

КВАЗИЛИНЕЙНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗВИТИЯ ВЕЙБЕЛЕВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В АНИЗОТРОПНОЙ БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

А. А. Кузнецов^{*}, А. А. Нечаев, М. А. Гарасёв, Вл. В. Кочаровский

*Институт прикладной физики Российской академии наук
603950, Нижний Новгород, Россия*

Поступила в редакцию 31 мая 2023 г.,
после переработки 19 июля 2023 г.
Принята к публикации 19 июля 2023 г.

Развит спектральный квазилинейный подход к задаче о ТЕМ-вейбелевской неустойчивости в анизотропной бесстолкновительной плазме, который учитывает лишь интегральное нелинейное взаимодействие мод посредством их совместного изменения средней по пространству функции распределения частиц по скоростям. В рамках данного приближения получена замкнутая система уравнений для одно- и двумерной эволюции пространственных мод (гармоник) функции распределения частиц и электромагнитного поля в условиях, когда ось анизотропии плазмы, волновой вектор и магнитное поле мод взаимно ортогональны друг к другу. Проведено сравнение численного решения этой системы уравнений с имеющимися результатами одномерной аналитической квазилинейной теории в области ее применимости, а также с результатами двумерного моделирования методом частиц в ячейках, учитывающим и прямое четырехволновое взаимодействие мод. Установлено, что в простейших случаях одномерной и аксиально-симметричной двумерной задач для бимаксвелловской плазмы квазилинейные явления оказываются определяющими на весьма длительной стадии нелинейного развития турбулентности. Отмечено, что на более позднем этапе ее затухания и в более общей постановке задачи, в частности, при наличии внешнего магнитного поля, наряду с квазилинейными явлениями может проявляться и непосредственное нелинейное взаимодействие мод. На основе проведенного анализа выявлен вклад тех или иных нелинейных эффектов в эволюцию пространственного спектра вейбелевской турбулентности и изучены ее свойства, включая автомодельный характер и качественно различные стадии динамики неустойчивых мод.

DOI: 10.31857/S0044451023120210
EDN: MYQYLX

1. ВВЕДЕНИЕ

Слабо столкновительная плазма с анизотропным распределением частиц по скоростям является неравновесной [1, 2], и развивающиеся кинетические неустойчивости формируют в ней хаотические электромагнитные поля и согласованную с ними плазменную турбулентность. Ее динамика и свойства определяются нелинейными эффектами, которые во многих случаях, хотя и являются не сильно выраженными, но для полноценного описания требуют трудоемких расчетов кинетики огромного числа частиц (при этом моделирование наиболее эффек-

тивным методом частиц в ячейках [3–8] вносит численный шум, неизбежно искажающий результаты). Такая ситуация характерна для широкого круга задач физики разреженной космической, лазерной и газоразрядной плазмы, в которой время свободного пробега частиц много больше времени развития подобной слабо нелинейной турбулентности [9–12].

Среди неустойчивостей анизотропной плазмы аperiодическая неустойчивость вейбелевского типа [13–21] обладает одним из наибольших инкрементов и вместе с тем не сопровождается сильными резонансными нелинейными эффектами, поскольку ограничивается формированием квазистатических филаментов тока и не приводит к непосредственному возбуждению каких-либо волн. Настоящее исследование посвящено нелинейной стадии ее развития и описанию эволюции спектра возникающей турбулентности в простейших постанов-

^{*} E-mail: kuznetsov.alexey@ipfran.ru

ках одно- и двумерных задач на основе разработанного авторами численного кода, реализующего квазилинейный подход к расчету динамики вейбелевских мод [22]. Он учитывает основные нелинейные явления в указанной задаче и позволяет сразу находить представляющий физический интерес спектр полей и токов, избегая моделирования кинетики частиц. Анализ этого спектра актуален для физики звездного ветра, ударных волн в космической плазме, токовых структур, возникающих при лазерной абляции, и др.; см., например, [6, 8, 23, 24].

В линейном приближении вейбелевская неустойчивость изучена достаточно подробно, особенно для бимаксвелловского распределения частиц [13, 15, 25]. Существующая полностью аналитическая квазилинейная теория эволюции вейбелевской турбулентности разработана лишь в одномерной (1D2V) геометрии, причем для весьма ограниченной области параметров и без должного описания временной эволюции [26]. Полуаналитическое решение системы квазилинейных уравнений в 1D3V-геометрии [5] с опорой на эмпирические данные численного моделирования также применимо лишь для небольшой области параметров плазмы.

В развиваемом численном квазилинейном подходе функция распределения частиц и электрическое и магнитное поля представлены в виде сумм пространственных мод (гармоник), удовлетворяющих самосогласованным квазилинейным уравнениям, в которых все нелинейные явления обусловлены совместным действием мод на форму средней по пространству функции распределения частиц по скоростям. Последняя определяет текущие значения инкрементов (декрементов) и, возможно, действительных частот всех рассматриваемых мод, в остальном эволюционирующих независимо. В результате, в отличие от метода частиц в ячейках, кардинально снижается уровень шумов и удается получать спектры вейбелевской турбулентности в гораздо более высоком качестве и в недоступных ранее областях параметров, правда, ценой потери некоторых слабых нелинейных эффектов при использовании сравнимых или даже больших вычислительных ресурсов.

Для определенности в конкретных расчетах ниже будем выбирать начальную функцию распределения частиц по скоростям бимаксвелловской, считая температуру частиц наибольшей вдоль оси y , называемой осью анизотропии. Для простоты будем предполагать, что плазма и все поля в ней однородны вдоль этой оси, т. е. будем решать систему уравнений Максвелла–Власова [9] в одном (по координате x) или двух (по координатам x и z) измерениях,

а следовательно, полагать нулевой проекцию волновых векторов мод $\mathbf{k}$ на ось анизотропии: $k_y = 0$. При этом в каждой моде электрическое поле $\mathbf{E}$ направлено вдоль оси анизотропии, а магнитное $\mathbf{B}$ ортогонально ей и волновому вектору $\mathbf{k}$ (ТЕМ-моды).

Главная цель представленной работы состоит в изучении нелинейных явлений квазилинейного типа, доминирующих в процессе развития вейбелевской турбулентности. Насколько нам известно, последовательный квазилинейный анализ ее эволюции до сих пор никем не проводился ни для какой анизотропии начальной функции распределения частиц по скоростям (ср., например, [5, 26, 27]). Более того, другими авторами не проводилось даже достаточно длительного моделирования динамики спектра вейбелевских мод в простейшей постановке задачи об одномерной (1D2V) и аксиально-симметричной двумерной (2D3V) турбулентностях, рассматриваемых в настоящей работе. Вместе с тем некоторые выявленные нами особенности эволюции спектра и динамики отдельных мод аналогичны численно найденным ранее в других постановках задачи о вейбелевской турбулентности.

Следует отметить, что полноценное (3D3V) долговременное компьютерное моделирование изучаемых турбулентных явлений пока невозможно из-за недостаточной мощности вычислительных ресурсов. В ограниченных расчетах методом частиц в ячейках, проведенных в данной работе и ранее, далеко не всегда удается выделить слабые нелинейные эффекты, например, четырехволновое взаимодействие мод, на фоне более сильных квазилинейных эффектов и трудно отделимых неизбежных компьютерных шумов. Подобное выделение стало возможным только недавно и осуществлено в единичных случаях при специальных условиях для нестандартных задач (см. [28, 29]), так что ниже оно затрагивается лишь вскользь.

Схема решения квазилинейных уравнений поясняется в разд. 2 на примере одномерной задачи для дискретных мод с коллинеарными волновыми векторами, имеющими только компоненты k_x . Результаты численного исследования особенностей динамики соответствующей одномерной квазилинейной вейбелевской турбулентности и их сравнение с результатами имеющейся аналитической теории даны в разд. 3. В разд. 4 используются аналогичные квазилинейные уравнения для двумерной задачи и приводятся результаты их решения в простейшем случае аксиальной симметрии, в котором температура частиц и все характеристики вейбелевской турбулентности изотропны в плоскости xz , т. е. спектр

зависит только от радиальной компоненты k волнового вектора. Эти результаты, полученные для случая двумерной аксиально-симметричной турбулентности, сравниваются с полученными методом частиц в ячейках при помощи кода ЕРОСН [30], учитывающего и более тонкие нелинейные эффекты, в том числе четырехволновое взаимодействие. В заключительном разделе суммируются общие свойства эволюции вейбелевской турбулентности в бимаксвелловской плазме: автомодельный характер поведения спектра в целом и четыре качественно различные стадии динамики отдельных неустойчивых мод, а также сопоставляются нелинейные явления, учитываемые в квазилинейном подходе и выходящие за его рамки.

2. АДИАБАТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА МОД И СХЕМА ИХ СВЯЗИ В УСЛОВИЯХ СЛАБОГО ЧЕТЫРЕХВОЛНОВОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Для бесстолкновительной плазмы, в которой на рассматриваемых временах эволюции вейбелевской турбулентности можно пренебречь движением тяжелых ионов, самосогласованные уравнения Максвелла–Власова для электрического $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$ и магнитного $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ полей и функции распределения электронов $f(v_x, v_y, v_z, x, z, t)$ имеют вид

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_e} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (3)$$

где c — скорость света в вакууме, e и m_e — заряд и масса электрона,

$$\mathbf{j} = e \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{v} f(v_x, v_y, v_z, x, z, t) dv_x dv_y dv_z$$

— плотность тока,

$$N = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x, v_y, v_z, x, z, t) dv_x dv_y dv_z$$

— концентрация электронов. Здесь и ниже речь идет о так называемых ТЕМ-возмущениях, в которых взаимно ортогональны друг к другу волновой вектор и магнитное и электрическое поля, причем последнее параллельно оси анизотропии плазмы. При этом выше учтено, что для двумерной

задачи радиус-вектор является двухкомпонентным, $\mathbf{r} = (x, 0, z)$, а вектор скорости — трехкомпонентным, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ (в одномерной задаче отсутствуют зависимости от координаты z и скорости v_z , но сохраняются зависимости от двух других компонент v_x, v_y).

Положим, что в начальный момент времени нормированная функция распределения по скоростям $c^3 f/N$ имеет бимаксвелловский вид:

$$\Psi(\boldsymbol{\beta}) = \frac{1}{\pi^{3/2} \beta_{\perp 0}^2 \beta_{\parallel 0}} \exp \left(-\frac{\beta_x^2 + \beta_z^2}{\beta_{\perp 0}^2} - \frac{\beta_y^2}{\beta_{\parallel 0}^2} \right). \quad (4)$$

Здесь $\beta_{x,y,z} = v_{x,y,z}/c$, т. е. $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$, и в дальнейшем используется параметр анизотропии

$$A_0 = \beta_{\parallel 0}^2 / \beta_{\perp 0}^2 - 1,$$

определяемый отношением большей тепловой скорости к меньшей.

Квазилинейный подход к описанию ТЕМ-вейбелевской неустойчивости основан на разложении по пространственным модам (гармоникам) решения уравнений Максвелла–Власова [9] с шумоподобным начальным возмущением магнитного поля, обладающим примерно равномерным спектром в области неустойчивых волновых чисел мод. Особенно эффективным подобное разложение является тогда, когда ключевую роль играет интегральное нелинейное взаимодействие мод посредством их совместного изменения средней по пространству функции распределения частиц по скоростям. Для вейбелевской турбулентности это оправдано ввиду слабой нелинейности кинетического уравнения Власова в рассматриваемых условиях отсутствия квазимонохроматических электромагнитных волн и их резонансного взаимодействия [22]. В частности, как показали тестовые расчеты, для любой отдельной моды магнитного (и соответствующего электрического) поля

$$B_1(t, x) = \text{Re} [B_1(t) \exp(-ikx)]$$

с волновым вектором $\mathbf{k}$, для определенности направленным вдоль орта $\mathbf{x}_0$, можно не учитывать кратные гармоники ℓk с целым $\ell > 1$ и необходимо учесть только три гармоники поправок к функции распределения,

$$\delta f_\ell(t, x) = \text{Re} [f_\ell(t) \exp(-i\ell kx)],$$

со значениями $\ell = 0, 1, 2$. При этом возбуждение четной гармоники $\ell = 2$ магнитного поля фактически невозможно благодаря ограничениям симмет-

рии в одномерной и аксиально-симметричной двумерной задачах. Здесь и ниже $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$, $\mathbf{z}_0$ — единичные орты декартовой системы координат.

Наличие большого числа однотипных не сфабризованных мод, достаточно плотно заполняющих значимую область волновых векторов, гарантирует гладкость формы и плавность изменения функции распределения, исключая артефакты когерентной интерференции и отрицательные значения функции распределения электронов всюду, кроме, возможно, несущественной, содержащей крайне мало частиц, области их скоростей, очень больших по сравнению с тепловыми скоростями. При этом по существу реализуется адиабатическая динамика каждой моды, непрерывно подстраивающейся к изменяющейся функции распределения частиц. Корректность такого рода теории возмущений, а фактически — соблюдение иерархии малости амплитуд последующих гармоник по сравнению с предыдущими (как гармоник функции распределения, $|\delta f_\ell| \gg |\delta f_{\ell+1}|$, так и аналогичных гармоник магнитного или электрического полей) проверены нами в случаях задания одной или двух производящих мод.

Так, в случае единственной производящей моды нелинейно связываются все кратные гармоники функции распределения ℓk с $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots$ и нечетные гармоники ТЕМ-поля ℓk с $\ell = 1, 3, \dots$ (в силу отсутствия токов на четных гармониках из-за свойств четности функции распределения), но учет высших гармоник, начиная с $\ell = 3$, почти не изменяет результат. Удостовериться в этом позволяет следующая система связанных уравнений для кратных (комплексных) гармоник-возмущений функции распределения, отвечающая теории возмущений до $\ell = 4$:

$$\mathbf{B} = \text{Re} [B_1(t) \exp(-ikx) + B_3(t) \exp(-3ikx)] \mathbf{z}_0, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \hat{\phi}(\Omega_1, f_1^*) + \hat{\phi}^*(\Omega_1^*, f_1) + \\ + \hat{\phi}(\Omega_3, f_3^*) + \hat{\phi}^*(\Omega_3^*, f_3) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + ikv_x f_1 + 2\hat{\phi}(\Omega_1, f_0) + \\ + \hat{\phi}^*(\Omega_1^*, f_2) + \hat{\phi}(\Omega_3, f_2^*) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial t} + 2ikv_x f_2 + \hat{\phi}(\Omega_1, f_1) + \\ + \hat{\phi}^*(\Omega_1^*, f_3) + \hat{\phi}(\Omega_3, f_3^*) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial t} + 3ikv_x f_3 + 2\hat{\phi}(\Omega_3, f_0) + \\ + \hat{\phi}^*(\Omega_1^*, f_4) + \hat{\phi}(\Omega_1, f_2) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial t} + 4ikv_x f_4 + \hat{\phi}(\Omega_1, f_3) + \hat{\phi}(\Omega_3, f_1) = 0, \quad (10)$$

где опущены очевидные осцилляторные уравнения для первой и третьей гармоник магнитного поля (5), получающиеся из уравнений (1), (2) и в силу их линейности включающие только соответствующие первую и третью гармоники функции распределения. Для сокращения записи здесь введен оператор

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\Omega_n, f(\mathbf{v})) = \frac{i}{2nk} \frac{\partial \Omega_n}{\partial t} \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial v_y} - \\ - \frac{1}{2} \Omega_n \left(v_x \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial v_y} - v_y \frac{\partial f(\mathbf{v})}{\partial v_x} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

и комплексная гирочастота $\Omega_n = eB_n/(m_e c)$. Данная система схематически представлена на рис. 1, а

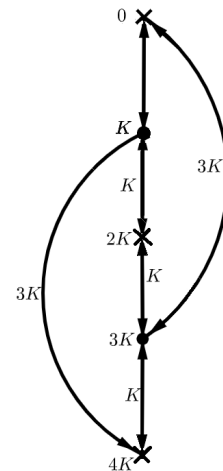


Рис. 1. Схема связи четырех гармоник функции распределения частиц в самосогласованной системе уравнений (5)–(10) для одной производящей моды. Узел на схеме отвечает уравнению для соответствующей гармоники. Если поле некоторой гармоники тождественно равно нулю, то соответствующий узел изображен в виде крестика, а если нет, то в виде точки. Входящая в узел стрелка отвечает слагаемому в уравнении для гармоники, соответствующей этому узлу. В таком слагаемом присутствует гармоника поля, соответствующая гармонике, указанной на стрелке, и гармоника функции распределения частиц, указанная на узле, из которого стрелка исходит

результат прямой проверки корректности ее решения путем сравнения с решением исходных уравнений (1)–(3) кодом ЕРОСН при начальном возбуждении одной сильной моды существенно выше уровня

шумов продемонстрирован на рис. 2 (решения совпадают с точностью до нескольких процентов). В

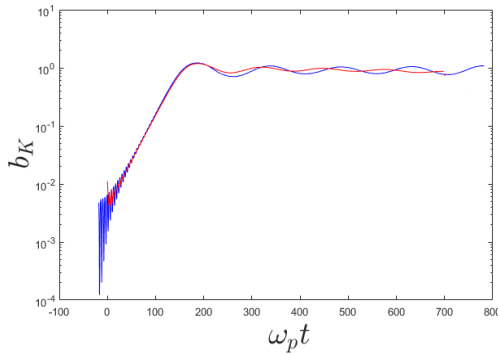


Рис. 2. Эволюция одной моды: сравнение хода амплитуды основной гармоники магнитного поля в квазилинейном расчете по уравнениям (6)–(10) (синяя линия) и в расчете методом частиц в ячейках с помощью кода ЕРОСН по уравнениям (1)–(3) (красная линия) при $A_0 = 10$, $K = 1.2$

качестве неявной проверки слабой генерации высших гармоник в полученной системе уравнений было показано, что ее численное решение для основной гармоники (моды) магнитного поля $B_1(t)$, непосредственно создаваемой первой гармоникой функции распределения $f_1(t)$, практически не отличается от численного решения значительно упрощенной системы, в которой эволюция данной гармоники $B_1(t)$ (и $f_1(t)$) определяется лишь согласованной динамикой нулевой и второй гармоник функции распределения $f_{0,2}(t)$, но не третьей (и высшими) гармониками магнитного поля и функции распределения.

В общем случае многомодовой динамики вейбелевской неустойчивости неизбежно возникают перекрестные гармоники вида $k_i \pm k_j$, $2k_i \pm k_j$ и т.д. Схема взаимосвязи подобных перекрестных гармоник в случае наличия двух производящих вейбелевских мод дана на рис. 3. Подобно одномодовой иллюстрации корректности пренебрежения кратными гармониками, была показана слабость генерации перекрестных гармоник, в частности, на основе сравнения решений полной системы уравнений и сокращенной системы, содержащей гармоники не выше второго порядка, включая суммарные и разностные, в случае начального задания только двух сильных мод. Учет четырехволнового взаимодействия мод в подобной системе квазилинейных уравнений является крайне громоздким и выходит за рамки статьи.

Итак, имеем следующую квазилинейную систему уравнений для одномерной вейбелевской турбулентности с большим числом m коллинеарных мод

$\{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, волновые векторы которых направлены поперек оси анизотропии, часто расположены и перекрывают всю существенную область неустойчивости:

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} + \sum_{n=1}^m \left(\hat{\Phi}(b_{K_n}, \psi_{K_n}^*) + \hat{\Phi}^*(b_{K_n}^*, \psi_{K_n}) \right) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi_{K_n}}{\partial \tau} + iK_n \beta_x \psi_{K_n} + 2\hat{\Phi}(b_{K_n}, \psi_0) + \hat{\Phi}^*(b_{K_n}^*, \psi_{2K_n}) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \psi_{2K_n}}{\partial \tau} + 2iK_n \beta_x \psi_{2K_n} + \hat{\Phi}(b_{K_n}, \psi_{K_n}) = 0, \quad (14)$$

$$\ddot{b}_{K_n} + K_n^2 b_{K_n} = \frac{iK_n}{\beta_{||0}} \iint_{-\infty}^{\infty} \beta_y \psi_{K_n}(\tau, \beta_x, \beta_y) d\beta_x d\beta_y. \quad (15)$$

Согласно ей, магнитное поле имеет вид суммы мод по целочисленному индексу n :

$$B(t, x) = \text{Re} \sum_{n=1}^m B_{k_n}(t) \exp(-ik_n x).$$

Аналогичный вид имеет каждая из двух кратных гармоник-возмущений функции распределения частиц по скоростям, т. е. компонент $\delta f_1(t, x)$ и $\delta f_2(t, x)$, разложенных на комплексные гармоники $f_{1k_n}(t)$ и $f_{2k_n}(t)$ соответственно; нулевая (действительная) гармоника $f_0(t) = \delta f_0(t)$ зависит только от вектора скорости и дает поправку к функции распределения, усредненную по оси x . Здесь и ниже используются время и волновое число, нормированные на плазменные частоту и масштаб,

$$\tau = \omega_p t, \quad K = \frac{kc}{\omega_p}, \quad \omega_p^2 = \frac{4\pi N e^2}{m_e}. \quad (16)$$

Комплексные амплитуды мод (гармоник) магнитного поля и функции распределения тоже нормированы:

$$\begin{aligned} b_{K_n} &= \frac{B_{K_n}}{\sqrt{8\pi N T_{||0}}}, \\ T_{||0} &= \frac{m_e c^2 \beta_{||0}^2}{2}, \\ \psi_{\ell K_n} &= \frac{c^2 f_{\ell K_n}}{N}, \quad \ell = 0, 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Для многомодовой задачи введен оператор

$$\hat{\Phi}(b_{K_n}, \psi(\beta)) = \frac{i}{2K_n} \frac{\partial b_{K_n}}{\partial \tau} \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_y} -$$

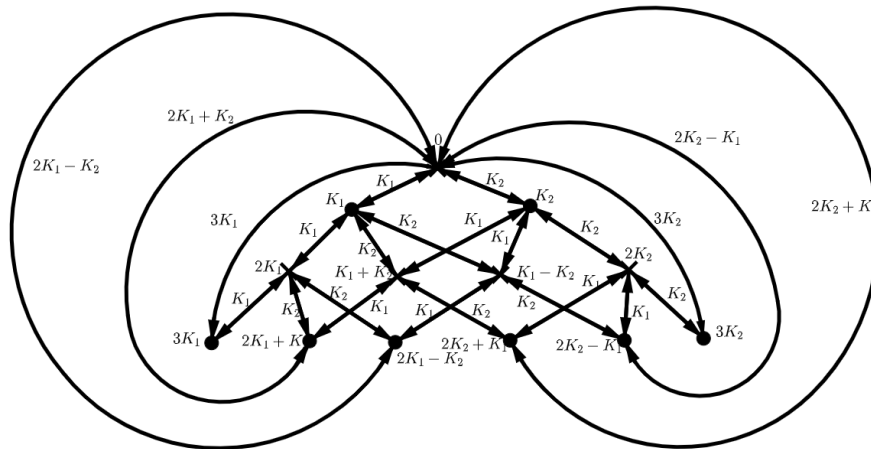


Рис. 3. Схема связи гармоник функции распределения в самосогласованной системе уравнений для двух производящих мод. Обозначения те же, что на рис. 1

$$-\frac{1}{2}b_{K_n} \left(\beta_x \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_y} - \beta_y \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_x} \right), \quad (18)$$

отличающийся нормировкой переменных и параметров от указанного ранее оператора (11) в одномерной задаче. Квадратичные слагаемые в уравнениях обуславливают квазилинейное взаимодействие между не скоррелированными по фазам модами. Оно осуществляется посредством их коллективного нелинейного воздействия на однородную компоненту функции распределения, приводящего к изменению ее формы, снижению анизотропии распределения, появлению ненулевых действительных частот мод и их декрементов, т.е. смене знака их инкрементов, и, как следствие, насыщению неустойчивости. Для применимости теории слабой турбулентности [2, 31] в рассматриваемой задаче необходима как справедливость сформулированной теории возмущений, так и возможность на нелинейной стадии эволюции использовать для мод линейное дисперсионное уравнение, которое содержит текущую функцию распределения частиц по скоростям, усредненную по пространству и отличную от начальной.

Все полученные нами системы квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений (например, система (12)–(15) с оператором (18)) решались стандартным методом Стермера–Верле (Leapfrog) [32]. Шаг по времени составлял малую величину $d\tau \sim 0.05\text{--}0.50$ в сравнении с наименьшим временным масштабом рассматриваемой приведенной к безразмерному виду системы уравнений, который определяется волновыми числами мод магнитного поля и тока ($\sim \pi/K$) и имеет порядок единицы. Расчетная сетка для нормированных скоростей β_x, β_y ,

β_z как переменных трех компонент (12)–(14) анизотропной функции распределения, разложенных по модам $\{K_1, K_2, \dots, K_m\}$, выбиралась анизотропной с соответствующими шагами

$$d\beta_x = d\beta_z \sim \beta_{\perp 0}/15$$

и

$$d\beta_y \sim \beta_{\parallel 0}/15 = \beta_{\perp 0} \sqrt{1 + A_0}/15.$$

Количество мод m в типичных расчетах составляло несколько сотен и выбиралось из условия независимости (с точностью до нескольких процентов) эволюции вычисляемого среднеквадратичного магнитного поля от дальнейшего увеличения числа m , что в одномерной задаче обычно имело место начиная с чисел ~ 30 . Во всех расчетах для определенности начальная поперечная тепловая скорость электронов полагалась равной $\beta_{\perp 0} = 0.1$.

3. ЭВОЛЮЦИЯ ОДНОМЕРНОЙ ВЕЙБЕЛЕВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Одномерная эволюция большого числа сонаправленных вейбелевских мод, плотно покрывающих область неустойчивости, определяется представленной системой уравнений (12)–(15) с оператором (18) при задании величины начальной анизотропии бимаксвелловской плазмы A_0 , одной из тепловых скоростей, например $\beta_{\perp 0}$, и начального спектра мод функции распределения и электромагнитного поля. Ключевым параметром нелинейного развития динамического спектра турбулентности является начальная анизотропия A_0 , задающая,

в частности, линейный спектр неустойчивых вейбелевских мод, т.е. их инкременты. При $A_0 \ll 1$ максимальный инкремент (в единицах ω_p) равен $\gamma_{max} \approx 2\beta_{\perp 0}(A_0/3)^{3/2}$ и достигается для оптимального волнового числа

$$K_{opt} \approx (A_0/3)^{1/2},$$

при $A_0 \gg 1$ имеем

$$\gamma_{max} \approx \beta_{\perp 0} \left([(A_0 + 1)/2]^{1/2} - 1 \right)$$

для

$$K_{opt} \approx \left([(A_0 + 1)/2]^{1/2} - 1 \right)^{1/2}.$$

Ниже отдельно обсуждаются случаи низкой ($A_0 = 0.25$) и высокой ($A_0 = 10$) начальной анизотропии. В обоих случаях получаются вполне сравнимые интегральные характеристики турбулентности, вычисляемые с использованием квазилинейных расчетов и моделирования методом частиц в ячейках при помощи кода ЕРОСН. Однако количественно результаты последнего, как правило, отличаются в полтора-два раза, поскольку в одномерной задаче он вносит сильные шумы в несвойственные ей компоненты полей и скоростей, заметно искажающие функцию распределения частиц, а следовательно, квазилинейную эволюцию спектра (другие нелинейные эффекты, в том числе четырехволновые, для одномерной турбулентности не характерны).

Согласно [33], на основе энергетических инвариантов [27] для рассматриваемой одномерной задачи может быть получено следующее приближенное аналитическое соотношение между текущими значениями нормированного среднеквадратичного магнитного поля b_{av} , характерного волнового числа $\langle K \rangle^1$ и параметра анизотропии плазмы A (отличного от введенного в [33]), если считать, что пространственный спектр вейбелевской турбулентности достаточно узок:

$$b_{av}^2 = \frac{A_0 - A}{1 + A_0} \frac{0.5 \langle K \rangle^2}{A \langle K \rangle^2 + A + 3 \langle K \rangle^2 + 2}, \quad (19)$$

$$\langle \dots \rangle = \frac{\int \dots b_k dk}{\int b_k dk}, \quad (20)$$

¹⁾ Во многих случаях представленному соотношению немного лучше удовлетворяет волновое число $K_{max}(t)$, отвечающее максимуму спектра турбулентности, а не указанное выше число $\langle K \rangle$, усредненное по спектру мод b_k , хотя эти числа довольно близки.

$$A = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_y^2 \psi_0(\tau, \beta_x, \beta_y) d\beta_x d\beta_y}{\int_{-\infty}^{+\infty} \beta_x^2 \psi_0(\tau, \beta_x, \beta_y) d\beta_x d\beta_y} - 1. \quad (21)$$

Для представленных результатов моделирования одномерной турбулентности, согласованной со сложно меняющейся (не бимаксвелловской) функцией распределения частиц, это соотношение оказалось хорошо выполняющимся, обычно с точностью до нескольких процентов.

3.1. Низкая начальная анизотропия

Результаты имеющейся аналитической квазилинейной теории [26], приближенно справедливой в одномерной задаче при малом параметре анизотропии $A \ll 1$, но не описывающей эволюцию турбулентности в явном виде и не учитывающей деформацию функции распределения частиц по скоростям вдоль оси анизотропии, трудно непосредственно сопоставить с приведенным выше соотношением и с прямым численным моделированием динамики спектра. Однако проведенное нами косвенное сопоставление показывает, что качественно эта теория вполне совместима с получаемыми более точными численными результатами в области ее применимости. Основные приближения аналитической квазилинейной теории [26] состоят в малости инкрементов, $\gamma_{K_n} \ll K_n \beta_{\perp 0}$, и в узости области изменения усредненной в пространстве функции распределения частиц по скоростям, $\delta \beta_x \ll \beta_{\perp 0}$. Первое требование призвано гарантировать применимость используемого дисперсионного уравнения, а второе фактически сводится к указанному условию $A \ll 1$.

Интересующее нас косвенное сопоставление удастся провести с использованием найденного в аналитической теории эволюционного параметра h , величина которого определяется адиабатической динамикой мод и однозначно задает вид деформированной функции распределения:

$$|\dot{b}_{K_n}| = \gamma_{K_n} |b_{K_n}|, \quad (22)$$

$$h = \sum_{K_n} \frac{|b_{K_n}|^2}{K_n^2}. \quad (23)$$

На рис. 4 показана характерная деформация функции распределения частиц, произошедшая спустя время $\omega_p t = 9000$ (т.е. примерно втрое позже начала заметного насыщения роста энергии турбулентного магнитного поля) и найденная как непосредственно из численного решения квазилинейной си-

стемы уравнений (12)–(15), так и косвенно из аналитической квазилинейной теории (22), (23) с использованием указанного численного решения для вычисления эволюционного параметра h при малой начальной анизотропии $A_0 = 0.25$. Как видим, относительная деформация функции распределения составляет доли процента и действительно происходит в области скоростей, меньших тепловой скорости. В этой области угол движения электронов относительно оси анизотропии y в среднем заметно увеличивается, хотя качественное изменение траекторий с появлением баунс-осцилляций фактически происходит только для малой доли электронов со скоростями, лежащими вдоль оси анизотропии в небольшом конусе углов с раскрытием, сужающимся с уменьшением параметра анизотропии A_0 . В целом в резуль-

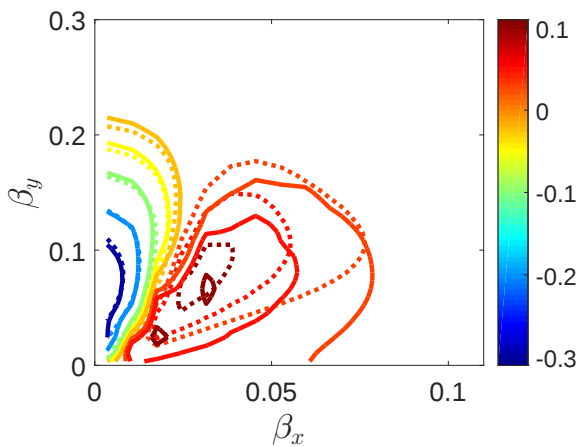


Рис. 4. Построенные на основе одномерного квазилинейного расчета (сплошные линии) и вычисленные на основе аналитической теории [26] (пунктирные линии) для момента времени $\omega_p t = 9000$ линии уровня $-0.3, -0.2, -0.1, -0.05, -0.025, 0.025, 0.05, 0.1$ и поправки к однородной компоненте функции распределения (4), которая в начальный момент времени являлась бимаксвелловской с параметром анизотропии $A_0 = 0.25$

тате насыщения вейбелевской неустойчивости функция распределения по скоростям уплощается в своей центральной части, теряя там бимаксвелловскую форму и приобретая более сложный (в дальнейшем слабо меняющийся) анизотропный вид, причем полный параметр анизотропии уменьшается очень мало, на величину порядка 1–2%, сначала осциллируя, а потом оставаясь почти постоянным.

Несмотря на приближенный характер аналитической квазилинейной теории, ее отличия от более точного численного квазилинейного моделирования при сравнении величин среднеквадратичного магнитного поля b_{av} , эволюционного парамет-

ра h и характерного волнового числа $\langle K \rangle$ на нелинейной стадии ($\omega_p t > 3000$) не превышают 20% (рис. 5). Наибольшие расхождения наблюдаются в переходной области от быстрого экспоненциального роста к медленной квазилинейной эволюции. В отличие от ожидавшегося в аналитической теории плавно-монотонного изменения всех указанных величин, данный переход в численном квазилинейном моделировании, как и в расчетах методом частиц в ячейках, демонстрирует небольшие осцилляции этих величин (за исключением монотонного уменьшения характерного волнового числа примерно на четверть от исходного значения). Их средние значения после переходной стадии со временем меняются очень слабо, что отвечает формированию долгоживущих (самосогласованных) одномерных токовых структур (слоев) в плазме. С квазилинейной точки зрения такое поведение объясняется сначала осцилляциями доминирующих в спектре мод, которые (как и остальные моды, см. ниже) наряду с уменьшающимися инкрементами приобретают действительные частоты из-за сложного изменения функции распределения электронов, а затем установлением почти не меняющихся амплитуд этих мод. Последнее обусловлено тем обстоятельством, что их инкременты оказываются близки к нулю, причем в основном благодаря выполаживанию центральной части функции распределения, поскольку в целом ее анизотропия ослабляется незначительно. Вопрос о законах медленного роста других мод с очень малыми волновыми числами на гораздо более поздней стадии развития турбулентности пока мало изучен.

Типичные эволюция всего спектра и динамика отдельных мод на временах порядка десяти времен достижения насыщения наиболее неустойчивой моды с волновым числом $K_{opt} \approx 0.28$ показаны на рис. 6 и 7. Для определенности в квазилинейном моделировании в качестве начального использовался равномерный спектр мод с заданной малой амплитудой. Чем она ниже, тем сильнее в ходе первоначального экспоненциального роста спектр сужается около моды с волновым числом K_{opt} , приобретая колоколообразный вид функции Гаусса. Доминирующие моды с близкими волновыми числами, формирующиеся к моменту насыщения, вступают в квазилинейное взаимодействие и деформируют центральную часть функции распределения, ограничивая свой рост и рост коротковолновых мод, но позволяя расти более длинноволновым модам. Коротковолновое крыло спектра, которое лежит справа от моды с волновым числом K_{max} , обладающей наибольшей ам-

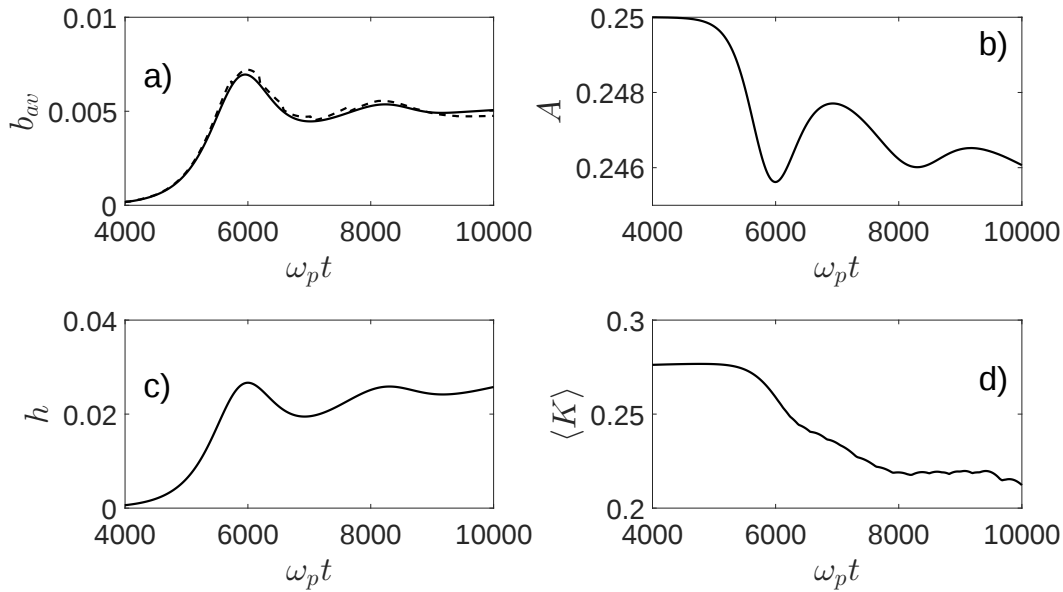


Рис. 5. Эволюция а) среднеквадратичного магнитного поля b_{av} (сплошная линия) и оценки этой величины (19) (штриховая), б) параметра анизотропии A , в) эволюционного параметра h , г) характерного среднего волнового числа $\langle K \rangle$ согласно численному одномерному квазилинейному моделированию при $A_0 = 0.25$

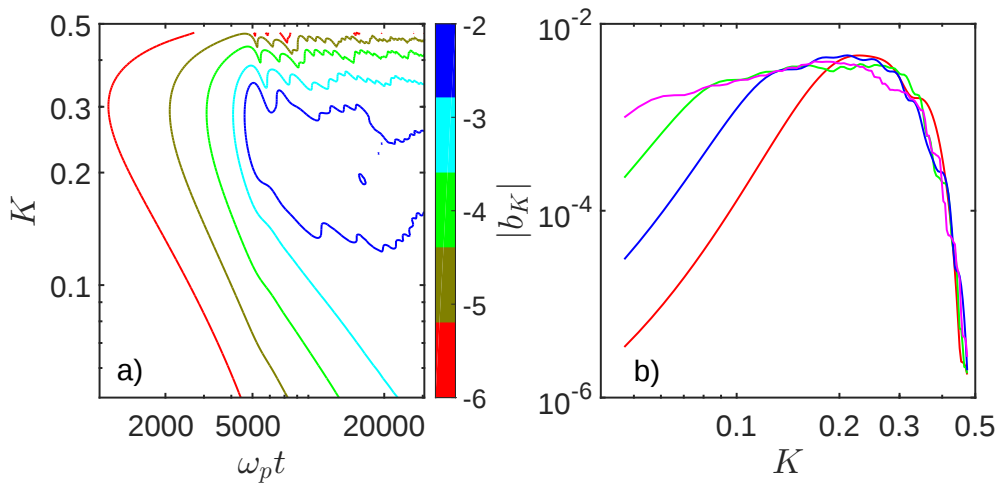


Рис. 6. Эволюция спектра турбулентности, найденная в одномерном квазилинейном расчете, в двойном логарифмическом масштабе: а) линии уровня логарифма амплитуд мод магнитного поля $|b_K|$; б) спектр $|b_K|$ магнитного поля в моменты времени $\omega_p t = 6000$ (красные линии), 10000 (синие линии), 16000 (зеленые линии), 24000 (розовые линии). Начальная анизотропия $A_0 = 0.25$

плитудой магнитного поля, имеет довольно сложную форму, но в целом допускает крутую степенную аппроксимацию.

Значительная часть длинноволнового крыла спектра, которая примыкает к плато, образованному насыщенными свой рост модами, на протяжении длительного промежутка нелинейной эволюции хорошо аппроксимируется степенной зависимостью с показателем, примерно равным 5

и мало меняющимся со временем; см. рис. 6б. Это обстоятельство дает основание для гипотезы о частичной автомодельности процесса. После насыщения неустойчивости среднее волновое число спектра $\langle K \rangle$ понемногу смещается в длинноволновую сторону. Одновременно с этим немного растет и дисперсия спектра $\sigma^2 = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2$ (см. (20)), которая снижалась на линейной стадии развития неустойчивости. Возможная связь указанной

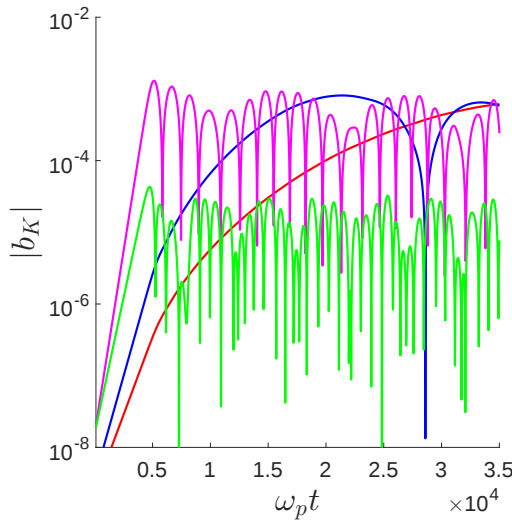


Рис. 7. Эволюция четырех типичных мод ($K = 0.08$ — красная линия, $K = 0.11$ — синяя, $K = 0.3$ — розовая, $K = 0.4$ — зеленая), взятых из спектра рис. 6. Оптимальное волновое число $K_{opt} \approx 0.28$

эволюции спектра с формированием или разрушением долгоживущих токовых слоев в одномерной вейбелевской турбулентности еще не изучалась.

На рис. 7 представлена характерная эволюция амплитуд мод с учетом их квазипериодических осцилляций (которые замыкаются при сложении мод и не видны при визуализации спектра на рис. 6, где проведено усреднение по близким модам). Пока мода с наибольшим инкрементом не достигнет насыщения, остальные моды растут экспоненциально со своими (разными) инкрементами и не испытывают осцилляций. После этого момента времени моды вблизи оптимальной и более коротковолновые моды тоже практически сразу насыщаются и начинают довольно быстро колебаться, почти не меняя своей амплитуды, т. е. у них величина инкремента значительно ниже появившейся действительной частоты. Вместе с тем более длинноволновые моды с инкрементом, значительно меньшим максимального, продолжают возрастать, правда, почти по степенному закону с различными показателями порядка 3–5, достигают амплитуды порядка максимальной амплитуды моды с оптимальным волновым числом $K_{opt} \approx 0.28$ и только после этого начинают медленно осциллировать с почти не уменьшающимся уровнем огибающей. Такая динамика мод согласована с указанной выше эволюцией их полного спектра, имеющей автомодельные черты.

Согласно даваемой аналитической теорией [26] оценке уровня насыщения эволюционного пара-

метра h в зависимости от начального параметра анизотропии, нетрудно оценить средний квадрат нормированного насыщающего магнитного поля (см. (17)), если учесть, что в момент насыщения неустойчивости в спектре доминируют моды с волновыми числами вблизи оптимального K_{opt} , отвечающего наибольшему линейному инкременту:

$$b_{sat}^2 \approx 0.3 \frac{A_0^5}{(1 + A_0)^6}. \quad (24)$$

Полученная оценка соответствует значениям насыщающего магнитного поля, найденным в одномерной задаче в рамках осуществленных нами квазилинейных расчетов, и дает его резкое убывание по закону $\approx 0.3A_0^5$ при уменьшении начального параметра анизотропии (рис. 8a). Для начальных параметров анизотропии больше единицы данная аналитическая оценка неприменима, а численное моделирование показывает, что средний квадрат нормированного насыщающего поля с ростом параметра анизотропии стремится к величине чуть меньшей 0.1 (рис. 8b). При этом, как будет ясно из разд. 3.2, эволюция спектра одномерной турбулентности существенно изменяется. Кроме того, следует заметить, что в более реальном случае двумерной турбулентности, согласно рис. 8b и разд. 4, не только меняется характер спектральной эволюции турбулентности, но и сама зависимость насыщающего магнитного поля от начального параметра анизотропии оказывается существенно другой, сильно отличающейся от (24) в сторону увеличения при малых A_0 и по-другому выходящей к максимальному значению при больших A_0 ; см., например, [4, 22].

3.2. Высокая начальная анизотропия

Если начальная анизотропия велика, $A_0 \gg 1$, то исходные инкременты мод тоже велики, турбулентность развивается быстро и сразу в более широком интервале волновых чисел (вблизи оптимальной величины K_{opt} и существенно левее нее). На стадии насыщения роста этих мод функция распределения частиц значительно деформируется (в два и более раз) во всей области скоростей порядка тепловых, а не только вблизи своего максимума, как при $A_0 \ll 1$.

Согласно нашим расчетам, проведенным для определенности при $A_0 = 10$ (см. рис. 9 и ср. рис. 4), в данном процессе происходит быстрое увеличение поперечной к оси анизотропии скорости электронов, двигавшихся сначала преимущественно вдоль

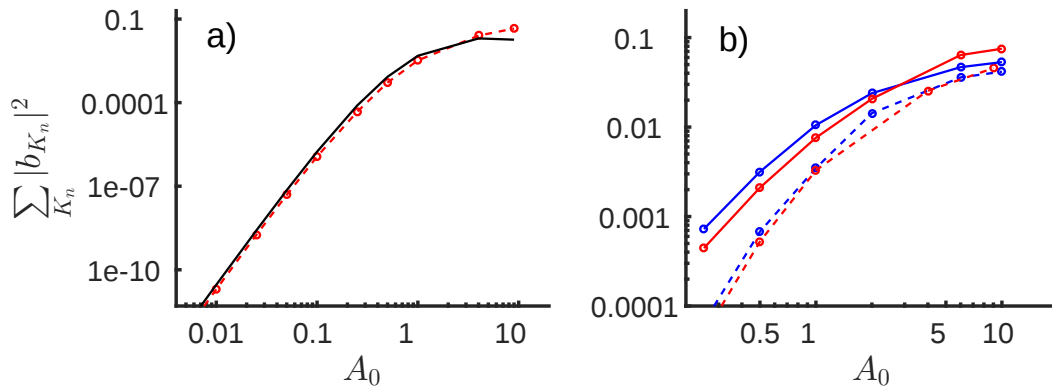


Рис. 8. Сравнение зависимостей среднего квадрата нормированного насыщающего магнитного поля b_{sat}^2 от начального параметра анизотропии A_0 а) согласно оценке (24) (черная линия) и численному квазилинейному моделированию по уравнениям (12)–(15) (красные линии); б) согласно этому же моделированию (красная линия) и расчетам методом частиц в ячейках с помощью кода ЕРОСН (синие линии) в одномерном (штриховые) и двумерном (сплошные) случаях

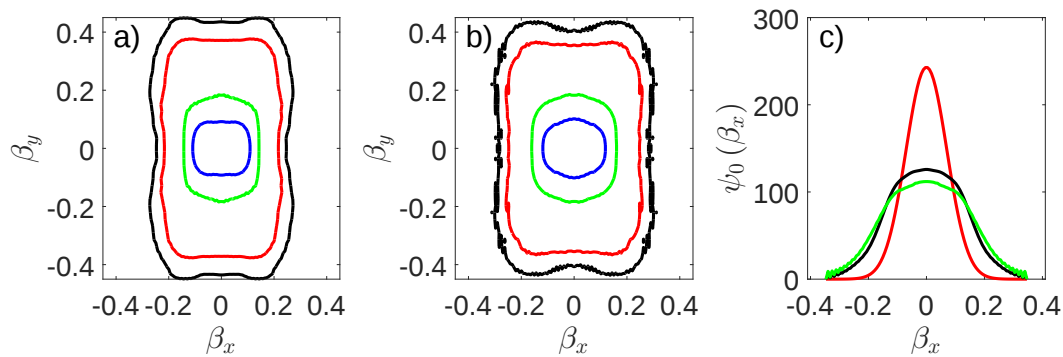


Рис. 9. а, б) Линии уровня 0.05 (черные), 0.1 (красные), 0.5 (зеленые), 0.8 (синие), отсчитанные от максимального значения функции распределения в момент времени $\omega_p t = 80$ (а), 440 (б). в) Распределение частиц по величине нормированной компоненты скорости β_x , ортогональной оси анизотропии, в моменты времени $\omega_p t = 0$ (красная линия), 80 (черная), 440 (зеленая). Приведены данные одномерного квазилинейного расчета при $A_0 = 10$

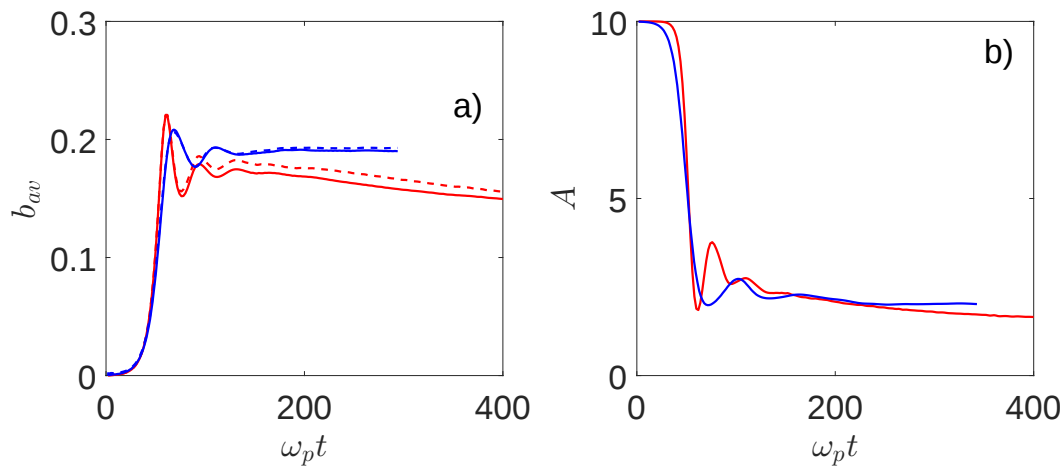


Рис. 10. Эволюция а) среднеквадратичного магнитного поля b_{av} (сплошные линии) и оценки этой величины (19) (штриховые), а также б) параметра анизотропии A согласно численному квазилинейному моделированию (красные линии) и расчетам методом частиц в ячейках (синие) в одномерной задаче при $A_0 = 10$

этой оси, так что центральная часть распределения в значительной мере переходит на периферию и его форма вместо овальной становится прямоугольной с характерным отношением сторон порядка текущего значения параметра анизотропии A после этапа насыщения. Это значение в несколько раз меньше исходного A_0 , в рассмотренном примере — приблизительно в 5 раз, и в дальнейшем почти не уменьшается ($A \approx 2$, см. рис. 10). Практически не меняется и форма функции распределения частиц, остающаяся сильно отличной от бимаксвелловской, а также среднеквадратичная величина магнитного поля турбулентности. (Небольшие различия в слабом изменении среднеквадратичного поля b_{av} после достижения им максимума, обнаруживаемые, с одной стороны, квазилинейным расчетом и, с другой стороны, при помощи кода ЕРОСН, обусловлены, по-видимому, неучтенными нелинейными эффектами в первом и численными шумами, искажающими и тормозящими эволюцию спектра, во втором.) Указанные обстоятельства наряду с обсуждающимся ниже автомодельным характером эволюционирующего спектра одномерной турбулентности опять неявно подтверждают гипотезу о существовании долгоживущих токовых слоев, выявление которых было бы весьма желательно.

Сравнивая эволюцию спектров турбулентности при высокой (рис. 11) и низкой (рис. 6) начальной анизотропии, заметим, что в первом случае затухание насытившихся, более коротковолновых мод оказывается значительно сильнее и автомодельный характер эволюции обоих крыльев спектра выражен более явно, чем во втором. Поэтому в случае высокой начальной анизотропии дисперсия спектра $\sigma^2 = \langle K^2 \rangle - \langle K \rangle^2$ заметно изменяется (уменьшается) только на стадии экспоненциального роста мод, а после кратковременного уширения с началом нелинейной стадии уменьшается очень слабо, стремясь к постоянному значению, в отличие от случая низкой начальной анизотропии, когда эта дисперсия после первоначального уменьшения на линейной стадии медленно увеличивается за счет нелинейного (квазилинейного) роста длинноволнового крыла спектра. При этом среднее волновое число спектра $\langle K \rangle$ в первом случае со временем уменьшается примерно по степенному закону $t^{-1/2}$, тогда как во втором — уменьшается весьма незначительно. Наконец, в первом случае, при $A_0 = 10$, близкий к степенному вид обоих крыльев спектра $|b_k|$ прослеживается гораздо более четко и практически сразу после насыщения роста среднеквадратичного поля, характеризуясь почти не меняющимися показателями око-

ло 10 и -13 в длинноволновой и коротковолновой частях соответственно, хотя эти показатели весьма чувствительны к начальному уровню амплитуд мод. Заметим, что во втором случае, при $A_0 = 0.25$, степенной вид принимает только длинноволновое крыло, причем с показателем, примерно вдвое меньшим, т. е. около 5, и тоже чувствительным к начальному уровню амплитуд мод.

Для сформировавшейся сложно анизотропной функции распределения большинство мод приобретают действительную частоту, большую или порядка величины инкремента (декремента), а следовательно, их амплитуды $|b_k|$ начинают осциллировать, что отмечалось в разд. 3.1 при $A_0 = 0.25$. Теперь, при $A_0 = 10$, это показано на рис. 12, где частота осцилляций выше у более коротковолновых мод, причем для менее коротковолновых мод имеется промежуточная стадия примерно степенного роста (с различными показателями степени опять порядка 3–5, как и при $A_0 = 0.25$), начинающаяся почти сразу после момента насыщения моды с наибольшим исходным инкрементом и оптимальным волновым числом $K_{opt} \approx 1.2$ и заканчивающаяся моментом их собственного насыщения, после которого и возникают указанные осцилляции их амплитуд. Дальнейшее затухание огибающих этих осциллирующих амплитуд теперь выражено весьма сильно и является примерно экспоненциальным, а не степенным. Оно идет с разными декрементами в диапазоне 0.01–0.05 для различных мод, опускающихся вплоть до уровня численных шумов порядка 10^{-5} . Осцилляции не наблюдаются только для наиболее длинноволновых мод, дисперсия которых, по-видимому, определяется уплощенной частью функции распределения, а их действительные частоты могут быть даже меньше их инкрементов (декрементов).

Согласно проведенному нами сравнительному анализу расчетов в рамках квазилинейного подхода и расчетов методом частиц в ячейках для указанных и других значений параметра анизотропии A_0 , подобная динамика отдельных мод и спектра в целом в одномерной задаче обусловлена в основном чисто квазилинейными эффектами благодаря продолжающей самосоогласованно изменяться функции распределения частиц. Тем не менее из-за наличия уже упоминавшихся значительных численных шумов в использованном коде ЕРОСН, искажающих форму функции распределения и квазилинейную динамику мод, открытым остается вопрос о количественной оценке возможной, пусть малой, роли четырехволнового взаимодействия в возрастании все более длинноволновых мод и затухании ранее

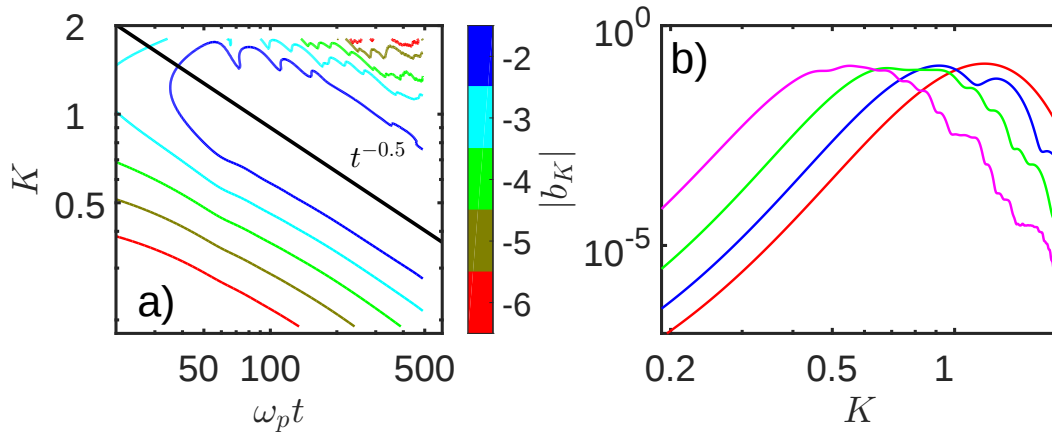


Рис. 11. Эволюция спектра турбулентности, найденная в одномерном квазилинейном расчете, в двойном логарифмическом масштабе: а) линии уровня логарифма амплитуд мод магнитного поля $|b_K|$; б) спектр $|b_K|$ магнитного поля в моменты времени $\omega_p t = 60$ (красная линия), 100 (синяя), 180 (зеленая), 360 (розовая). Начальная анизотропия $A_0 = 10$

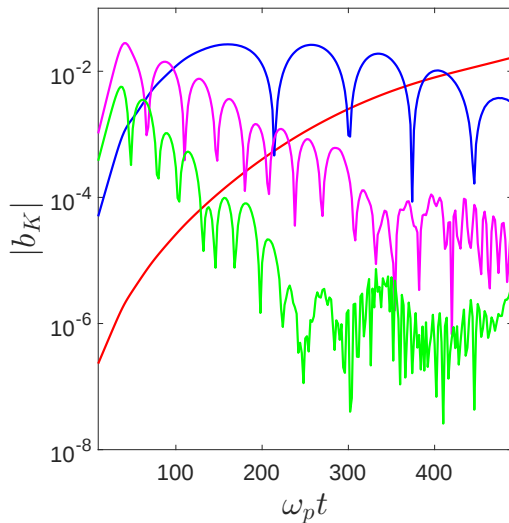


Рис. 12. Эволюция четырех типичных мод ($K = 0.4$ — красная линия, $K = 0.7$ — синяя, $K = 1.2$ — розовая, $K = 1.6$ — зеленая), взятых из спектра рис. 11. Оптимальное волновое число $K_{opt} \approx 1.2$

возбуждившихся коротковолновых, а следовательно, в формировании и поддержании степенной формы крыльев спектра одномерной вейбелевской турбулентности, особенно на поздних этапах ее затухания.

4. РАЗВИТИЕ ДВУМЕРНОЙ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Поставленный вопрос и выяснение других качественных особенностей эволюции вейбелевской турбулентности, квазилинейных и не только, явля-

ются также актуальными для более реалистичной двумерной (2D3V) задачи, которая рассматривается в настоящем разделе и для которой расчеты кодом ЕРОСН являются более точными, поскольку его численные шумы не так сильно искажают функцию распределения частиц и динамику мод, как в одномерной задаче. Для определенности анализ ограничен простейшим аксиально-симметричным случаем, в котором ось анизотропии y исходного бимаксвелловского распределения электронов по скоростям (4) ортогональна расчетной плоскости xz . В этом случае ТЕМ-турбулентности, как будет ясно из дальнейшего, квазилинейные эффекты тоже доминируют и определяют основные свойства ее пространственного спектра. Последний для интересующих нас полей и токов представляется большим числом sp неколлинеарных мод (гармоник) с волновыми векторами $\{(k_1; k_1), (k_1; k_2), \dots, (k_2; k_1), \dots, (k_s; k_p)\}$, компоненты которых состоят из s радиальных проекций $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_0$ и p аксиальных проекций $\mathbf{k} \phi_0$. В таком представлении обе компоненты магнитного поля, которое ортогонально оси анизотропии, имеют вид суммы мод по целочисленному векторному индексу $\mathbf{n} = (n_r, n_\phi)$:

$$B_{x,z}(t, x, z) = \text{Re} \sum_{n_r, n_\phi=1}^{l,p} (B_{\mathbf{k}_n}(t))_{x,z} \times \exp(-i(\mathbf{k}_n)_x x - i(\mathbf{k}_n)_z z). \quad (25)$$

Аналогичен вид и единственной компоненты электрического поля $\mathbf{E} = (0, E_y, 0)$, направленного вдоль оси анизотропии функции распределения и ниже

нормированного так же, как магнитное поле (17).

Для указанных мод полей и возмущений-гармоник функции распределения электронов по скоростям получаем следующую систему квазилинейных уравнений с новым более сложным оператором $\hat{\Theta}_1$ вместо оператора $\hat{\Phi}$ одномерной задачи (ср. (12)–(15), (18)):

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial \tau} + \sum_{n=1}^m \operatorname{Re} \left[\hat{\Theta}_1 (e_{\mathbf{K}_n}, \mathbf{b}_{\mathbf{K}_n}, \psi_{\mathbf{K}_n}^*) \right] = 0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{\mathbf{K}_n}}{\partial \tau} + i (\mathbf{K}_n)_x \beta_x \psi_{\mathbf{K}_n} + i (\mathbf{K}_n)_z \beta_z \psi_{\mathbf{K}_n} + \\ + 2 \hat{\Theta}_1 (e_{\mathbf{K}_n}, \mathbf{b}_{\mathbf{K}_n}, \psi_0) + \hat{\Theta}_1 (e_{\mathbf{K}_n}^*, \mathbf{b}_{\mathbf{K}_n}^*, \psi_{2\mathbf{K}_n}) = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_{2\mathbf{K}_n}}{\partial \tau} + 2i (\mathbf{K}_n)_x \beta_x \psi_{2\mathbf{K}_n} + 2i (\mathbf{K}_n)_z \beta_z \psi_{2\mathbf{K}_n} + \\ + \hat{\Theta}_1 (e_{\mathbf{K}_n}, \mathbf{b}_{\mathbf{K}_n}, \psi_{\mathbf{K}_n}) = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial (\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_z}{\partial \tau} = -i (\mathbf{K}_n)_x e_{\mathbf{K}_n}, \quad \frac{\partial (\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_x}{\partial \tau} = i (\mathbf{K}_n)_z e_{\mathbf{K}_n}, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{\mathbf{K}_n}}{\partial \tau} = i (\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_x (\mathbf{K}_n)_z - i (\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_z (\mathbf{K}_n)_x + \\ + \beta_{\parallel 0}^{-1} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \beta_y \psi_{\mathbf{K}_n}(\tau, \beta_x, \beta_y, \beta_z) d\beta_x d\beta_y d\beta_z, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_1 (e_{\mathbf{K}_n}, \mathbf{b}_{\mathbf{K}_n}, \psi(\beta)) = \frac{e_{\mathbf{K}_n}}{2} \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_y} - \\ - \frac{(\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_z}{2} \left(\beta_x \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_y} - \beta_y \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_x} \right) - \\ - \frac{(\mathbf{b}_{\mathbf{K}_n})_x}{2} \left(\beta_z \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_x} - \beta_x \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta_z} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Мы исследовали ее двумерно-неоднородные решения, получаемые численно на основе метода Стермера–Верле (Leapfrog) [32] (см. конец разд. 2) при одной и той же исходной поперечной тепловой скорости $\beta_{\perp 0} = 0.1$ и различной начальной анизотропии. Кроме того, опять проводилось сравнение с моделированием методом частиц в ячейках при помощи кода ЕРОСН, которое в целом оказалось согласованным с квазилинейным моделированием системы (26)–(31) с точностью $\sim 10 - 30\%$. Соответствующие результаты приведены ниже при $A_0 = 0.25$ и $A_0 = 10$, как и в предыдущем разделе для одномерной задачи. Отметим, что и для

двумерной задачи в предположении об аксиально-симметричном и достаточно узком пространственном спектре вейбелевской турбулентности, согласно [33] и (19), нетрудно получить следующее приближенное аналитическое соотношение для эволюционирующих среднеквадратичного магнитного поля b_{av} , параметра анизотропии плазмы A (ср. (21)) и среднего радиального волнового числа (20) $\langle K \rangle$ (ср. начало разд. 3):

$$b_{av}^2 = \frac{A_0 - A}{1 + A_0} \frac{\langle K \rangle^2}{A \langle K \rangle^2 + A + 5 \langle K \rangle^2 + 3}, \quad (32)$$

$$A = \frac{2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \beta_y^2 \psi_0(\tau, \beta_x, \beta_y, \beta_z) d\beta_x d\beta_y d\beta_z}{\iiint_{-\infty}^{\infty} (\beta_x^2 + \beta_z^2) \psi_0(\tau, \beta_x, \beta_y, \beta_z) d\beta_x d\beta_y d\beta_z} - 1. \quad (33)$$

Это соотношение для аксиально-симметричной (в среднем) турбулентности по-прежнему очень хорошо, с точностью до нескольких процентов, выполнялось в квазилинейных расчетах (см., например, рис. 16a) и немного хуже, с точностью до 10–20%, в расчетах методом частиц в ячейках, где в условиях высокого уровня численных шумов спектр оказывался более широким. Отметим, что всюду ниже под спектром вейбелевской турбулентности в аксиально-симметричной задаче подразумевается зависимость нормированных амплитуд мод магнитного поля (17) $|b_K|$ от нормированного радиального волнового числа (16) K , получаемая после усреднения по азимутальному углу.

Не повторяя общие положения, сформулированные в разд. 3.1 и 3.2, сосредоточимся только на различиях в развитии турбулентности, обусловленных переходом от одномерной задачи к двумерной, т. е. расширением области волновых векторов неустойчивых мод и направлений их магнитных полей, а следовательно, усилением квазилинейного взаимодействия мод и деформации функции распределения электронов по скоростям.

При низкой начальной анизотропии, $A_0 = 0.25$, деформация функции распределения идет интенсивнее, дольше и по величине составляет уже не доли, а несколько процентов, захватывая более обширную область тепловых скоростей электронов, так что тангенс угла конуса, на котором согласно рис. 4 меняется знак приращения функции распределения, увеличивается примерно от 1/6 до почти 1/2. При этом в баунс-осцилляциях участвует больше электронов, а функция распределения становится менее анизотропной и по форме ближе к бимаксвеллов-

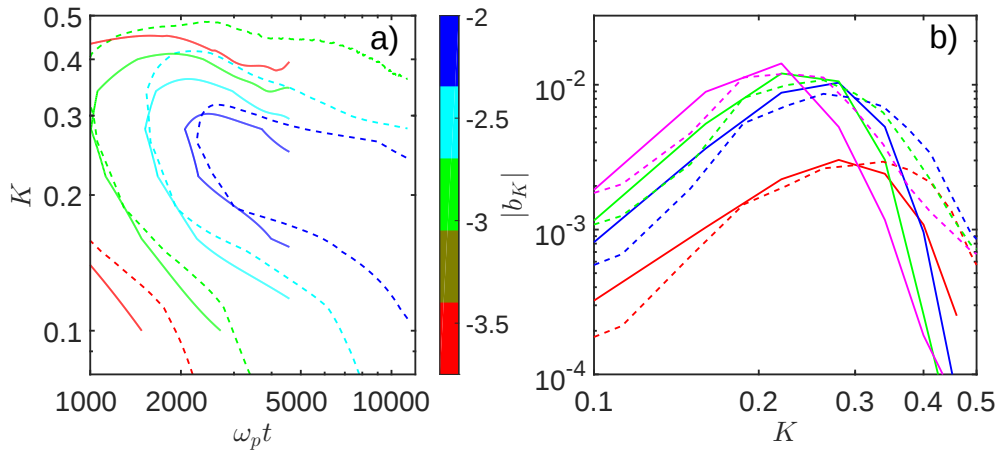


Рис. 13. Эволюция спектра турбулентности, найденная в аксиально-симметричных расчетах методом частиц в ячейках (штриховые линии) и на основе квазилинейного подхода (сплошные линии), в двойном логарифмическом масштабе: а) линии уровня логарифма амплитуд мод магнитного поля $|b_K|$; б) спектр $|b_K|$ магнитного поля в моменты времени $\omega_p t = 1500$ (красные линии), 2400 (синие), 3000 (зеленые), 4500 (розовые). Начальная анизотропия $A_0 = 0.25$

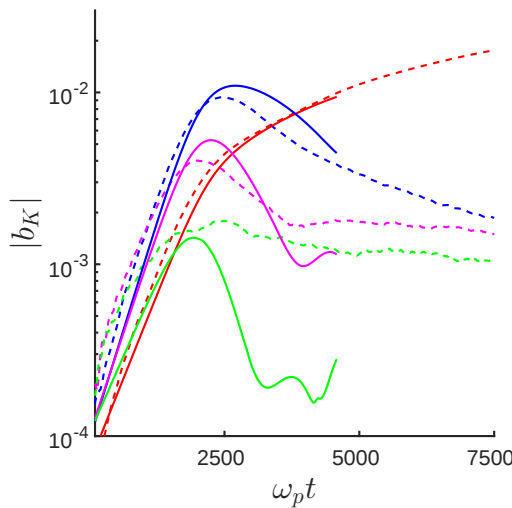


Рис. 14. Эволюция четырех типичных мод ($K = 0.16$ — красные линии, $K = 0.28$ — синие, $K = 0.34$ — розовые, $K = 0.4$ — зеленые), взятых из спектра рис. 13. Оптимальное волновое число $K_{opt} \approx 0.28$

ской, причем величина анизотропии с наступлением нелинейной стадии уменьшается, не осциллируя, и не на 1–2% (как было показано на рис. 5b), а почти на 20%, продолжая снижаться в дальнейшем. Значительно уменьшается, не осциллируя, и среднее волновое число $\langle K \rangle$ энергонесущих мод, а насыщающее среднеквадратичное магнитное поле b_{sat} оказывается сильнее приблизительно в 5 раз и тоже не осциллирует, хотя по-прежнему почти не снижается по величине на рассмотренных временах, в несколько раз превышающих время наступления на-

сыщения. Данные результаты квазилинейного подхода согласуются с предшествующими численными исследованиями вейбелевской неустойчивости методом частиц в ячейках, например, [4, 7].

В рассмотренном типичном примере смещение спектра турбулентности в длинноволновую область, как показано на рис. 13, выражено более явно и сопровождается затуханием коротковолновых мод, а не только ростом длинноволновых, что имело место в одномерной задаче (ср. рис. 6, где время наступления насыщения почти вдвое больше, поскольку логарифмический уровень начальных амплитуд мод был задан примерно вдвое ниже, чем на рис. 13). Такое поведение спектра обусловлено более эффективным квазилинейным, но не четырехволновым взаимодействием мод, что подтверждает аналогичный расчет методом частиц в ячейках, который учитывает оба механизма взаимодействия мод и которому на рисунке отвечают штриховые линии, хорошо совпадающие со сплошными. Благодаря менее анизотропной и более гладкой форме функции распределения, согласованной с двумерной турбулентностью, отдельные моды в ходе ее эволюции остаются по существу аperiодическими, т. е. их инкременты (декременты) превышают по величине возможные значения действительных частот. Следовательно, в отличие от одномерной турбулентности, квазипериодические осцилляции амплитуд мод практически отсутствуют и их начальный рост с последующим затуханием определяется изменяющейся величиной инкремента, переходящего после насыщения в декремент; ср. рис. 14 и 7. При этом из-за измене-

ния во времени инкремента (декремента) мод оказывается возможным не строго экспоненциальный, а скорее близкий к степенному как рост их амплитуд на промежуточном этапе эволюции до достижения максимальной величины (который начинается после насыщения наиболее быстро растущей моды с оптимальным волновым числом $K_{opt} \approx 0.28$), так и дальнейшее затухание. Со временем совместная динамика мод отражается в автомоделных чертах спектра турбулентности $|b_K|$, у которого в представленном примере длинноволновое и коротковолновое крылья неплохо аппроксимируются степенными зависимостями с показателями около 2 и -10 соответственно.

Остановимся теперь на ситуации с высокой начальной анизотропией, $A_0 = 10$, опять опираясь на во многом идентичные результаты расчетов с использованием квазилинейного подхода и метода частиц в ячейках. Как показывает сравнение рис. 15 и 9, не только качественное, но и количественное отличие деформаций функции распределения электронов по скоростям в одномерной и двумерной задачах не очень велико. Впрочем, в последней линии уровня этой функции являются более овальными, менее прямоугольными, что соответствует более сглаженной, менее анизотропной форме, хотя все равно значительно отличной от бимаксвелловской во всей области скоростей порядка тепловых. При этом уменьшение параметра анизотропии A в процессе насыщения неустойчивости происходит немного плавнее, но и немного глубже, так что насыщающее магнитное поле b_{av} тоже оказывается немного выше и после резкого возрастания очень медленно затухает, слегка осциллируя в противофазе с анизотропией на величину порядка нескольких процентов; ср. рис. 10 и 16.

Согласно рис. 11 и 17, эволюция одномерного и двумерного спектров вейбелевской турбулентности в целом однотипна, а волновое число, отвечающее максимуму спектра (и почти совпадающее со средним значением $\langle K \rangle$), смещается в длинноволновую сторону примерно по одному и тому же степенному закону $t^{-1/2}$ (см. также рис. 16с; этот закон отмечался нами ранее [7, 34]). Важным, однако, представляется выявление следующих различий спектров двумерной турбулентности, вычисленных в квазилинейном подходе и с помощью кода ЕРОСН при высокой начальной анизотропии $A_0 = 10$. Именно, с началом стадии насыщения, $\omega_p t > 60$, в коротковолновой части спектра, $K > K_{opt}$, квазилинейный расчет демонстрирует осцилляторное поведение мод, тогда как оно отсутствует в аналогичном расчете мето-

дом частиц в ячейках, демонстрирующем резкое и существенное, по меньшей мере двукратное, расширение спектра в коротковолновую сторону. Этих отличий не было при низкой начальной анизотропии $A_0 = 0.25$, а также в одномерной турбулентности ни при какой начальной анизотропии. Указанное расширение спектра особенно наглядно видно на рис. 17b на больших временах $\omega_p t = 160$ и 280, когда квазилинейный расчет (сплошные кривые) показывает сильное смещение крутого правого крыла спектра в длинноволновую сторону, а более точный расчет кодом ЕРОСН (штрихи) сохраняет правое крыло гораздо более коротковолновым и пологим. Отметим, кстати, что соответствующие степенные показатели -3.5 и 3 правого и левого крыльев спектра двумерной турбулентности сильно отличаются от аналогичных показателей -10 и 2 спектра одномерной турбулентности при той же величине $A_0 = 10$, что отчасти связано с разным уровнем заданных начальных амплитуд мод.

Причина установленных отличий, скорее всего, заключается в четырехволновом взаимодействии мод, не учитываемом в квазилинейной системе уравнений (26)–(31). Последняя благодаря этому обстоятельству позволяет выявить в моделировании методом частиц в ячейках нелинейные эффекты, отличные от квазилинейных. Сравнение расчетов одной и той же задачи в рамках этих двух подходов полезно провести путем анализа динамики отдельных мод двумерной вейбелевской турбулентности с использованием рис. 18. Расчет кодом ЕРОСН (штриховые линии) показывает, что с наступлением насыщения турбулентности достаточно коротковолновые моды, вопреки квазилинейному приближению (сплошные линии), не следуют осцилляторной динамике и экспоненциальному затуханию с легко вычисляемыми показателями порядка 0.01 – 0.10 (что примерно вдвое больше, чем для аналогичной одномерной турбулентности; ср. рис. 12). Напротив, эти моды лишь частично, в небольшой мере отслеживают первую «квазилинейную» осцилляцию и довольно быстро переходят к медленному примерно степенному затуханию с показателями в небольшом интервале значений от -1 до -1.3 , по-видимому, испытывая эффективную подкачку за счет четырехволнового взаимодействия немного более длинноволновых мод, имеющих достаточно большие амплитуды и расположенных в центральной части текущего спектра.

Вместе с тем значительно более длинноволновые моды находятся, вплоть до своего насыщения, на промежуточной стадии приблизительно степен-

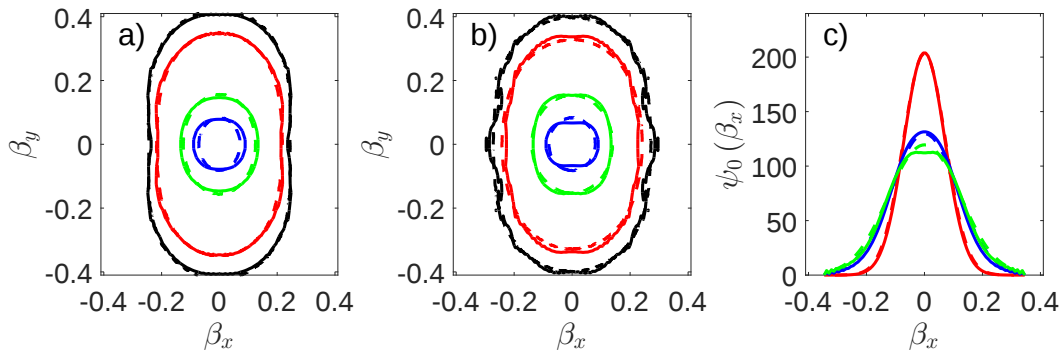


Рис. 15. *a, b*) Линии уровня 0.05 (черные), 0.1 (красные), 0.5 (зеленые) и 0.8 (синие), отсчитанные от максимального значения функции распределения в момент времени $\omega_p t = 83$ (*a*), 170 (*b*). *c*) Распределение частиц по величине нормированной компоненты скорости β_x , ортогональной оси анизотропии, в моменты времени $\omega_p t = 0$ (красные линии), 83 (синие), 170 (зеленые). Приведены данные аксиально-симметричных расчетов методом частиц в ячейках (штриховые линии) и в рамках квазилинейного подхода (сплошные) при $A_0 = 10$

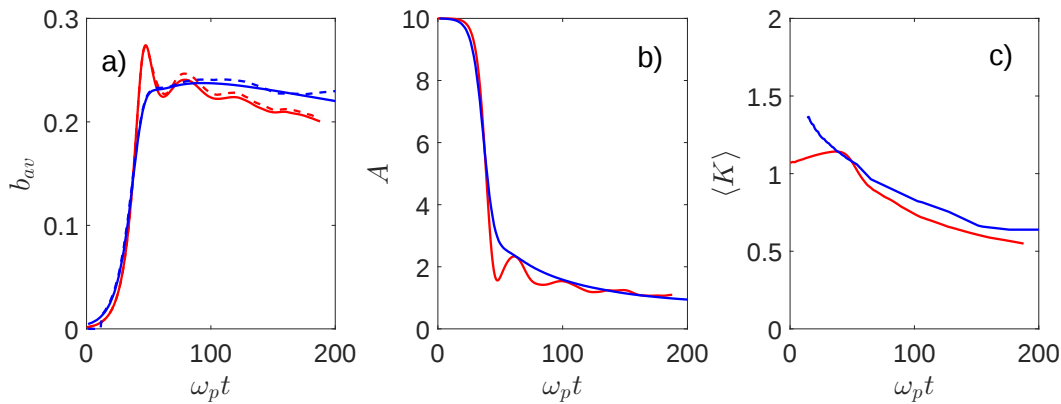


Рис. 16. Эволюция *a*) среднеквадратичного магнитного поля b_{av} (сплошные линии) и оценки этой величины (32) (штриховые), а также *b*) параметра анизотропии A и *c*) характерного волнового числа $\langle K \rangle$ согласно численному квазилинейному моделированию (красные линии) и расчетам методом частиц в ячейках (синие линии) в аксиально-симметричной задаче при $A_0 = 10$

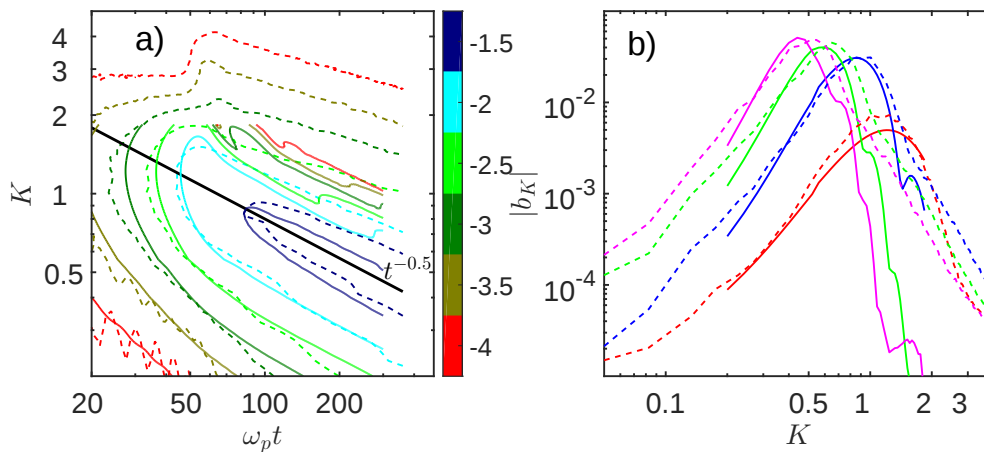


Рис. 17. Эволюция спектра турбулентности, найденная в аксиально-симметричных расчетах методом частиц в ячейках (штриховые линии) и в рамках квазилинейного подхода (сплошные линии), в двойном логарифмическом масштабе: *a*) линии уровня логарифма амплитуд мод магнитного поля $|b_K|$; *b*) спектр $|b_K|$ магнитного поля в моменты времени $\omega_p t = 40$ (красные линии), 80 (синие), 160 (зеленые), 280 (розовые). Начальная анизотропия $A_0 = 10$

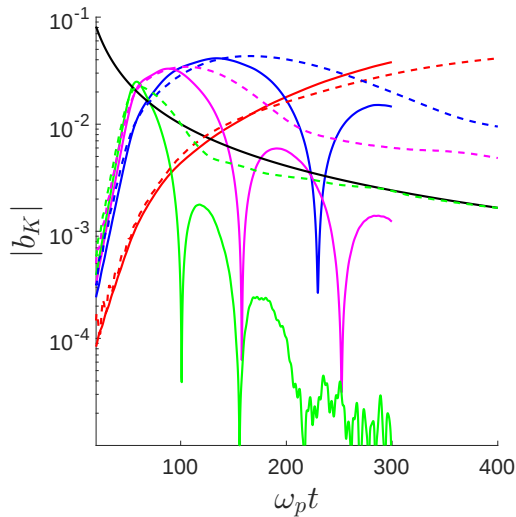


Рис. 18. Эволюция четырех типичных мод ($K = 0.36$ — красные линии, $K = 0.68$ — синие, $K = 0.88$ — розовые, $K = 1.2$ — зеленые), взятых из спектра рис. 17. Оптимальное волновое число $K_{opt} \approx 1.2$. Черная линия соответствует степенной зависимости $t^{-4/3}$

ного роста с показателями порядка 1–2 (что в два-три раза меньше, чем для аналогичной одномерной турбулентности). Подобная динамика этих мод может объясняться квазилинейным образом при надлежащей зависимости от времени их инкрементов, но может быть обусловлена, хотя бы частично, все той же нелинейной подкачкой при четырехволновом взаимодействии более мощных мод из центральной части спектра турбулентности. Не исключено также, что еще более длинноволновые моды, которые только выходят или недалеко отошли от уровня шумов на стадии насыщения турбулентности, могут быть сильно, даже сверхэкспоненциально, возбуждены нелинейным образом посредством четырехволнового взаимодействия с какими-либо более мощными модами, что в результате может влиять на форму длинноволнового крыла спектра турбулентности. Данный круг вопросов требует дальнейшего детального исследования.

Во избежание недоразумений следует отметить, что вплоть до насыщения роста среднеквадратичного магнитного поля отличия квазилинейных расчетов от расчетов методом частиц в ячейках являются весьма незначительными, даже в одномерной задаче. В итоге квазилинейный подход позволяет корректно вычислять величину насыщающего магнитного поля вейбелевской турбулентности, что уже было продемонстрировано в конце разд. 3.1 на рис. 8. Согласно ему, средний квадрат насыщающего поля двумерной турбулентности отличается от его значения для одномерной на десятки процен-

тов при большом начальном параметре анизотропии, $A_0 \gtrsim 1$, и многократно при малом параметре, $A_0 \lesssim 1$, поскольку тогда численно найденный показатель его степенной зависимости от этого параметра оказывается близким к 2 вместо аналитически найденного показателя 5 для одномерной турбулентности (см. формулу (24)).

Таким образом, проведенные расчеты, в том числе и для других параметров анизотропии A_0 , показывают следующие существенные различия эволюции спектра вейбелевской турбулентности в одномерной и аксиально-симметричной двумерной задачах при одинаковых начальных условиях.

Во-первых, более богатый двумерный спектр развитых мод обеспечивает более гладкую и сильную модификацию исходной функции распределения электронов по скоростям, а следовательно, более значительные уменьшения параметра анизотропии и увеличения магнитной энергии турбулентности. При этом последующий распад образовавшихся случайных самосогласованных токовых филаментов идет эффективнее, чем для турбулентности с одномерным спектром, где квазилинейные эффекты и четырехволновое взаимодействие мод искусственно ограничены, как и свободный разлет электронов из токовых слоев.

Во-вторых, в двумерном случае автомодельный характер эволюции спектра выражен более явно, а формирование его степенных крыльев и смещение его максимума в длинноволновую сторону происходят быстрее, возможно, благодаря не только квазилинейному, но и четырехволновому взаимодействию мод. При этом зависимость соответствующих параметров спектра от начальной анизотропии плазмы выражена слабее, чем в одномерном случае, где перестройка спектра заторможена.

В-третьих, динамика отдельных мод в двумерной задаче, естественно, оказывается более сложной и многообразной, хотя в общем случае и включает в себя те же три основные стадии, что и в одномерной задаче: сначала экспоненциальное и потом примерно степенное возрастание, а после достижения максимума — тоже убывание степенного типа. При этом в одномерной турбулентности для многих мод не все эти стадии четко выражены, но значительно заметнее квазипериодические осцилляции амплитуд мод и даже ее интегральных характеристик, вызванные, как и в двумерной турбулентности, квазилинейной модификацией анизотропии функции распределения электронов и соответствующим изменением действительных частот и инкрементов (декрементов) мод.

5. ОБСУЖДЕНИЕ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе осуществлен квазилинейный численный подход к описанию эволюции вейбелевской ТЕМ-турбулентности и соответствующей деформации функции распределения частиц, использующий приближение слабо нелинейной турбулентности, т. е. слабого взаимодействия ее пространственных мод (гармоник). Этот подход и развитые с его помощью представления о квазимагнитостатической турбулентности являются универсальными, т. е. применимы к различным исходным функциям распределения частиц по скоростям, включая не только бимаксвелловские, но и бикаппа-, комбинированные пучковые, не осесимметричные и другие распределения, представляющие интерес в различных ситуациях в плазме, включая наличие внешнего магнитного поля [35–39]. В одномерной задаче полученные решения квазилинейных уравнений хорошо согласуются с результатами имеющейся аналитической теории в пределах ее применимости и позволяют анализировать недоступную ей динамику спектра турбулентности, в том числе в сильно анизотропной плазме. В рассмотренной двумерной аксиально-симметричной задаче, для которой аналитическая теория отсутствует, проведено сравнение с результатами расчетов методом частиц в ячейках с помощью кода ЕРОСН, продемонстрировавшее качественное совпадение той и другой картин эволюции спектра турбулентности. Оно свидетельствует о том, что квазилинейная динамика включает основные проявления нелинейных эффектов в исследуемом процессе, а неучтенные нелинейные эффекты, например, четырехволновое взаимодействие мод, обычно не играют существенной роли и являются очень слабыми (возможно, скрытыми численными шумами при моделировании методом частиц в ячейках).

В итоге общий сценарий эволюции спектра вейбелевской турбулентности, который по существу можно назвать квазилинейным, в рассмотренных простейших случаях представляется следующим. При небольшом уровне начальных шумов на линейной стадии неустойчивости анизотропной плазмы происходит экспоненциальный, апериодический рост мод в довольно широком интервале волновых чисел, для которых инкремент не сильно меньше максимального. К моменту насыщения роста среднеквадратичного магнитного поля профиль спектра может значительно сузиться и центральная группа его мод, следуя квазилинейной динамике и за счет «квадратичной» нелинейности возбуждая вторые гармоники функции распределения частиц и

деформируя среднюю по пространству форму этой функции, начинает существенно уменьшать средний параметр анизотропии и инкремент всех мод, причем для указанных центральных мод последний становится даже отрицательным.

В результате коротковолновое крыло спектра постепенно затухает, а длинноволновое продолжает расти, причем там темп роста амплитуд мод почти сразу после момента насыщения становится примерно степенным (вместо экспоненциального или нелинейно индуцированного) с показателем, зависящим от волнового числа моды: более длинноволновые моды возрастают медленнее менее длинноволновых. В ходе процесса максимальными амплитудами по очереди начинают обладать все более длинноволновые моды, и величина этого максимума сначала даже немного растет (в области пологого плато на зависимости среднеквадратичного магнитного поля от времени), а потом начинает медленно убывать, причем волновое число, отвечающее данному максимуму, уменьшается обратно пропорционально времени в небольшой степени (для аксиально-симметричной турбулентности в сильно анизотропной плазме — приблизительно обратно пропорционально квадратному корню от времени, $t^{-0.5}$). Закон затухания амплитуд b_{K_n} коротковолновых мод со временем приблизительно одинаков и тоже оказывается примерно степенным, не сильно зависящим от первоначального параметра анизотропии, тогда как показатель степенного роста длинноволновых мод значительно сильнее зависит от этого параметра и от волнового числа моды. В аксиально-симметричной двумерной задаче с $\beta_{\perp 0} = 0.1$ при $A_0 = 10$ указанные показатели лежат в диапазонах от -1.3 до -1 и от 1 до 2 соответственно для коротковолновых и длинноволновых мод, а показатель медленного примерно степенного убывания среднеквадратичного магнитного поля после момента насыщения близка к -0.3 .

При этом крылья спектра турбулентности b_K как функции волнового числа тоже приближенно следуют степенным законам, почти не меняющимся со временем, но зависящим от исходного параметра анизотропии, а также от уровня начальных шумов. Так, для указанного выше случая эти показатели близки к 3 слева и к -3.5 справа по отношению к волновому числу, которое отвечает текущему максимуму спектра. Согласно численному квазилинейному моделированию, разброс данных показателей связан с уровнем начальных шумовых амплитуд мод, к которому особенно чувствительно длинноволновое крыло спектра и от которого зависит также

ширина центрального пологого плато спектра.

Необходимо подчеркнуть, что представленная плавная в целом динамика спектра как большого случайного набора изначально аperiodических вейбелевских мод складывается из колебательного поведения почти всех мод, наступающего практически сразу после насыщения их роста. Это обусловлено тем, что функция распределения частиц по скоростям не только выполаживается, но и приобретает сложную небимаксвелловскую форму, постепенно меняющуюся со временем. Следуя изменившейся дисперсии плазмы, моды приобретают различные действительные частоты, вообще говоря, сравнимые с их изменившимися инкрементами, точнее, декрементами, и начинают по-разному осциллировать, продолжая возрастать (или затухать). Развитый квазилинейный подход хотя и не содержит в явном виде решение дисперсионного уравнения, но в полной мере учитывает данное важное обстоятельство, обычно скрытое численными шумами при моделировании методом частиц в ячейках. По-видимому, нелинейные и неадиабатические эффекты в плазме с эволюционирующими анизотропией и формой функции распределения частиц дополнительно изменяют фазы и частоты колебаний мод, тем самым нивелируя влияние интерференции этих колебаний на интегральные характеристики турбулентности, которое возможно по крайней мере в условиях достаточно узкого спектра доминирующих мод.

Ограничение квазилинейного подхода и обуславливающие его неучтенные нелинейные эффекты могут проявляться кратковременно или накапливаться в ходе долговременной эволюции спектра мод, причем результат зависит от характера анизотропии плазмы и геометрии задачи. В разд. 4 было продемонстрировано кратковременное обогащение коротковолнового крыла спектра за счет генерации суммарных гармоник сразу после начала насыщения турбулентности (см. также [28, 29]). Как показывают наши предварительные расчеты, при наличии внешнего магнитного поля, даже ориентированного вдоль оси анизотропии и не нарушающего аксиальную симметрию задачи, такие эффекты могут дополнительно расширять спектр мод на этапе насыщения не только в коротковолновой, но и в длинноволновой области.

Именно, согласно моделированию кодом ЕРОСН, на обоих крыльях наблюдается кратковременный рост отдельных мод с темпом, большим или порядка темпа роста наиболее неустойчивых мод в центре спектра, и этот эффект отсутствует в

квазилинейном подходе. В дальнейшем выросшие коротковолновые моды довольно быстро затухают, тогда как длинноволновые моды, возбужденные нелинейным образом (сверхэкспоненциально или экспоненциально, но с инкрементом выше даваемого линейным приближением), после этапа насыщения продолжают свой рост примерно по степенному закону, как и в отсутствие внешнего магнитного поля (см. выше). Со временем они могут даже превзойти по амплитуде все моды, имеющие более короткую длину волны и возросшие раньше, но уже начавшие затухать. Так или иначе, в общем случае совместная эволюция мод вейбелевской турбулентности в значительной степени является автомодельной, причем динамика отдельной моды может содержать четыре стадии: экспоненциальный и нелинейный рост, степенные возрастание и убывание, а также переходы между ними. Не исключено, что конкретные показатели степенных законов роста и убывания мод как в данной, так и в рассмотренных выше простейших задачах определяются не только квазилинейным, но отчасти и четырехволновым взаимодействием мод.

Слабые эффекты этого нелинейного взаимодействия, не воспроизводимые квазилинейной динамикой согласно нашим расчетам, наблюдались и в моделировании эволюции спектра вейбелевской турбулентности для другой, не аксиально-симметричной двумерной задачи, в которой ось анизотропии исходной бимаксвелловской плазмы лежит в плоскости расчета xu (см. в этой связи [22, 28]). По-видимому, и внешнее магнитное поле, и нарушение аксиальной симметрии задачи увеличивает возможные наборы участвующих в четырехволновом взаимодействии мод и/или усиливает его, хотя этот вопрос еще предстоит исследовать. Разумеется, для применимости результатов такого рода исследования к реальным задачам лабораторной и космической физики плазмы желательно использовать полностью трехмерное моделирование, учитывающее наклонные моды спектра турбулентных полей, волновые векторы которых не ортогональны оси анизотропии исходного распределения частиц по скоростям. Открытым остается вопрос и о вкладе постепенно накапливающегося четырехволнового взаимодействия мод в систематически увеличивающиеся различия среднеквадратичных магнитных полей или средних параметров анизотропии, наблюдаемые во всех перечисленных задачах при сравнении наших квазилинейных расчетов и расчетов кодом ЕРОСН. Присущие последнему численные шумы

затрудняют решение данных вопросов, поскольку тоже могут давать вклад в показатели степенных зависимостей или влиять на темпы затухания турбулентного магнитного поля и уменьшения параметра анизотропии.

Привлечение квазилинейного подхода к решению изложенных открытых проблем и применение разработанных на его основе представлений о динамике спектра вейбелевской турбулентности к анализу переходных процессов в космической и лабораторной плазме, несомненно, являются перспективными, в частности, в физике звездного ветра, ударных волн, лазерной абляции, взрывных процессов в магнитосферах звезд и планет. Как и в исследованных нами простейших задачах, в подобных условиях ожидается существенная роль формирующейся мелкомасштабной квазимагнитостатической турбулентности, способной значительно изменить аномальную проводимость плазмы, баланс магнитного и теплового давлений и крупномасштабную структуру полного магнитного поля, а следовательно, динамику всего переходного процесса. Естественно, в каждой конкретной ситуации необходимо сравнивать неустойчивость вейбелевского типа с другими возможными неустойчивостями анизотропной плазмы, особенно апериодическими [6, 40–44], которые могут конкурировать в создании той или иной магнитной турбулентности. Подобный сравнительный анализ представляется весьма актуальным, но выходит за рамки настоящей работы.

Финансирование. Расчеты динамики вейбелевских мод в рамках одномерной задачи поддержаны Российским научным фондом (грант № 19-72-10111). Эволюция спектра в аксиально-симметричной двумерной задаче рассчитана при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» (грант № 20-1-1-37-2). Для численных расчетов использованы суперкомпьютерные ресурсы ЦКП ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Б. Михайловский, *Теория плазменных неустойчивостей*, Атомиздат, Москва (1971).
2. Н. Кролл, А. Трайвелпис, *Основы физики плазмы*, Мир, Москва (1975).
3. T. N. Kato, *Phys. Plasmas* **12**, 080705 (2005).
4. L. V. Borodachev and D. O. Kolomiets, *J. Plasma Phys.* **77**, 277 (2010).
5. C. Ruyer et al., *Phys. Plasmas* **22**, 032102 (2015).
6. M. Lazar et al., *Front. Astron. Space Sci.* **8**, 77559 (2022).
7. Л. В. Бородачев и др., *Изв. вузов. Радиофизика* **59**, 1107 (2016).
8. D. V. Romanov et al., *Phys. Rev. Lett.* **93**, 215004 (2004).
9. W. Baumjohann and R. Treumann, *Basic Space Plasma Physics*, Imperial College Press, London (2012).
10. R. A. Treumann, *Astron. Astrophys. Rev.* **17**, 409 (2009).
11. A. Marcowith et al., *Rep. Prog. Phys.* **79**, 046901 (2016).
12. S. P. Gary, *Theory of Space Plasma Microinstabilities*, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).
13. E. S. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **2**, 83 (1959).
14. M. Zhou et al., *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **119**, e2119831119 (2022).
15. B. D. Fried, *Phys. Fluids* **2**, 337 (1959).
16. G. Kalman, *Phys. Fluids* **11**, 1797 (1968).
17. R. L. Morse and C. W. Nielson, *Phys. Fluids* **14**, 830 (1971).
18. В. В. Кочаровский и др., *УФН* **186**, 1267 (2016).
19. M. Lazar, R. Schlickeiser, and P. K. Shukla, *Phys. Plasmas* **13**, 102107 (2006).
20. A. Stockem, M. E. Dieckmann, and R. Schlickeiser, *Plasma Phys. Control. Fusion* **51**, 075014 (2009).
21. U. Schaefer-Rolfs, I. Lerche, and R. Schlickeiser, *Phys. Plasmas* **13**, 012107 (2006).
22. A. A. Kuznetsov et al., *Plasma Phys. Rep.* **48**, 973 (2022).
23. M. V. Medvedev et al., *Astrophys. J.* **618**, L75 (2005).
24. G. Chatterjee et al., *Nat. Commun.* **8**, 15970 (2017).
25. K. Y. Vagin and S. A. Uryupin, *Plasma Phys. Rep.* **40**, 393 (2014).
26. O. A. Pokhotelov and O. A. Amariutei, *Ann. Geophys.* **29**, 1997 (2011).
27. R. C. Davidson, *Phys. Fluids* **15**, 317 (1972).
28. М. А. Гарасев, Е. В. Деришев, *Изв. вузов. Радиофизика* **60**, 1040 (2017).

29. M. A. Garasev and E. V. Derishev, Radiophys. Quantum El. **63**, 909 (2021).
30. T. D. Arber et al., Plasma Phys. Control. Fusion **57**, 113001 (2015).
31. А. А. Веденов, *Квазилинейная теория плазмы*, Атомиздат, Москва (1962).
32. C. K. Birdsall and A. B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation*, CRC Press (2018).
33. A. A. Nechaev, A. A. Kuznetsov, and V. V. Kocharovsky, J. Plasma Phys. (2023).
34. А. А. Нечаев и др., Изв. вузов. Радиофизика **62**, 932 (2019).
35. V. M. Vasyliunas, J. Geophys. Res. **73**, 2839 (1968).
36. M. Lazar, R. Schlickeiser, and S. Poedts, Phys. Plasmas **17**, 062112 (2010).
37. G. Livadiotis, *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas*, Elsevier (2017).
38. G. Livadiotis, G. Nicolaou, and F. Allegrini, Astrophys. J. Suppl. Ser. **253**, 16 (2021).
39. V. Pierrard and M. Lazar, Sol. Phys. **267**, 153 (2010).
40. S. M. Shaaban et al., Astrophys. J. **918**, 37 (2021).
41. S. M. Shaaban et al., Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **483**, 5642 (2019).
42. P. H. Yoon, Rev. Mod. Plasma Phys. **1**, 4 (2017).
43. M. E. Dieckmann et al., Plasma Phys. Control. Fusion **61**, 085027 (2019).
44. A. Stockem Novo et al., Phys. Plasmas **22**, 092301 (2015).