространстве направлений  $\mathbf{V}$ .

Согласно [16], картина распределения зон устойчивости для произвольного дисперсионного закона  $\epsilon(\mathbf{p})$  может отвечать лишь одной из двух ситуаций.

1) Вся единичная сфера является единственной зоной устойчивости  $\hat{\Omega}$ , отвечающей некоторой целочисленной плоскости  $\Gamma$ .

2) Угловая диаграмма содержит бесконечное число зон устойчивости, объединение которых всюду плотно на сфере  $S^2$  (см., например, рис. 5).

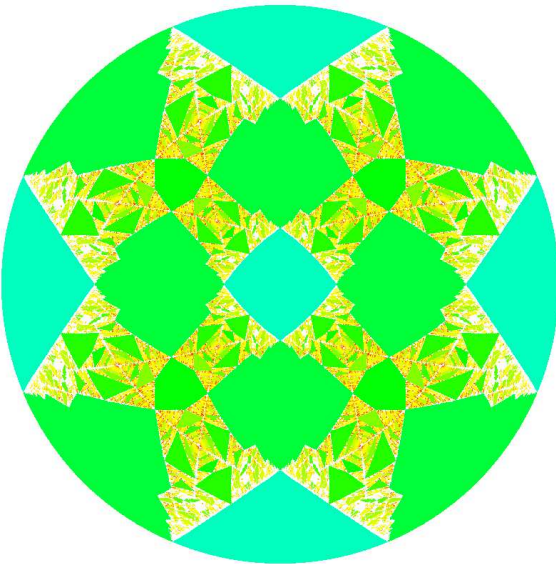


Рис. 5. Зоны устойчивости для дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p}) = \cos p_x \cos p_y + \cos p_y \cos p_z + \cos p_z \cos p_x$  [40]

Случай (1), как правило, наблюдается для дисперсионных соотношений довольно специального вида, близких к дисперсионным соотношениям в квазиодномерных проводниках. Для подавляющего большинства реальных дисперсионных соотношений, однако, имеет место случай (2). Мы будем называть здесь дисперсионные соотношения, отвечающие случаю (1), дисперсионными соотношениями с простой угловой диаграммой. Аналогично, дисперсионные соотношения, отвечающие случаю (2), мы будем называть соотношениями со сложной угловой

диаграммой. Здесь нам, в первую очередь, будут интересны дисперсионные соотношения со сложными угловыми диаграммами.

Дополнение  $M$  к объединению зон устойчивости представляет собой довольно сложное множество фрактального типа на сфере  $S^2$ . Согласно гипотезе Новикова [28], это множество имеет меру нуль и хаусдорфову размерность строго меньше 2. Первая часть гипотезы Новикова совсем недавно была доказана для дисперсионных соотношений, удовлетворяющих дополнительному условию  $\epsilon(-\mathbf{p}) = \epsilon(\mathbf{p})$  (И.А. Дынников, П. Хьюберт, П. Меркат и А.С. Скрипченко, в процессе публикации). Вторая часть гипотезы подтверждается серьезными численными исследованиями, но пока не доказана строго.

Точки множества  $M$  представляют собой точки накопления бесконечного числа уменьшающихся зон устойчивости. При этом множество  $M$  может содержать специальные рациональные направления  $\mathbf{V}$  (см. [42]), а также направления  $\mathbf{V}$ , отвечающие появлению траекторий типа Царева или Дынникова. Множество специальных рациональных направлений  $\mathbf{V}$ , однако, представляет собой лишь счетное подмножество множества  $M$ , так что «почти все» точки множества  $M$  представляют, в действительности «хаотические» направления указанных двух типов. Значения функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$  совпадают на множестве  $M$ , а также на границах всех зон  $\hat{\Omega}_\alpha$ .

Нетрудно видеть, что на фиксированной поверхности Ферми при заданном направлении  $\mathbf{V}$  возникают открытые траектории, только если уровень Ферми попадает в соответствующий интервал  $[\epsilon_1(\mathbf{V}), \epsilon_2(\mathbf{V})]$ . В частности, каждая зона устойчивости  $\Omega_\alpha$  на диаграмме проводимости является подобластью некоторой зоны  $\hat{\Omega}_\alpha$ , определенной для всего дисперсионного соотношения. Как правило, большая часть угловой диаграммы проводимости металла представляет при этом область, отвечающую наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Можно видеть также, что при определении зон  $\Omega_\alpha$ , а также направлений Царева и Дынникова для фиксированной поверхности Ферми, можно пользоваться функциями  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ , в то время как для определения направлений, отвечающих появлению неустойчивых периодических траекторий, необходимо знать функции  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$ . Последнее обстоятельство проявляется, в частности, в некотором отличии в форме зон  $\Omega_\alpha$  от зон  $\hat{\Omega}_\alpha$ . А именно, множество направлений  $\mathbf{V}$ , отвечающее появлению открытых траекторий, связанных с зоной  $\Omega_\alpha$ , несколько больше самой зоны на угловой диаграм-

ме и содержит также бесконечное множество отрезков, примыкающих к границе  $\Omega_\alpha$  и отвечающих появлению периодических траекторий на поверхности Ферми (рис. 6). Возникающие периодические траектории при этом можно считать устойчивыми для направлений  $\mathbf{V}$  внутри  $\Omega_\alpha$  и неустойчивыми на дополнительных сегментах.

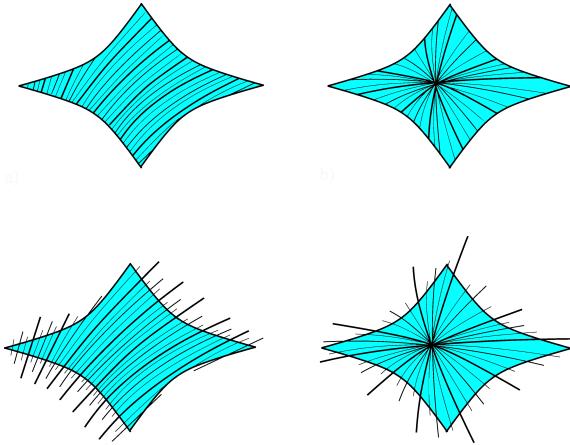


Рис. 6. Зоны  $\hat{\Omega}_\alpha$  (вверху) и зоны  $\Omega_\alpha$  (внизу) с примыкающими сегментами, отвечающими появлению неустойчивых периодических траекторий на поверхности Ферми (схематично, указаны также сети направлений  $\mathbf{V}$  внутри зон, отвечающие устойчивым периодическим траекториям)

Такое устройство зон  $\Omega_\alpha$  приводит, в действительности, к довольно сложному аналитическому поведению тензора проводимости вблизи их границ, что делает затруднительным определение формы этих зон в прямых измерениях проводимости (см., например, [43]). Вместе с тем, однако, существуют методы экспериментального определения точных математических границ зон  $\Omega_\alpha$ , что позволяет установить экспериментально их точную форму (см. [44]).

Зоны  $\Omega_\alpha$  представляют собой области с кусочно-гладкими границами на сфере (см., например, [16]). Кроме этого, нам неизвестны какие-либо ограничения на их форму. В частности, могут существовать несвязанные области устойчивости, отвечающие одним и тем же значениям  $(m^1, m^2, m^3)$ . Мы условимся здесь для простоты считать объединение таких областей одной несвязной зоной устойчивости на  $S^2$ . В этом смысле каждая область  $\Omega_\alpha$  и диаметрально противоположная ей образуют одну и ту же зону устойчивости. Кроме того, зоны устойчивости могут также быть неоднозначными (см., например, [42]). Последнее, однако, имеет место для весьма специфических поверхностей Ферми, представ-

ляющих собой специальные математические примеры. Для реальных дисперсионных законов мы будем здесь предполагать, что все зоны  $\Omega_\alpha$  являются односвязными областями с кусочно-гладкими границами на  $S^2$ .

Ниже мы приведем краткое описание различных типов угловых диаграмм проводимости в металлах, а также их изменений при изменении величины  $\epsilon_F$  в интервале  $[\epsilon_{\min}, \epsilon_{\max}]$  [45], которое нам понадобится в дальнейшем. Нам здесь будут прежде всего интересны диаграммы проводимости, отвечающие дисперсионным законам со сложными угловыми диаграммами, т.е. диаграммами, содержащими бесконечное число зон устойчивости  $\hat{\Omega}_\alpha$ .

Нетрудно видеть, что если значение  $\epsilon_F$  достаточно близко к значению  $\epsilon_{\min}$  или  $\epsilon_{\max}$ , поверхности Ферми представляют собой эллипсоиды малого размера, и открытые траектории системы (1) на них отсутствуют при любом направлении  $\mathbf{V}$ . Можно отметить также, что холловская проводимость имеет при этом электронный тип в первом случае и дырочный тип во втором. Соответствующие угловые диаграммы проводимости можно называть диаграммами нулевого типа и обозначать их символом  $0_-$  или  $0_+$  в зависимости от знака холловской проводимости. В общем случае, для фиксированного дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  можно выделить значения  $\epsilon_1^{A'}$  и  $\epsilon_2^{A'}$ , такие что угловым диаграммам типа  $0_-$  и  $0_+$  отвечают ситуации

$$\epsilon_F \in (\epsilon_{\min}, \epsilon_1^{A'}) \quad \text{и} \quad \epsilon_F \in (\epsilon_2^{A'}, \epsilon_{\max})$$

соответственно.

Для дисперсионных законов общего положения можно также выделить значения  $\epsilon_1^A$  и  $\epsilon_2^A$ , такие что ситуации

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^{A'}) \quad \text{и} \quad \epsilon_F \in (\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$$

соответствуют диаграммам проводимости, содержащим лишь одномерные дуги, отвечающие появлению неустойчивых периодических траекторий на поверхности Ферми. Диаграммы такого типа можно обозначать символами  $1_-$  и  $1_+$  в зависимости от типа холловской проводимости, наблюдаемой при направлениях  $\mathbf{V}$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми.

Интервал  $(\epsilon_1^A, \epsilon_2^A)$  отвечает диаграммам проводимости, содержащим зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$ . Можно сказать, что такие диаграммы обладают достаточным уровнем сложности, и именно они, главным образом, будут нам интересны здесь. Для дисперсионных законов общего положения, имеющих сложные

угловые диаграммы (с бесконечным числом зон  $\widehat{\Omega}_\alpha$ ), однако, этот интервал естественно разделить на три интервала (см. [45]):

$$\epsilon_1^A < \epsilon_1^B < \epsilon_2^B < \epsilon_2^A$$

Диаграммы проводимости, отвечающие ситуациям

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^A, \epsilon_1^B) \quad \text{и} \quad \epsilon_F \in (\epsilon_2^B, \epsilon_2^A),$$

можно назвать диаграммами типа  $A_-$  и  $A_+$  соответственно. Эти диаграммы отличаются тем, что во всех областях направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, холловская проводимость имеет, соответственно, электронный и дырочный тип.

Диаграммы проводимости, отвечающие ситуации

$$\epsilon_F \in (\epsilon_1^B, \epsilon_2^B),$$

можно назвать диаграммами типа  $B$ . Эти диаграммы отличаются тем, что в пространстве направлений  $\mathbf{B}$  (на единичной сфере  $\mathbb{S}^2$ ) среди областей, отвечающих наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми, имеются как области электронной холловской проводимости, так и области дырочной холловской проводимости.

В действительности, между диаграммами типа  $A$  и диаграммами типа  $B$  существуют еще два важных различия (см. [45]).

1) Диаграммы типа  $A$  общего положения содержат конечное число зон  $\Omega_\alpha$ , в то время как диаграммы типа  $B$  общего положения содержат бесконечное число зон устойчивости.

2) Диаграммы типа  $A$  общего положения не содержат направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих появлению траекторий Царева или Дынникова, в то время как диаграммы типа  $B$  общего положения содержат такие направления.

На рис. 7 (схематически) представлена возможная эволюция диаграммы проводимости в описываемой нами ситуации при изменении  $\epsilon_F$  от значения  $\epsilon_1^A$  до  $\epsilon_2^A$ .

Интервал  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  отличается также тем, что в нем появляются зоны устойчивости с более сложной границей, чем в интервалах  $(\epsilon_1^A, \epsilon_1^B)$  и  $(\epsilon_2^B, \epsilon_2^A)$ , а именно, здесь появляются зоны, часть границы которых примыкает к областям электронной холловской проводимости, а часть к областям дырочной холловской проводимости.

Отметим здесь также, что участки границ  $\Omega_\alpha$ , примыкающие к областям электронной холловской проводимости, определяются соотношением  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}) = \epsilon_F$ , а участки границ, примыкающие к

областям дырочной холловской проводимости, соотношением  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}) = \epsilon_F$ .

Приведенная выше картина отвечает дисперсионным законам общего положения с угловой диаграммой, содержащей бесконечное число зон  $\widehat{\Omega}_\alpha$ . Эта картина, в действительности, может иметь следующие вырождения.

1)  $\epsilon_1^{A'} = \epsilon_1^A$  или  $\epsilon_2^A = \epsilon_2^{A'}$ , так что соответствующий интервал  $(\epsilon_1^{A'}, \epsilon_1^A)$  или  $(\epsilon_2^A, \epsilon_2^{A'})$  стягивается в точку. В приведенной картине в этом случае отсутствуют диаграммы типа  $1_-$  или  $1_+$  и диаграммы типа  $0_-$  и  $A_-$  или  $A_+$  и  $0_+$  (или и те и другие) сразу переходят друг в друга. Такие вырождения нередко возникают для дисперсионных соотношений, обладающих достаточно высокой симметрией (например, кубической).

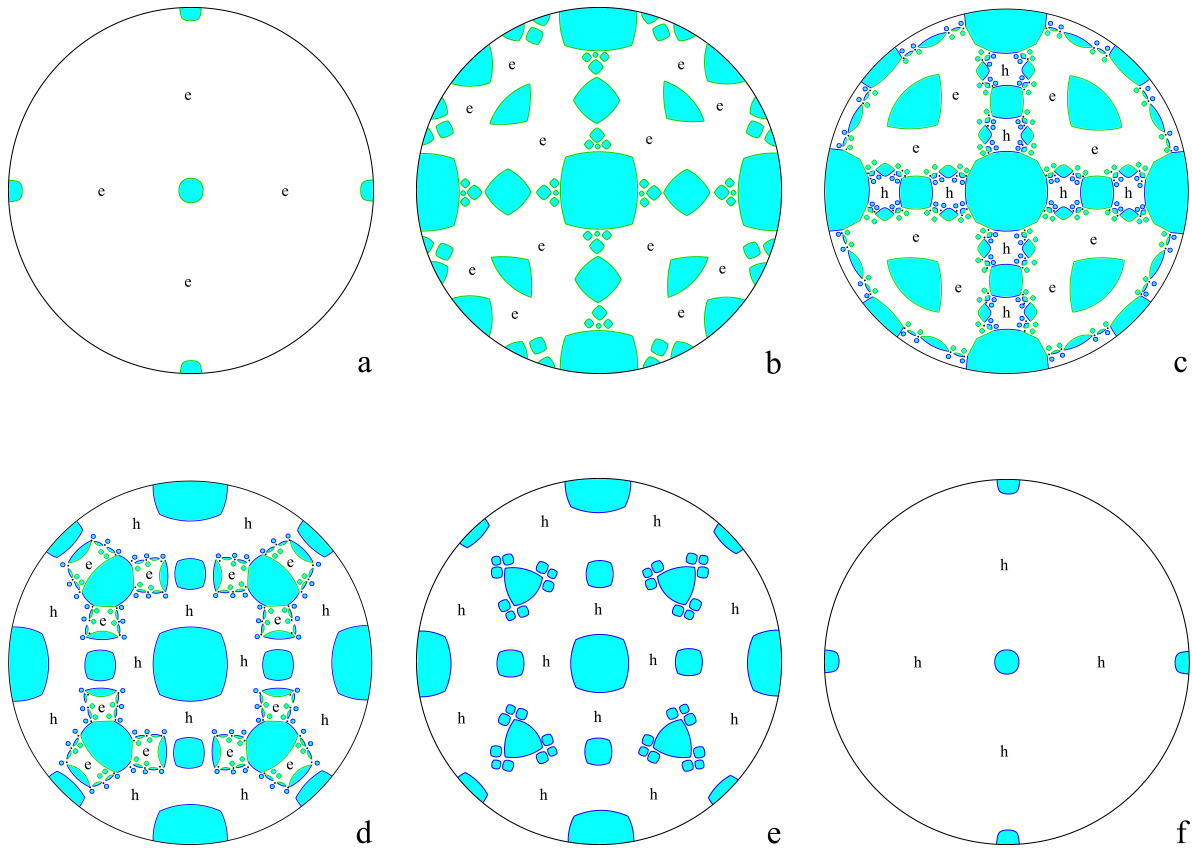
2) Вырождение  $\epsilon_1^B = \epsilon_2^B$ . В этом случае в приведенной картине отсутствуют диаграммы типа  $B$ , а диаграмма, возникающая для уровня  $\epsilon_1^B = \epsilon_2^B$ , совпадает с угловой диаграммой для всего дисперсионного закона. Соответствующие дисперсионные законы образуют весьма специальный класс (бесконечной коразмерности в пространстве периодических  $\epsilon(\mathbf{p})$ ), и мы не будем рассматривать их здесь. Подчеркнем здесь только, что мы в данном случае имеем в виду дисперсионные соотношения, диаграммы которых остаются сложными (содержат бесконечное число зон устойчивости), в том числе в точке вырождения. Кроме таких случаев, существуют также деформации дисперсионных соотношений, при которых интервал  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  бесконечно сужается, а соответствующие угловые диаграммы упрощаются и превращаются в диаграммы с одной зоной устойчивости в точке вырождения. Такие вырождения, в некотором смысле, отвечают границе между дисперсионными соотношениями двух описанных выше типов и наблюдаются в гораздо более общей ситуации.

Хотя нам прежде всего будут интересны здесь дисперсионные соотношения с бесконечным числом зон устойчивости, приведем здесь также типичную картину изменения диаграммы проводимости для соотношений, отвечающих наличию всего одной зоны  $\widehat{\Omega}$ . Как и ранее, мы будем предполагать здесь, что все зоны устойчивости являются односвязными, что соответствует реалистичным законам дисперсии, возникающим в реальных проводниках.

Как и в предыдущем случае, для дисперсионных законов общего положения здесь также можно ввести набор реперных точек

$$\epsilon_{\min} < \hat{\epsilon}_1^{A'} < \hat{\epsilon}_1^A < \hat{\epsilon}_1^B < \hat{\epsilon}_2^B < \hat{\epsilon}_2^A < \hat{\epsilon}_2^{A'} < \epsilon_{\max},$$





**Рис. 7.** Возможная эволюция диаграммы проводимости при изменении  $\epsilon_F$  от значения  $\epsilon_1^A$  до  $\epsilon_2^A$  и переходе через значения  $\epsilon_1^B$  и  $\epsilon_2^B$ . Схематически показаны зоны  $\Omega_\alpha$  и области электронной (e) и дырочной (h) холловской проводимости при наличии лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. Можно специально выделить диаграммы типа  $A_-$  (a и b), диаграммы типа B (c и d) и диаграммы типа  $A_+$  (e и f)

разделяющих интервалы с диаграммами различных типов.

Интервалы  $[\epsilon_{\min}, \hat{\epsilon}_1^{A'}]$  и  $(\hat{\epsilon}_2^{A'}, \epsilon_{\max}]$ , а также  $(\hat{\epsilon}_1^{A'}, \hat{\epsilon}_1^A)$  и  $(\hat{\epsilon}_2^A, \hat{\epsilon}_2^{A'})$ , как и ранее, отвечают здесь диаграммам типа  $0_-, 0_+, 1_-$  и  $1_+$  соответственно.

Интервалы  $(\hat{\epsilon}_1^A, \hat{\epsilon}_1^B)$  и  $(\hat{\epsilon}_2^B, \hat{\epsilon}_2^A)$  отвечают диаграммам  $A_-$  и  $A_+$  соответственно. Единственная особенность здесь состоит в том, что на таких диаграммах присутствует лишь одна зона устойчивости, отвечающая единственному набору  $(m^1, m^2, m^3)$ . Область, не принадлежащая зоне устойчивости, отвечает электронной холловской проводимости для диаграмм типа  $A_-$ , и дырочной для диаграмм типа  $A_+$ .

Диаграмму, возникающую в интервале  $(\hat{\epsilon}_1^B, \hat{\epsilon}_2^B)$ , мы назовем здесь диаграммой типа  $\hat{B}$ . Она содержит единственную зону устойчивости, покрывающую всю единичную сферу  $S^2$ .

Как и в предыдущем случае, приведенная выше картина допускает вырождения. В частности, ситу-

ации  $\hat{\epsilon}_1^{A'} = \hat{\epsilon}_1^A$  и  $\hat{\epsilon}_2^A = \hat{\epsilon}_2^{A'}$  отвечают здесь тем же типам вырождения, что и в случае сложных угловых диаграмм. Вырождение  $\hat{\epsilon}_1^B = \hat{\epsilon}_2^B$  отвечает «границе» между дисперсионными соотношениями со сложными угловыми диаграммами и соотношениями с простыми угловыми диаграммами.

### 3. ПЕРЕХОДЫ ЛИФШИЦА И ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ИЗМЕНЕНИЯ ДИАГРАММ ПРОВОДИМОСТИ

Изменение картины открытых траекторий системы (1) может быть довольно простым и наглядным для достаточно простых поверхностей Ферми. Ярким примером может служить классическая перестройка, рассмотренная в работе [1] (см. рис. 1), где компактная поверхность Ферми приобретает форму гофрированного цилиндра. Легко видеть, что открытые траектории возникают при этом лишь при

направлениях  $\mathbf{B}$ , ортогональных оси цилиндра, и являются периодическими. В общем случае, однако, описание открытых траекторий на поверхности Ферми является довольно сложной задачей и часто требует серьезных численных исследований (см., например, [14, 26, 40]). В данной работе мы постараемся описать наиболее общие особенности изменения угловых диаграмм при переходах Лифшица, основываясь на общих топологических результатах, полученных при исследовании задачи Новикова. Как мы увидим ниже, такие особенности могут приводить при этом к ряду весьма специальных режимов в поведении проводимости, наблюдаемых экспериментально и свойственных именно ситуациям, близким к топологическим переходам.

Естественным показателем топологической сложности поверхности Ферми является ее ранг, а именно, количество независимых направлений, в которых поверхность простирается в  $\mathbf{p}$ -пространстве. Легко видеть, что ранг поверхности Ферми может принимать значения 0, 1, 2 и 3 (рис. 8).

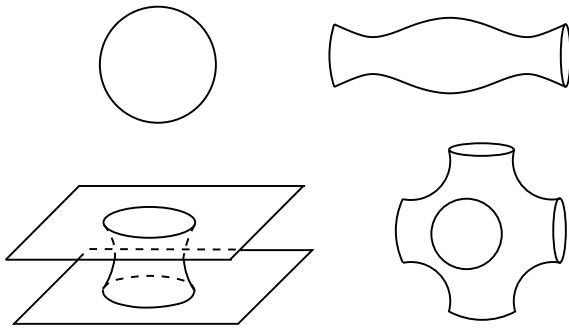


Рис. 8. Примеры поверхностей Ферми ранга 0, 1, 2 и 3

Кроме того, поскольку поверхность Ферми можно также рассматривать как компактную поверхность в трехмерном торе, она также обладает топологическим родом  $g$ , который может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, ... и т. д. (рис. 9). По топологическим соображениям ранг поверхности Ферми не может превышать ее рода. Важным является также и то, что, помимо топологической сложности, поверхность Ферми может иметь весьма сложную геометрическую форму в  $\mathbf{p}$ -пространстве, что тоже оказывает существенное влияние на форму траекторий системы (1).

Прохождение особых точек соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  при увеличении энергии  $\epsilon_F$  меняет топологию поверхности Ферми. Легко видеть, что прохождение минимумов и максимумов  $\epsilon(\mathbf{p})$  приводит к появлению и исчезновению (малых) компонент поверхно-

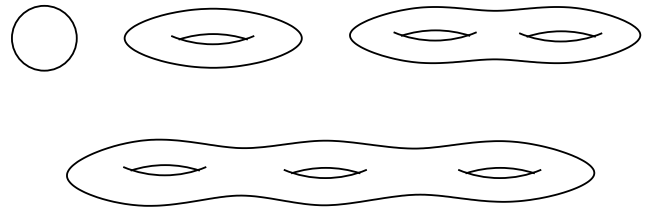


Рис. 9. Топологические поверхности рода 0, 1, 2 и 3

сти Ферми, в то время как прохождение седловых особых точек приводит к слиянию или распаду отдельных компонент, или изменению их рода. Если говорить о перестройке связной компоненты поверхности Ферми, то прохождение седловой особой точки индекса 1 повышает ее род на единицу, в то время как прохождение особой точки индекса 2 уменьшает ее род на единицу. В более общем случае прохождение особой точки индекса 1 может также приводить к слиянию отдельных компонент, в то время как прохождение точки индекса 2 — к распаду одной компоненты на две.

Согласно теории Морса, гладкая функция  $\epsilon(\mathbf{p})$  на торе  $\mathbb{T}^3$  имеет не менее трех седловых особых точек как индекса 1, так и индекса 2 (и, конечно, не менее одного минимума и максимума). Весьма часто, однако, число седловых особых точек  $\epsilon(\mathbf{p})$  превышает приведенные нижние оценки, а род поверхности Ферми бывает равен 4 и более.

Конечно, изменение топологии поверхности Ферми нередко дает очевидные указания на возможность появления на ней незамкнутых траекторий системы (1). Особенно это относится к изменению ранга поверхности Ферми, а также к появлению периодических открытых траекторий. Обычно в этих случаях поверхность Ферми имеют достаточно простую форму и отвечают достаточно простым угловым диаграммам проводимости.

Нам здесь будет интересно рассмотреть ситуацию, когда переходы Лифшица происходят на достаточно сложных поверхностях Ферми, отвечающих также достаточно сложным диаграммам проводимости. Поскольку структура таких диаграмм формируется главным образом картиной зон устойчивости на них, нам прежде всего интересно будет здесь проследить за изменениями этой картины при топологических переходах.

Выше мы описали эволюцию картины зон устойчивости на сложной диаграмме проводимости, начиная с момента их возникновения на диаграмме до их полного исчезновения (см. рис. 7). При возрастании значения  $\epsilon_F$  диаграмма меняется монотонно, при

этом область, отвечающая наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми и электронной холловской проводимости, монотонно уменьшается (до своего исчезновения), а аналогичная область, отвечающая дырочной холловской проводимости, монотонно увеличивается (с момента своего появления). В частности, участки границ  $\Omega_\alpha$ , примыкающие к первой области, движутся наружу зон устойчивости, а участки, примыкающие ко второй области, вовнутрь зон. Как мы уже сказали выше, участки первого типа определяются соотношением  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V}) = \epsilon_F$ , а участки второго типа — соотношением  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V}) = \epsilon_F$ .

В интервалах энергии, не содержащих перестроек поверхности Ферми, эволюция диаграммы проводимости является непрерывной. Вместе с тем, как было указано в работе [16], функции  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$  могут быть локально постоянными в некоторых областях на единичной сфере. Данное явление связано именно с топологическими перестройками поверхности  $S_F$ , а значения этих функций на таких «плато» совпадают при этом с энергиями, при которых наблюдаются соответствующие перестройки (переходы Лифшица). Как можно видеть, картина зон устойчивости может в этом случае меняться «скачком» в некоторой области на  $S^2$ , отвечающей «плато» функции  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  или  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ .

Мы постараемся рассмотреть здесь наиболее подробно возможные изменения диаграммы проводимости при переходах Лифшица, включая описание режимов поведения тензора  $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$ , отвечающих таким изменениям. Как мы уже сказали выше, мы начнем со случаев, отвечающих появлению или исчезновению устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми.

В связи с исследованием открытых траекторий системы (1) нам будут интересны переходы Лифшица, связанные с прохождением седловых особых точек соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  при изменении величины  $\epsilon_F$ . На рис. 10 приведены перестройки поверхности Ферми при прохождении особых точек индекса 1 (вверху) и 2 (внизу) с увеличением энергии Ферми. Перестройки на рис. 10 выглядят как взаимно обратные, мы должны помнить, однако, что в обоих случаях при возрастании  $\epsilon_F$  происходит увеличение области  $\epsilon(\mathbf{p}) < \epsilon_F$  и уменьшение области  $\epsilon(\mathbf{p}) > \epsilon_F$ .

Изменение картины открытых траекторий на поверхности Ферми при увеличении  $\epsilon_F$  может быть связано с двумя процессами в плоскостях, ортогональных  $\mathbf{V}$ , а именно, образование открытых траекторий из замкнутых траекторий электронного типа и распад открытых траекторий на замкнутые тра-

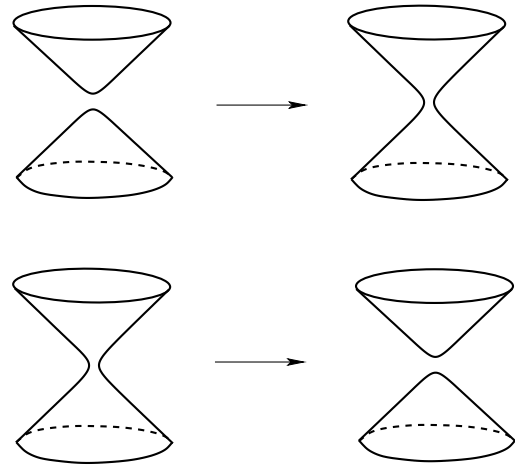


Рис. 10. Перестройки поверхности Ферми при прохождении седловых особых точек  $\epsilon(\mathbf{p})$  индекса 1 (вверху) и индекса 2 (внизу)

ектории дырочного типа (рис. 11). Аналогично, при уменьшении значения  $\epsilon_F$  эти процессы идут в обратном направлении.

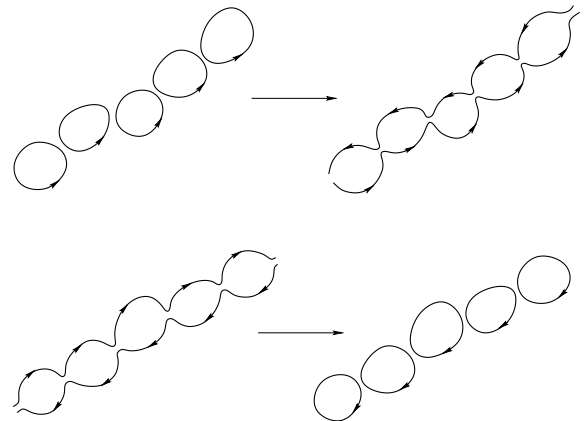


Рис. 11. Образование открытых траекторий и их распад при увеличении значения  $\epsilon_F$

Нетрудно видеть, что при направлениях  $\mathbf{V}$ , близких к оси конуса

$$a^2 dp_1^2 + b^2 dp_2^2 - c^2 dp_3^2 = 0 \tag{5}$$

(в соответствующей данной точке системе координат) или, соответственно,

$$a^2 dp_1^2 - b^2 dp_2^2 - c^2 dp_3^2 = 0 \tag{6}$$

никаких изменений картины открытых траекторий системы (1) произойти не может. Уравнение (5) или (6) выделяет, таким образом, две эллипсоидальные

области на единичной сфере, в которых заведомо не происходит изменений диаграммы проводимости (в нашем смысле) при прохождении соответствующих особых точек. Изменение картины открытых траекторий на поверхности Ферми может, таким образом, происходить лишь в кольцевой области, разделяющей противоположные эллипсоидальные области на  $S^2$  (рис. 12). Можно отметить также, что в случае наблюдения резких изменений вдоль границы этой области (или ее части) нетрудно определить параметры соответствующей особой точки (точнее, величины  $b/a$  и  $c/a$ ).

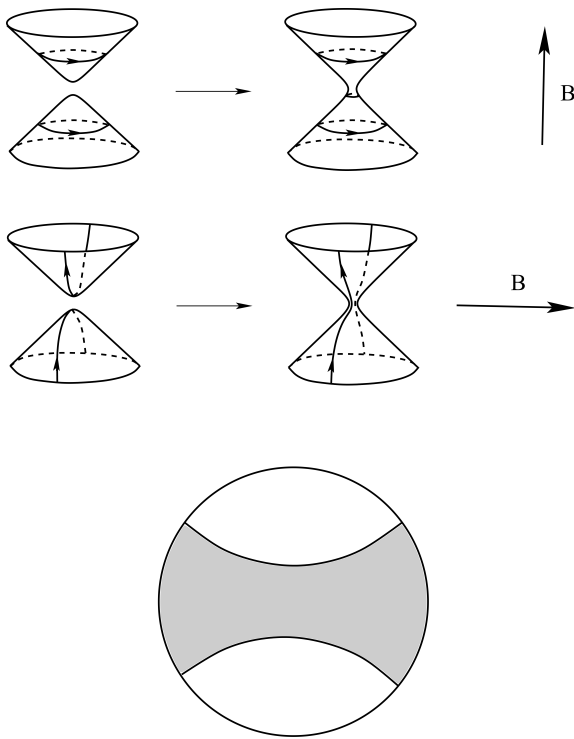


Рис. 12. Изменение траекторий при прохождении особой точки при различных направлениях  $\mathbf{V}$  и область возможных изменений диаграммы проводимости (закрашена)

Для дальнейшего рассмотрения нам понадобится краткое описание структуры системы (1) на поверхности Ферми при наличии на ней устойчивых открытых траекторий (см. [9, 12, 16]). Дадим здесь это описание, используя модельную поверхность Ферми.

Рассмотрим в  $\mathbf{p}$ -пространстве периодическое семейство целочисленных плоскостей, соединенных цилиндрами (рис. 13). Как и ранее, мы называем плоскость в  $\mathbf{p}$ -пространстве целочисленной, если она порождена двумя векторами обратной решетки.

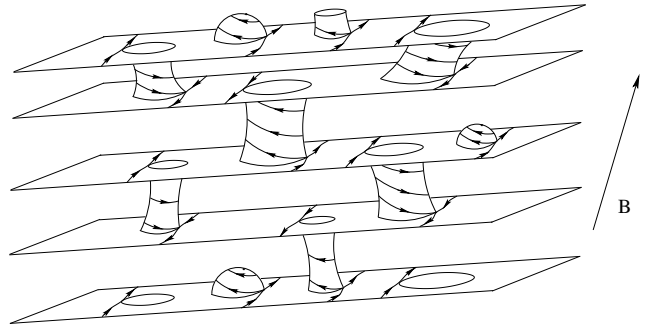


Рис. 13. Модельная поверхность Ферми, несущая устойчивые открытые траектории системы (1)

Мы предполагаем, что рассматриваемая поверхность является периодической с периодами, равными векторам обратной решетки. Кроме того, мы предполагаем, что все плоскости разделены на четные и нечетные, так что четные плоскости переходят в четные, а нечетные — в нечетные при сдвиге на любой период.

Нетрудно видеть, что при направлениях  $\mathbf{V}$ , почти ортогональных направлению плоскостей, на цилиндрах, соединяющих плоскости, возникнут замкнутые траектории, отделяющие плоскости друг от друга (см. рис. 13). На разделенных плоскостях при этом возникают устойчивые открытые траектории системы (1), среднее направление которых задается пересечением плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ , и целочисленным направлением построенных нами плоскостей. Носители открытых траекторий представляют собой при этом (периодически деформированные) плоскости с отверстиями, образующимися после удаления замкнутых траекторий (рис. 14). Как также нетрудно видеть, направления пробегания по траекториям на четных и нечетных плоскостях противоположны друг другу.

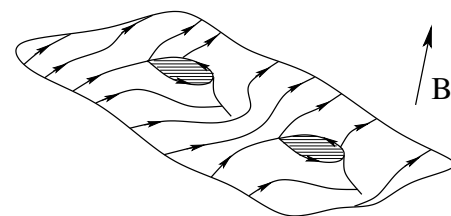


Рис. 14. Носитель устойчивых открытых траекторий системы (1) на поверхности Ферми

Приведенная выше картина устойчива относительно малых вращений направления  $\mathbf{V}$  и сохраняется до тех пор, пока на цилиндрах, соединяющих



целочисленные плоскости, присутствуют замкнутые траектории, разделяющие эти плоскости. Соответствующая зона устойчивости  $\Omega$ , очевидно, тем больше, чем выше и уже цилиндры, соединяющие плоскости, и наоборот, мала для широких цилиндров малой высоты. Можно отметить также, что исчезновение цилиндра замкнутых траекторий электронного типа отвечает участкам границы  $\Omega$ , примыкающим к областям дырочной холловской проводимости, в то время как исчезновение цилиндра замкнутых траекторий дырочного типа отвечает участкам границы, примыкающим к областям электронной холловской проводимости.

Представленная картина является топологической и геометрически может выглядеть гораздо сложнее. В частности, носители открытых траекторий могут быть деформированы гораздо сильнее, а соединяющие их цилиндры могут иметь весьма малую высоту и довольно сложную форму. Тем не менее, описанное топологическое представление поверхности Ферми возникает всегда, когда на ней присутствуют устойчивые открытые траектории системы (1) [9, 12, 16]. Такое представление при этом не является единственным для заданной поверхности Ферми, в частности, в разных зонах устойчивости возникают разные представления одной и той же поверхности.

Дадим теперь описание возможных изменений картины зон устойчивости при прохождении седловой точки индекса 1 (см. рис. 10), используя приведенную выше структуру. Рассмотрим сначала случай, когда перестройка поверхности Ферми приводит к образованию устойчивых открытых траекторий (см. рис. 11) при некотором направлении  $\mathbf{V}$ . Используя описанную выше структуру, мы покажем здесь, что зоны устойчивости  $\Omega_\alpha$ , возникающие в результате такой перестройки, имеют в некотором смысле особенную форму, а также отличаются специфическим вкладом в тензор проводимости в пределе  $V \rightarrow \infty$ .

Поскольку появление открытых траекторий происходит благодаря перестройке поверхности Ферми, все такие траектории должны проходить через узкий перешеек, появляющийся после прохода седловой особой точки (рис. 15). Это значит, в частности, что цикл  $c$ , изображенный на рис. 15, должен проходить как через носитель открытых траекторий, пробегаемых в одном направлении, так и через носитель открытых траекторий, пробегаемых в противоположном направлении. Отсюда следует тогда, что он также проходит от одного основания цилиндра замкнутых траекторий, разделяющих эти но-

сители, до другого его основания. Можно видеть, таким образом, что высота хотя бы одного цилиндра замкнутых траекторий, соединяющих два носителя открытых траекторий, очень мала и стремится к нулю при приближении к точке топологического перехода. Кроме того, этот цилиндр имеет седловую особую точку на каждом из своих оснований, которые примыкают к двум разным носителям открытых траекторий. Нетрудно показать при этом, что такие точки должны лежать на разных перешейках в  $\mathbf{p}$ -пространстве, а сам цилиндр, таким образом, проходит через оба этих перешейка. Легко видеть тогда, что довольно малые вращения направления  $\mathbf{V}$ , кроме ортогональных отрезку, соединяющему указанные перешейки, приведут к исчезновению указанного цилиндра замкнутых траекторий и, таким образом, к выходу за пределы зоны  $\Omega_\alpha$ . Можно видеть, таким образом, что образовавшаяся в результате перестройки зона устойчивости должна быть очень узкой областью на сфере  $S^2$  (рис. 16).

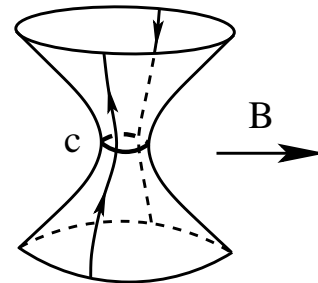


Рис. 15. Перешеек, образующийся после топологической перестройки, и цикл, пересекающий возникающие открытые траектории

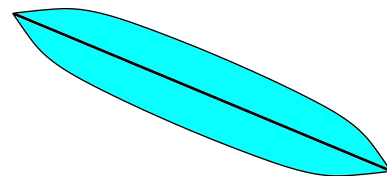


Рис. 16. Зона устойчивости, образующаяся в результате прохождения особой точки индекса 1 при возрастании значения  $\epsilon_F$  (схематично)

При приближении к точке перехода ширина области  $\Omega_\alpha$  стремится к нулю, так что  $\Omega_\alpha$  стремится в пределе к одномерной дуге на единичной сфере (см. рис. 16). Легко видеть, что эта дуга представляет собой отрезок большого круга, ортогональ-

ного некоторому целочисленному направлению в  $\mathbf{r}$ -пространстве (а именно, вектору, соединяющему два рассматривавшихся выше перешейка). В точках данного отрезка, таким образом, плоскость, ортогональная  $\mathbf{B}$ , всегда содержит некоторый фиксированный вектор обратной решетки. Нетрудно показать также, что ширина области  $\Omega_\alpha$  стремится к нулю по закону  $\sim \sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)}/\epsilon_F$  при приближении к точке перехода.

Прохождение седловой точки индекса 1 может приводить к возникновению как конечного, так и бесконечного числа узких зон устойчивости на угловой диаграмме. В последнем случае, как можно видеть, мы должны в результате ожидать появления угловой диаграммы типа  $B$ , описанного выше.

Можно также отметить, что суммарная площадь зон устойчивости, возникающих как результат топологической перестройки, стремится к нулю при приближении к точке перехода. Как следствие этого, прохождение особой точки индекса 1 не вызывает скачкообразного уменьшения площади областей, отвечающих холловской проводимости электронного типа (и наличию лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми).

Образование зон устойчивости при прохождении особой точки индекса 1 может происходить на диаграммах типа  $0_-$ ,  $1_-$ ,  $A_-$  и  $B$ . В первом случае, как нетрудно видеть, это приводит к изменению типа  $0_-$  сразу на тип  $A_-$ . Как мы уже говорили, такие вырождения являются типичными для дисперсионных соотношений достаточно высокой симметрии и появления сразу нескольких особых точек одного типа на одном уровне энергии.

Для описания поведения тензора проводимости в рассматриваемой ситуации нам необходимо также обсудить меру открытых траекторий, возникающих на поверхности Ферми. В действительности, для направлений  $\mathbf{B}$  общего положения (максимальной иррациональности) мера таких траекторий обладает малостью по параметру близости к точке перехода. Чтобы это показать, рассмотрим поверхность Ферми непосредственно перед прохождением (одной или сразу нескольких) особых точек индекса 1. Для направлений  $\mathbf{B}$  общего положения на ней в этом случае присутствуют только замкнутые траектории, а сама поверхность Ферми представляет набор конечного числа (неэквивалентных) цилиндров замкнутых траекторий, разделенных сингулярными траекториями (рис. 17).

Вблизи точки перехода при  $\epsilon_F > \epsilon_0$  на поверхности Ферми появляются тонкие перешейки, соединяющие различные ее части. Рассматривая такие пе-

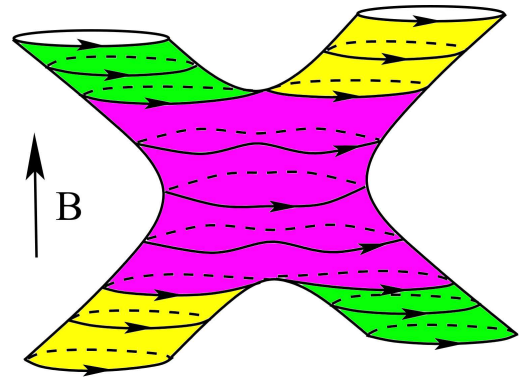


Рис. 17. Пример поверхности Ферми, состоящей из цилиндров замкнутых траекторий системы (1)

решейки на каждом из цилиндров замкнутых траекторий, можно видеть, что при сильном уменьшении их диаметра большая часть замкнутых траекторий не претерпевает никаких изменений (рис. 18). В результате, в пределе  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_0$  почти все траектории для таких направлений  $\mathbf{B}$  остаются замкнутыми. Нетрудно видеть также, что доля изменившихся при этом траекторий системы (1) на каждом из цилиндров пропорциональна отношению ширины перешейков к высоте цилиндра, т.е. величине  $\sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)}/\epsilon_F$ . Соответствующий множитель возникает при этом и для вклада (3) открытых траекторий в тензор проводимости в пределе  $\omega_B \tau \rightarrow \infty$  (а также множитель, содержащий слабую логарифмическую зависимость от  $(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F$  из-за близости траекторий к особым точкам системы (1) в узких перешейках).

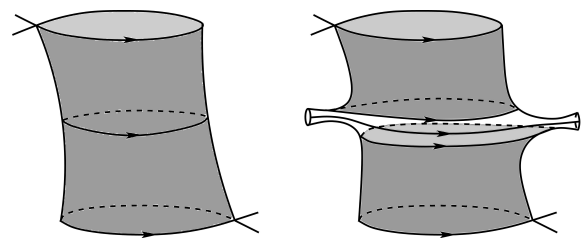


Рис. 18. Тонкие перешейки, примыкающие к цилиндру замкнутых траекторий конечной высоты и перестройка траекторий на поверхности Ферми (закрашены цилиндры сохраняющихся траекторий)

Приведенное выше рассуждение, однако, нуждается в одном важном дополнении. А именно, кроме близости к точке топологического перехода, в рассматриваемой ситуации важную роль может играть также близость направления  $\mathbf{B}$  к направлени-

ям, отвечающим появлению периодических открытых траекторий на поверхности Ферми еще до точки перехода. Такие траектории могут существовать по обе стороны от топологического перехода, занимая при этом конечную площадь на поверхности Ферми. Для направлений  $\mathbf{V}$ , близких к таким направлениям, по крайней мере, некоторые из описанных выше цилиндров замкнутых траекторий (см. рис. 17) имеют малую высоту и большие «поперечные» размеры в  $\mathbf{p}$ -пространстве. В этом случае отношение диаметра перешейков к высоте цилиндров может оставаться конечным.

Близость направлений  $\mathbf{V}$  общего положения к описанным выше направлениям в нашем случае может быть обусловлена специфической геометрией зон устойчивости (см. рис. 16). Это относится, в первую очередь, к отрезку, на который стягивается зона в пределе  $\epsilon_F \rightarrow \epsilon_0$  и который может быть множеством направлений, отвечающих появлению периодических траекторий еще до точки перехода. Как мы уже видели выше, ширина области  $\Omega_\alpha$  также пропорциональна при этом величине  $\sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F}$  и то же самое можно сказать в этом случае и о высоте части цилиндров замкнутых траекторий, возникающих для направлений  $\mathbf{V} \in \Omega_\alpha$  до топологического перехода (когда открытых траекторий для этих направлений еще нет). Как следствие этого, мера открытых траекторий на поверхности Ферми в зоне  $\Omega_\alpha$  может оставаться конечной вблизи перехода. При этом, однако, возникающие устойчивые открытые траектории обладают специфической геометрией. А именно, они ограничены прямыми полосами довольно большой ширины и повторяют геометрию периодических траекторий на малых масштабах (рис. 19).

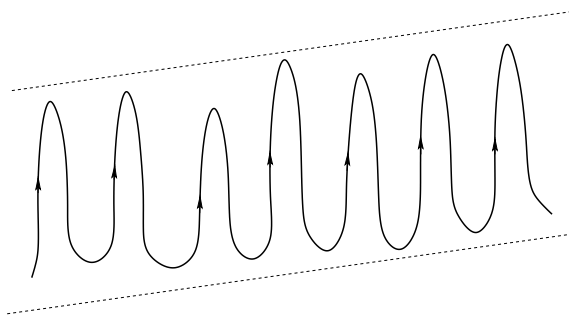


Рис. 19. Устойчивые открытые траектории, возникающие для направлений  $\mathbf{V}$ , близких к направлениям появления периодических траекторий (схематично)

Для описанных направлений  $\mathbf{V}$  можно ввести функцию  $\mu(\mathbf{V})$ , определяющую отношение минимальной ширины полос, содержащих открытые траектории, к размеру зоны Бриллюэна. Вклад открытых траекторий в проводимость при  $\omega_B\tau \gg 1$  при этом различен в интервалах  $1 \ll \omega_B\tau \leq \mu(\mathbf{V})$  и  $\omega_B\tau \gg \mu(\mathbf{V})$ . В первом случае этот вклад может быть приближен формулой (3), при условии, что направление оси  $x$  совпадает с направлением периодических открытых траекторий. Во втором случае направление оси  $x$  должно совпадать со средним направлением устойчивых открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве, а суммарный вклад таких траекторий в тензор проводимости можно представить в виде

$$\sigma^{kl} \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} \mu^2(\omega_B\tau)^{-2} & (\omega_B\tau)^{-1} & \mu(\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & \mu^{-2} & \mu^{-1} \\ \mu(\omega_B\tau)^{-1} & \mu^{-1} & * \end{pmatrix} \quad (7)$$

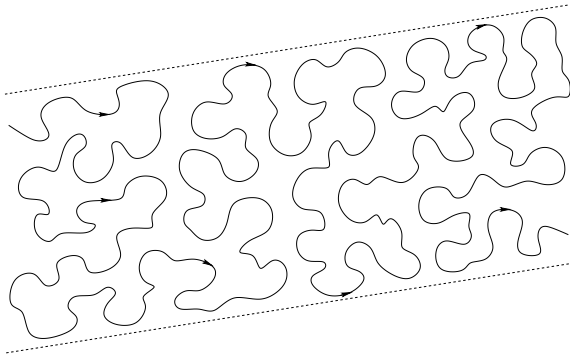
( $\omega_B\tau \rightarrow \infty$ ).

Функция  $\mu(\mathbf{V})$  обладает сильной зависимостью от направления  $\mathbf{V}$  и обращается в бесконечность для направлений, отвечающих появлению периодических траекторий, существующих по обе стороны от перехода.

Отдельного упоминания заслуживают также зоны  $\Omega_\alpha$ , обладающие дополнительной (вращательной) симметрией и появляющиеся в результате возникновения сразу нескольких особых точек индекса 1 на одном уровне  $\epsilon_0$ . Размеры таких зон стремятся к нулю по всем направлениям при приближении к точке перехода, а мера открытых траекторий на поверхности Ферми при  $\mathbf{V} \in \Omega_\alpha$  пропорциональна  $\sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F}$ .

Симметричные зоны устойчивости, однако, обладают еще одной особенностью. А именно, вектор  $(m^1, m^2, m^3)$  для таких зон совпадает с направлением, проходящим через центр зоны (см. [16]), и для данного направления  $\mathbf{V}$  открытые траектории отсутствуют на поверхности Ферми. Для направлений  $\mathbf{V}$ , лежащих в симметричной зоне малых размеров, устойчивые открытые траектории лежат в прямых полосах большой ширины и обладают довольно сложным поведением на малых масштабах (рис. 20).

Для описания вклада в проводимость открытых траекторий в симметричных зонах устойчивости, возникающих при переходах Лифшица, также естественно рассмотреть интервалы  $1 \ll \omega_B\tau \leq \mu(\mathbf{V})$  и  $\omega_B\tau \gg \mu(\mathbf{V})$  для функции  $\mu(\mathbf{V})$ , имеющей тот же смысл, что и выше. В первом интервале поведение проводимости более сложное (возможно появ-



**Рис. 20.** Устойчивые открытые траектории, возникающие для направлений  $\mathbf{V}$ , лежащих в симметричной зоне устойчивости малых размеров

ление промежуточных дробных степеней  $\omega_B \tau$ ), при этом общий вклад таких траекторий в тензор проводимости содержит также малый множитель порядка  $\sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F}$ . Во втором интервале вклад открытых траекторий в проводимость аналогичен вкладу (7), также умноженному на величину порядка  $\sqrt{(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F}$ . При этом вероятно, что наблюдение также слабой логарифмической зависимости от  $(\epsilon_F - \epsilon_0)/\epsilon_F$ , обусловленной близостью к особым точкам соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ , здесь несколько усложнено с экспериментальной точки зрения.

Надо сказать, что проводимость в области появления малых зон устойчивости, возникающих в результате переходов Лифшица, в целом имеет довольно сложное поведение, а исследование геометрии таких зон, возможно, удобнее проводить с помощью методов, отличающихся от методов прямых измерений проводимости (см., например, [44]). Вместе с тем, появление таких зон играет весьма важную роль при изменении структуры общей диаграммы проводимости, особенно в случае появления сложных диаграмм типа  $B$ .

Рассмотрим теперь вторую возможную ситуацию, а именно, исчезновение устойчивых открытых траекторий системы (1) при прохождении особой точки индекса 1 (см. рис. 11). В этой ситуации речь будет идти об исчезновении зоны устойчивости или ее части. Соответствующие изменения, очевидно, могут происходить лишь на диаграммах типа  $A_-$ ,  $B$  и  $A_+$ .

Как мы уже видели, распад устойчивых открытых траекторий системы (1) становится возможным, когда носители таких траекторий перестают быть отделенными друг от друга и появляется возможность «перескоков» между такими носителями. Таким образом, топологическая перестройка поверх-

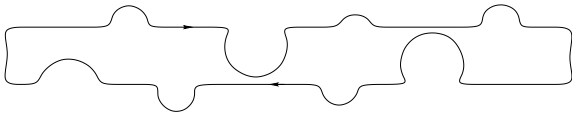
ности Ферми приводит к распаду устойчивых открытых траекторий, если в результате перестройки образуется новый цилиндр, соединяющий два носителя и дающий возможность «перескоков» между ними при заданном направлении  $\mathbf{V}$ . Это именно та ситуация, которая приводит к образованию плато в значениях функций  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$  (в данном случае  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$ ) (см. [16]), что, в свою очередь, должно приводить к скачкообразному изменению диаграмм проводимости, рассматриваемых нами здесь.

Как мы уже отмечали, изменение диаграммы проводимости при рассматриваемой нами перестройке может происходить лишь в специальной кольцевой области (см. рис. 12). При изменении рассматриваемого типа при этом можно наблюдать мгновенное исчезновение зон конечных размеров (или их частей) в момент топологического перехода. Кроме того, мера открытых траекторий на поверхности Ферми здесь также остается конечной вплоть до момента перехода и мгновенно обращается в нуль (для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения) при перестройке поверхности.

Вместе с тем, близость к переходу Лифшица оказывает свое влияние на специфику траекторий системы (1), равно как и на поведение тензора проводимости, также и в описываемой ситуации. В данном случае оно выражается в появлении очень длинных замкнутых траекторий системы (1) на поверхности Ферми при направлениях  $\mathbf{V}$  общего положения, лежащих в исчезнувших зонах устойчивости или их исчезнувших частях (рис. 21). Средняя длина таких траекторий стремится к бесконечности вблизи перехода и уменьшается при удалении от него. Кроме того, как мы уже отмечали выше, значения функций  $\epsilon_1(\mathbf{V})$  и  $\epsilon_2(\mathbf{V})$  отличаются от значений  $\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{V})$  и  $\tilde{\epsilon}_2(\mathbf{V})$  для направлений  $\mathbf{V}$ , отвечающих появлению периодических открытых траекторий. Как следствие этого, периодические траектории системы (1) на поверхности Ферми не исчезают сразу в момент перехода, а сохраняются еще некоторое время. В результате, область исчезнувшей зоны устойчивости (или ее исчезнувшей части) покрыта сетью одномерных дуг, отвечающих наличию периодических траекторий на поверхности Ферми. Сеть соответствующих дуг уплотняется при приближении к топологическому переходу и становится бесконечно плотной в момент перехода.

Описанные особенности траекторий (1) вблизи перехода Лифшица приводят также к достаточно сложному поведению тензора проводимости в сильных магнитных полях. Соответствующее поведение  $\sigma^{kl}(\mathbf{V})$  было описано в работе [43], где оно возникало





**Рис. 21.** Длинные замкнутые траектории, возникающие на поверхности Ферми вблизи топологического перехода (схематично)

в очень узких областях вблизи границ зон устойчивости  $\Omega_\alpha$  на диаграммах проводимости. Здесь, однако, такое поведение возникает в довольно больших областях, а именно, на месте исчезнувших зон  $\Omega_\alpha$  или их частей. В таких областях для направлений  $\mathbf{V}$  общего положения естественно ввести (приближенную) функцию  $\lambda(\mathbf{V})$ , определяющую отношение среднего размера длинных замкнутых траекторий к размерам зоны Бриллюэна. Кроме того, при рассмотрении проводимости в этих областях естественно сохранять систему координат, отвечающую исчезнувшим открытым траекториям, а именно, выбирая среднее направление бывших открытых траекторий в  $\mathbf{p}$ -пространстве в качестве оси  $x$ .

Естественным следствием геометрии траекторий в рассматриваемых нами областях является то, что их вклад в проводимость проявляется как вклад замкнутых траекторий при гораздо более сильном условии  $\omega_B\tau \gg \lambda(\mathbf{V})$ , в то время как в интервале  $1 \ll \omega_B\tau \leq \lambda(\mathbf{V})$  их вклад скорее отвечает вкладу открытых траекторий. Однако и в пределе  $\omega_B\tau \gg \lambda(\mathbf{V})$  вклад возникающих замкнутых траекторий сохраняет анизотропию в плоскости, ортогональной  $\mathbf{V}$ .

Кроме того, можно видеть, что длинные замкнутые траектории формируются из открытых траекторий, расположенных на двух разных носителях. Для дисперсионных соотношений, удовлетворяющих условию  $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon(-\mathbf{p})$  (и поверхностей Ферми не слишком большого рода), из этого в действительности следует соотношение  $\langle v_{gr}^z \rangle \rightarrow 0$  при  $\lambda(\mathbf{V}) \rightarrow \infty$  для среднего по траектории значения групповой скорости электрона вдоль направления магнитного поля. Как следствие этого, вклад таких траекторий в проводимость вдоль магнитного поля в действительности стремится к нулю в пределе  $\omega_B\tau \gg \lambda(\mathbf{V}) \gg 1$ . В последнем такой вклад схож со вкладом в проводимость неустойчивых траекторий Дынникова в пределе  $\omega_B\tau \gg 1$ .

В целом, суммарный вклад длинных замкнутых траекторий в симметричную  $s^{kl}$  и антисимметричную  $a^{kl}$  части тензора проводимости в пределе

$\omega_B\tau \gg \lambda(\mathbf{V})$  может быть представлен в виде [43]

$$s^{kl}(B) \simeq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{zz}(\lambda) \end{pmatrix} + \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} (\omega_B\tau)^{-2} & \lambda(\omega_B\tau)^{-2} & \lambda(\omega_B\tau)^{-2} \\ \lambda(\omega_B\tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B\tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B\tau)^{-2} \\ \lambda(\omega_B\tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B\tau)^{-2} & \lambda^2(\omega_B\tau)^{-2} \end{pmatrix}$$

(где  $\sigma^{zz}(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow \infty$ ),

$$a^{kl}(B) \simeq \frac{ne^2\tau}{m^*} \begin{pmatrix} 0 & (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & 0 & (\omega_B\tau)^{-1} \\ (\omega_B\tau)^{-1} & (\omega_B\tau)^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Надо сказать, что условие  $\omega_B\tau \gg \lambda(\mathbf{V})$  может быть довольно сильным, и во многих случаях экспериментально может наблюдаться некоторый переходный режим между режимом (3) и описанной выше зависимостью. Отметим также, что к описанному выше вкладу надо в общем случае добавить еще вклад (2) от «обычных» замкнутых траекторий, которые тоже присутствуют на поверхности Ферми в описанной ситуации.

Величина  $\lambda(\mathbf{V})$  обращается в бесконечность в точке топологического перехода. Для фиксированного направления  $\mathbf{V}$  общего положения ее поведение при приближении к  $\epsilon_0$  может быть (приблизительно) описано зависимостью

$$\lambda \sim \sqrt{\epsilon_F / |\epsilon_F - \epsilon_0|}.$$

При этом зависимость  $\lambda$  от направления  $\mathbf{V}$  является довольно сложной, в частности,  $\lambda$  обращается в бесконечность на (сохранившихся) дугах, отвечающих появлению периодических траекторий (1). В целом, исчезающие зоны устойчивости (или их части) могут быть названы областями сложного поведения проводимости в сильных магнитных полях.

В действительности, оба описанных эффекта (возникновение и исчезновение зон устойчивости) могут наблюдаться одновременно (в разных частях угловой диаграммы) при прохождении седловой особой точки индекса 1. На рис. 22 приведен пример одной из таких перестроек поверхности Ферми. Нетрудно видеть, что до перестройки угловая диаграмма является довольно простой (типа  $A_-$ ) и содержит одну зону устойчивости (с диаметрально противоположной ей). После перестройки происходит исчезновение части зоны устойчивости и замена ее зоной сложного поведения проводимости. Кро-

ме того, происходит образование множества маленьких зон, отделяющих область электронной холловской проводимости от области дырочной холловской проводимости, возникающей на диаграмме. Можно показать, что в непосредственной близости к топологическому переходу цепи маленьких зон устойчивости «прижимаются» к зонам сложного поведения проводимости, в то время как при удалении от перехода они сдвигаются к «экватору». В целом, диаграмма проводимости после перехода имеет тип  $B$  и должна в случае общего положения содержать также направления  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению неустойчивых траекторий типа Царева или Дынникова.

Отметим здесь, что прохождение особых точек при увеличении значения  $\epsilon_F$  может вызывать скачкообразные изменения диаграмм проводимости, однако, сохраняя общее направление их эволюции, представленное на рис. 7. Как следствие этого, исчезновение зоны устойчивости или ее части приводит в этой ситуации к скачкообразному увеличению площади, отвечающей дырочной холловской проводимости, при наличии лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми. При этом площадь области, отвечающей электронной холловской проводимости (и наличие лишь замкнутых траекторий на поверхности Ферми), непосредственно вблизи перехода остается неизменной. Можно видеть, таким образом, что если описанный эффект (исчезновение устойчивых открытых траекторий при прохождении особой точки индекса 1) имеет место для диаграммы типа  $A_-$ , тип диаграммы меняется на тип  $B$ . Из тех же соображений можно заключить, что наблюдение описанного эффекта на диаграммах типа  $B$  не меняет типа диаграммы. Наблюдение описанного эффекта на диаграмме типа  $A_+$  сохраняет тип диаграммы, или меняет его на тип  $1_+$ .

В связи со сказанным выше нам хотелось бы отметить здесь еще одно важное обстоятельство. А именно, диаграммы типа  $B$  являются диаграммами общего положения и должны, вообще говоря, наблюдаться при исследовании достаточно богатых семейств поверхностей Ферми достаточно сложной формы. Вместе с тем, они пока не обнаружены экспериментально. То же самое верно также и для неустойчивых траекторий типа Царева или Дынникова, которые должны сопутствовать таким диаграммам. Одной из причин этого, на наш взгляд, может являться довольно малая величина интервала  $(\epsilon_1^B, \epsilon_2^B)$  и, соответственно, малая вероятность попадания в него значения  $\epsilon_F$  для реальных дисперсионных соотношений. В этой связи можно ожидать, что использование переходов Лифшица может дать

хорошие возможности для наблюдения таких диаграмм, а также нетривиальных режимов поведения проводимости, отвечающих появлению траекторий Царева или Дынникова на поверхности Ферми.

В целом, рассмотренные нами эффекты могут производить изменения на диаграммах проводимости перечисленных ниже типов со следующими возможными изменениями типа диаграммы:

$$\begin{aligned} 0_- &\rightarrow A_-, \\ 1_- &\rightarrow A_-, \\ A_- &\rightarrow \{A_-, B\}, \\ B &\rightarrow B, \\ A_+ &\rightarrow \{1_+, A_+\}. \end{aligned}$$

Описанные выше эффекты отвечают прохождению седловой особой точки индекса 1 в «прямом» направлении, а именно, при возрастании энергии Ферми  $\epsilon_F$ . Конечно, в результате внешнего воздействия переходы Лифшица могут совершаться как в «прямом» так и в «обратном» направлениях. Более того, внешнее воздействие не обязательно просто изменяет уровень Ферми, но производит в общем случае изменение всего дисперсионного соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$ . Очевидно, в общем случае топология перестройки поверхности Ферми определяется, в действительности, изменениями соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  вблизи соответствующей особой точки. Естественно, тем не менее, при этом сохранить термины прохождение особой точки в прямом или обратном направлениям, исходя из совпадения топологии соответствующего перехода с топологией перехода при возрастании или убывании  $\epsilon_F$ .

Считая изменение соотношения  $\epsilon(\mathbf{p})$  непрерывным, в достаточно узкой окрестности топологического перехода влиянием общего изменения  $\epsilon(\mathbf{p})$  можно пренебречь и считать, что главные изменения в картине зон устойчивости вызваны именно перестройкой поверхности Ферми. Для описания соответствующих изменений на угловой диаграмме при этом можно пользоваться картиной, полученной при рассмотрении, приведенном выше. Как мы уже сказали, приведенная выше картина относится к прохождению особой точки индекса 1 в прямом направлении. В общем случае нас здесь интересует аналогичное описание для прохождения точки индекса 1 в обратном направлении, а также прохождения точки индекса 2 в прямом и обратном направлениях.

Прохождение особой точки индекса 1 в обратном направлении, естественно, приводит к эффектам, обратным описанным выше. А именно, изменение картины устойчивых открытых траекторий

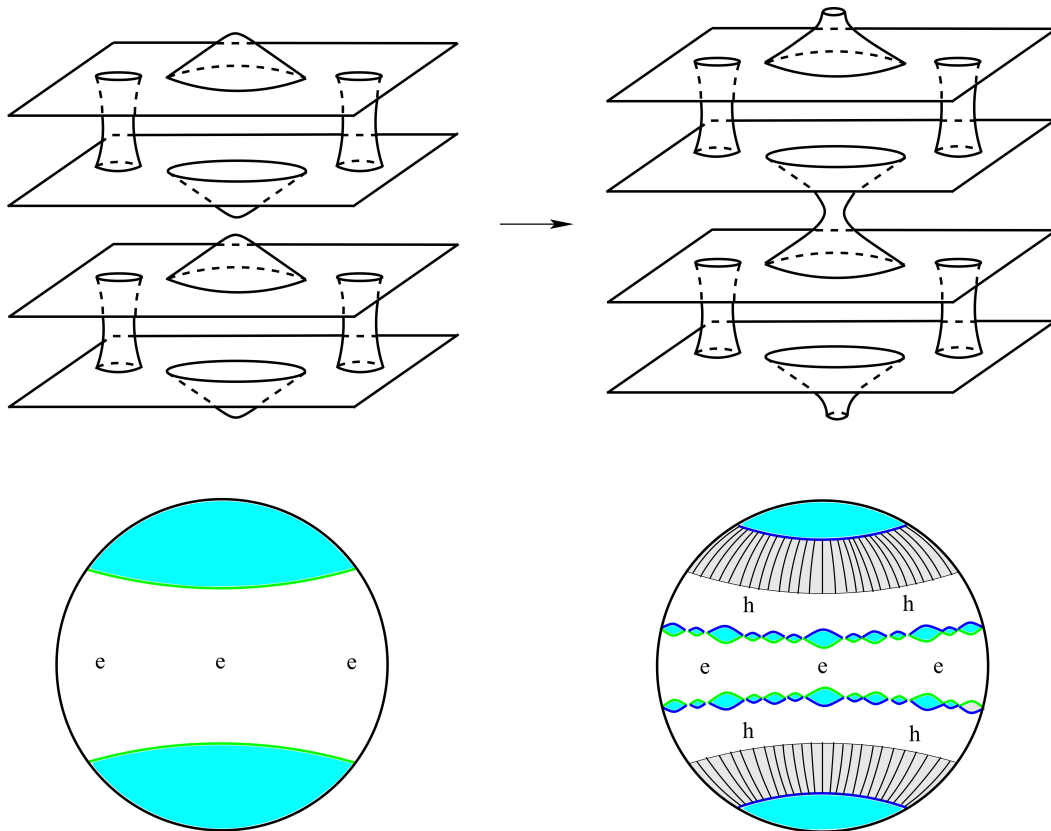


Рис. 22. Пример прохождения седловой особой точки индекса 1 и соответствующего изменения угловой диаграммы проводимости (схематично, показаны изменение картины зон устойчивости и образование области сложного поведения проводимости)

при прохождении седловой точки индекса 1 в обратном направлении может производить изменения на диаграммах проводимости перечисленных ниже типов со следующими возможными изменениями типа диаграммы:

$$\begin{aligned}
 A_- &\rightarrow \{0_-, 1_-, A_-\} \\
 B &\rightarrow \{A_-, B\} \\
 A_+ &\rightarrow A_+ \\
 1_+ &\rightarrow A_+.
 \end{aligned}$$

При этом картина зон устойчивости на диаграмме проводимости может претерпевать следующие специфические для этого случая изменения.

1) Уменьшение размеров некоторого (конечного или бесконечного) числа зон устойчивости и их исчезновение непосредственно в точке топологического перехода. Изменение может происходить на диаграммах типа  $A_-$ ,  $B$  и  $A_+$ .

2) Образование областей сложного поведения проводимости конечного размера в области дыроч-

ной холловской проводимости при приближении к топологическому переходу и их превращение в зоны устойчивости в точке перехода (или присоединение их к уже существующим зонам).

Прохождение седловой особой точки индекса 2 в прямом направлении, в действительности, аналогично прохождению особой точки индекса 1 в обратном направлении, однако, с заменой областей электронной холловской проводимости на области дырочной холловской проводимости и наоборот. Таким образом, изменение картины устойчивых открытых траекторий при прохождении седловой особой точки индекса 2 в прямом направлении может производить изменения на диаграммах проводимости перечисленных ниже типов со следующими возможными изменениями типа диаграммы:

$$\begin{aligned}
 1_- &\rightarrow A_- \\
 A_- &\rightarrow A_- \\
 B &\rightarrow \{A_+, B\} \\
 A_+ &\rightarrow \{0_+, 1_+, A_+\}.
 \end{aligned}$$

При этом картина зон устойчивости на диаграмме проводимости может претерпевать следующие специфические изменения.

1) Уменьшение размеров некоторого (конечного или бесконечного) числа зон устойчивости и их исчезновение непосредственно в точке топологического перехода.

2) Образование областей сложного поведения проводимости конечного размера в области электронной холловской проводимости при приближении к топологическому переходу и их превращение в зоны устойчивости в точке перехода (или присоединение их к уже существующим зонам).

Аналогично, изменение картины устойчивых открытых траекторий при прохождении седловой особой точки индекса 2 в обратном направлении может производить изменения на диаграммах проводимости перечисленных ниже типов со следующими возможными изменениями типа диаграммы:

$$\begin{aligned} A_- &\rightarrow \{1_-, A_-\} \\ B &\rightarrow B \\ A_+ &\rightarrow \{A_+, B\} \\ 1_+ &\rightarrow A_+ \\ 0_+ &\rightarrow A_+. \end{aligned}$$

При этом картина зон устойчивости на диаграмме проводимости может претерпевать следующие специфические изменения.

1) Появление (конечного или бесконечного числа) новых зон устойчивости нулевого размера в точке перехода и постепенное увеличение их размера при дальнейшем удалении от нее.

2) Исчезновение некоторых зон устойчивости конечного размера (или их частей) с образованием областей сложного поведения проводимости с электронным типом холловской проводимости. При этом, если данный эффект наблюдается на диаграмме типа  $A_+$ , она превращается в диаграмму типа  $B$ , с появлением бесконечного числа зон устойчивости, а также направлений  $\mathbf{B}$ , отвечающих возникновению траекторий Царева или Дынникова на поверхности Ферми.

Здесь можно также отметить, что каждое из приведенных выше описаний может быть использовано также и в случае, когда имеет место прохождение сразу нескольких особых точек одного и того же типа. Такая ситуация, в действительности, может возникать довольно часто для дисперсионных соотношений, обладающих дополнительной (вращательной) симметрией.

Что касается одновременного прохождения особых точек разного типа, такая ситуация является ситуацией необщего положения и наблюдается лишь для специальных дисперсионных соотношений. В частности, она может относиться к соотношениям, разделяющим соотношения с простыми угловыми диаграммами (с единственной зоной устойчивости) и соотношения со сложными угловыми диаграммами.

Каждое из приведенных выше описаний изменения диаграмм проводимости, конечно, может быть использовано и для дисперсионных соотношений с простыми угловыми диаграммами с учетом особенностей эволюции диаграмм проводимости для таких соотношений.

В завершение, нам хотелось бы отметить, что, хотя приведенная выше картина относится в первую очередь к изменениям структуры зон устойчивости на диаграммах проводимости, она также, в действительности, описывает многие особенности появления и исчезновения неустойчивых открытых траекторий системы (1) на поверхности Ферми при описанных перестройках. При этом, если говорить о траекториях типа Царева или Дынникова, их появление неразрывно связано с диаграммами типа  $B$  и, таким образом, полностью определяется картиной зон устойчивости на единичной сфере.

Если рассматривать неустойчивые периодические открытые траектории системы (1), то, как можно было видеть, большинство из них также связано с зонами устойчивости и появляются или вблизи их краев, или в областях сложного поведения проводимости. Как также можно было видеть, большинство таких траекторий при этом не изменяются непосредственно в точке топологического перехода, а претерпевают изменения на некотором расстоянии от него, следуя за изменениями соответствующей зоны устойчивости.

Среди неустойчивых периодических траекторий системы (1), однако, следует также особо отметить траектории, не привязанные ни к какой конкретной зоне устойчивости на диаграмме проводимости. В действительности, направления  $\mathbf{B}$ , отвечающие появлению таких траекторий, почти всегда принадлежат некоторым зонам  $\hat{\Omega}_\alpha$  при рассмотрении всего дисперсионного соотношения, а соответствующие траектории согласованы с устойчивыми открытыми траекториями, возникающими в этих зонах. Однако, появляясь вдали от соответствующего интервала  $(\tilde{\epsilon}_1(\mathbf{B}), \tilde{\epsilon}_2(\mathbf{B}))$ , они обычно не очень интересны с этой точки зрения. Вместо этого, однако, они обычно тесно связаны с топологией заданной



поверхности Ферми и хорошо проявляют ее геометрические свойства. Ярким примером таких траекторий являются периодические траектории, рассматривавшиеся в работе [1]. Нетрудно видеть, что изменения, связанные с появлением или исчезновением таких траекторий, отвечают переходам между диаграммами типа 0 и 1, либо не меняют типа диаграммы проводимости.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассматриваются топологические переходы Лифшица в металлах и связанные с ними изменения в гальваномагнитных явлениях с точки зрения общей задачи Новикова. А именно, рассмотрена картина возможных изменений электронных траекторий в металле при топологических перестройках поверхности Ферми и соответствующих им изменений поведения электропроводности в присутствии сильных магнитных полей. Рассмотрение базируется на классификации незамкнутых электронных траекторий, возникающих на поверхностях Ферми произвольной сложности, и соответствующих им режимов поведения проводимости в сильных магнитных полях. Основу рассмотрения составляет описание возможных изменений картины устойчивых открытых траекторий на поверхности Ферми при топологических переходах. Как показано в работе, переходы Лифшица сопровождаются целым рядом таких изменений, позволяющих определить особенности топологии перехода, исходя из наблюдения проводимости в сильных магнитных полях. Полученные в работе результаты могут служить одним из инструментов исследования топологических переходов Лифшица в металлах со сложными поверхностями Ферми.

**Финансирование.** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант N 21-11-00331 «Геометрические методы в гамильтоновой теории интегрируемых и почти интегрируемых систем».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ **38**, 1569 (1960)
2. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, Наука, Москва (1971).
3. G. E. Volovik, *Topological Lifshitz Transitions*, Fizika Nizkikh Temperatur **43**, 57 (2017).
4. Г. Е. Воловик, *Экзотические переходы Лифшица в топологической материи*, УФН **188**, 95 (2018).
5. И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, ЖЭТФ **31**, 63 (1956).
6. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **35**, 1251 (1958).
7. И. М. Лифшиц, В. Г. Песчанский, ЖЭТФ **38**, 188 (1960).
8. С. П. Новиков, УМН **37**, 3 (1982).
9. А. В. Зорич, УМН **39**, 235 (1984).
10. И. А. Дынников, УМН **47**, 161 (1992).
11. С. П. Царев, Частное сообщение, (1992-1993).
12. И. А. Дынников, Математические заметки **53**, 57 (1993).
13. A. V. Zorich, in: *Geometric Study of Foliations*, Tokyo, November 1993, ed. by T. Mizutani et al., World Scientific, Singapore (1994), p. 479.
14. I. A. Dynnikov, *Surfaces in 3-torus: Geometry of Plane Sections*, Proc. of ECM2, BuDA (1996).
15. I. A. Dynnikov, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Vol. 179, AMS, Providence, RI (1997), p. 45.
16. И. А. Дынников, УМН **54**, 21 (1999).
17. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, Письма в ЖЭТФ **63**, 809 (1996).
18. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **112**, 1710 (1997).
19. С. П. Новиков, А. Я. Мальцев, УФН **168**, 249 (1998).
20. A. Ya. Maltsev and S. P. Novikov, J. Stat. Phys. **115**, 31 (2004).
21. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, Труды МИАН **302**, 296 (2018).
22. С. П. Новиков, Р. Де Лео, И. А. Дынников, А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 761 (2019).
23. A. V. Zorich, Annales de l'Institut Fourier **46**, 325 (1996).
24. A. Zorich, *On Hyperplane Sections of Periodic Surfaces. Solitons, Geometry, and Topology: On the Crossroad*, ed. by V. M. Buchstaber and S. P. Novikov, Translations of the AMS, Ser. 2, AMS, Providence, RI (1997), Vol. 179, p. 173; DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/trans2/179>.

25. A. Zorich, *How do the Leaves of Closed 1-Form Wind around a Surface*, in: *Pseudoperiodic Topology*, ed. by V. I. Arnold, M. Kontsevich, and A. Zorich, Translations of the AMS, Ser. 2, AMS, Providence, RI (1999), Vol. 197, p. 135; DOI: <http://dx.doi.org/10.1090/trans2/197>.
26. Р. Де Лео, УМН **55**, 181 (2000).
27. Р. Де Лео, УМН **58**, 197 (2003).
28. А. Я. Maltsev and S. P. Novikov, *Dynamical Systems, Topology and Conductivity in Normal Metals*, arXiv:cond-mat/0304471; DOI: 10.1023/B:JOSS.0000019835.01125.92
29. А. Я. Maltsev and S. P. Novikov, Solid State Phys., Bulletin of Braz. Math. Society, New Series **34**, 171 (2003).
30. A. Zorich, *Flat Surfaces*, in: *Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry*, ed. by P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove, Springer-Verlag, Berlin (2006), Vol. 1, p. 439.
31. Р. Де Лео, И. А. Дынныйков, УМН **62**, 151 (2007).
32. R. De Leo, I. A. Dynnikov, Geom. Dedicata **138**:1, 51 (2009).
33. И.А. Дынныйков, Труды МИАН **263**, 72 (2008)
34. A. Skripchenko, Discrete Contin. Dyn. Sys. **32**, 643 (2012).
35. A. Skripchenko, Ann. Glob. Anal. Geom. **43**, 253 (2013).
36. I. Dynnikov, A. Skripchenko, *On Typical Leaves of a Measured Foliated 2-Complex of Thin Type*, *Topology, Geometry, Integrable Systems, and Mathematical Physics: Novikov's Seminar 2012-2014*, in: *Advances in the Mathematical Sciences*, ed. by V. M. Buchstaber, B. A. Dubrovin, and I. M. Krichever, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Providence, RI (2014), Vol. 234, p. 173; arXiv: 1309.4884.
37. I. Dynnikov and A. Skripchenko, *Symmetric Band Complexes of Thin Type and Chaotic Sections which are not Actually Chaotic*, Trans. Moscow Math. Soc. **32**, 287 (2015).
38. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Inventiones Mathematicae **206**, 109 (2016).
39. A. Avila, P. Hubert, and A. Skripchenko, Bulletin de la Societe Mathematique de France **144**, 539 (2016).
40. R. De Leo, *A Survey on Quasiperiodic Topology*, in: *Advanced Mathematical Methods in Biosciences and Applications*, ed. by F. Berezovskaya and B. Toni STEAM-H: Science, Technology, Engineering, Agriculture, Mathematics and Health Springer, Cham (2019), p. 53.
41. А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **74**, 149 (2019).
42. И. А. Дынныйков, А. Я. Мальцев, С. П. Новиков, УМН **77**, 109 (2022).
43. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **151**, 944 (2017).
44. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **152**, 1053 (2017).
45. А. Я. Мальцев, ЖЭТФ **156**, 140 (2019).