

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

УДК 538.955

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА СПИНОВОЙ ДЕЛЬТА-ЦЕПОЧКИ

© 2019 г. В. Я. Кривнов^{1*}, Д. В. Дмитриев¹, Н. С. Эрихман¹¹Институт биохимической физики им. Н.М. Эмануэля Российской академии наук, Москва, Россия

*E-mail: krivnov@deom.chph.ras.ru

Поступила в редакцию 05.06.2019;

после доработки 05.06.2019;

принята в печать 20.06.2019

Изучена квантовая спиновая модель дельта-цепочки с обменными взаимодействиями ферро- и антиферромагнитного типов. Основное внимание уделено исследованию магнитных свойств в критической точке, разделяющей ферро- и ферримагнитные фазы основного состояния. Показано, что в этом случае основное состояние макроскопически вырождено и энтропия при нулевой температуре конечна. Щель в спектре возбуждений экспоненциально мала и сам спектр имеет многомасштабную структуру, определяющую низкотемпературную термодинамику. Полученные результаты используются для анализа магнитных свойств недавно синтезированных молекул с рекордным значением спина основного состояния.

Ключевые слова: спиновая дельта-цепочка, фрустрированные спиновые системы, молекулярный магнетизм.

DOI: 10.1134/S0207401X19120112

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время большой интерес вызывает изучение низкоразмерных магнетиков на геометрически фрустрированных (неальтернантных) решетках [1–3]. Фрустрация в таких решетках означает невозможность минимизации энергии выбором коллинеарной конфигурации спинов, в отличие от ситуации в стандартных альтернантных решетках. Важным классом таких объектов являются соединения, состоящие из треугольных кластеров магнитных ионов. Интересным и типичным примером такой системы является так называемая дельта-цепочка, представляющая собой линейную цепь треугольников с магнитными ионами в их узлах (рис. 1). Магнитные свойства такой системы описываются моделью Гейзенберга, имеющей вид:

$$H = J_1 \sum (S_{(b)2n-1} S_{(a)2n} + S_{(a)2n} S_{(b)2n+1} - 2s_a s_b) + J_2 \sum (S_{(b)2n-1} S_{(b)2n+1} - s_b^2), \quad (1)$$

где $S_{(a)n}$ и $S_{(b)n}$ — операторы спинов вершин и оснований треугольников соответственно с квантовыми числами $s = s_a$ и $s = s_b$, J_1 — обменное взаимодействие между спинами основания и вершин треугольников, а J_2 — взаимодействие между ближайшими спинами основания дельта-цепочки. Прямое взаимодействие между вершинными спинами отсутствует. Постоянные в выражении (1) выбраны так, чтобы энергия ферромагнитного со-

стояния с параллельной конфигурацией спинов была равна нулю. Фрустрация в такой модели проявляется как конкуренция J_1 и J_2 взаимодействий. Как известно, взаимное влияние фрустрации и квантовых флуктуаций приводит к появлению новых необычных свойств систем и это в полной мере относится к спиновой дельта-цепочке.

Магнитные свойства модели, описанные выражением (1) с обоими антиферромагнитными (AF) взаимодействиями ($J_1 > 0$, $J_2 > 0$), в зависимости от их соотношения были достаточно хорошо изучены, в особенности для случая $s_a = s_b = 1/2$ [2, 4–7]. В частности, если $J_1 = J_2$, то модель имеет двукратно вырожденное основное состояние, а пары спинов вершин и оснований треугольников образуют синглет. При $J_2 = J_1/2$ и магнитном поле, близком к насыщению, кривая намагниченности имеет плато со скачком намагниченности, а теплоемкость, наряду с широким высокотемпе-

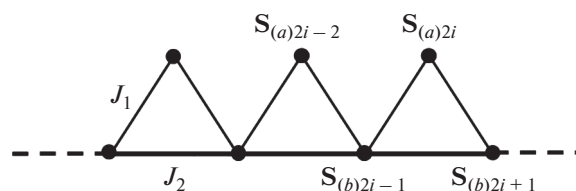


Рис. 1. Спиновая модель дельта-цепочки.

ратурным максимумом, имеет дополнительный низкотемпературный пик.

В отличие от АФ дельта-цепочки, эта же модель с ферромагнитным взаимодействием J_1 и антиферромагнитным J_2 ($J_1 < 0$, $J_2 > 0$) (F-AF модель) до недавнего времени была изучена существенно меньше, даже для случая спинов $s_a = s_b = 1/2$. Было лишь известно, что основное состояние модели с $s_a = s_b = 1/2$ ферромагнитно, если параметр фрустрации $\alpha = J_2/|J_1|$ меньше $1/2$ и ферримагнитно при $\alpha > 1/2$. Критическая точка $\alpha = 1/2$ разделяет эти фазы.

Интерес к изучению F-AF дельта-цепочки существенно возрос после появления реальных соединений, описываемых этой моделью. Примером такого рода соединений являются комплексы $[\text{CuH}_2\text{O}][\text{Cu}(\text{mal})\text{H}_2\text{O}](\text{ClO}_4)_2$, содержащие магнитные ионы Cu^{2+} со спином $1/2$ [8, 9]. Из анализа экспериментальных данных было установлено, что параметр фрустрации α в этом соединении примерно равен 1, т.е. оно является ферримагнетиком.

Однако вопрос о природе и магнитных свойствах F-AF модели в ферро- и ферримагнитных фазах и особенно при критическом значении параметра фрустрации оставался открытым. В наших работах [10, 11] эта проблема была изучена для модели дельта-цепочки со спинами $s_a = s_b = 1/2$. Было выяснено, что указанная модель при критическом значении α имеет ряд необычных свойств: основное состояние имеет гигантское вырождение, щель в спектре возбуждений экспоненциально мала и низкоэнергетическая часть спектра имеет многомасштабную структуру, определяющую низкотемпературную термодинамику моде-

ли. Интересным представляется обобщение этой модели на случай спинов с произвольными квантовыми числами. Оказывается, что вышеуказанные особенности в значительной мере характерны и для модели с произвольными значениями спинов и они будут рассмотрены в данной работе. Изучение этой модели интересно также и потому, что недавно синтезированные магнитные молекулы с рекордным значением спина основного состояния являются реализацией F-AF дельта-цепочки с достаточно большими значениями спинов s_a и s_b .

F-AF ДЕЛЬТА-МОДЕЛЬ В КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКЕ

Как было отмечено выше, параметр фрустрации $\alpha = 1/2$ в модели с $s_a = s_b = 1/2$ соответствует критическому значению, разделяющему ферро- и ферримагнитные фазы. Рассмотрим вопрос об основном состоянии модели с произвольными значениями спинов s_a и s_b . Если фрустрация отсутствует ($\alpha = 0$), то модель, представленная уравнением (1), описывает ферромагнитную цепочку. Очевидно, что и при малом значении параметра α основное состояние будет ферромагнитным и имеющим нулевую энергию. Критическое значение α_c , определяющее границу ферромагнитной фазы, может быть найдено из условия обращения в нуль энергии одномагнанных возбуждений, т.е. состояний с $S = S_{\max} - 1$ ($S_{\max} = N(s_b + s_a)/2$), соответствующих рождению одного магнона из полностью поляризованного ферромагнитного состояния. Их спектр имеет вид

$$E_{\pm}(q) = s_a + s_b - \alpha s_b (1 - \cos q) \pm \sqrt{(s_a + s_b - \alpha s_b (1 - \cos q))^2 + 2(1 - \cos q)(2\alpha s_b^2 - s_a s_b)}. \quad (2)$$

В выражении (2) и далее мы принимаем $J_1 = -1$ и $J_2 = \alpha$.

Энергия нижней ветви $E_-(q)$ обращается в нуль при $\alpha_c = s_a/2s_b$. При $\alpha > \alpha_c$ энергия E_- становится отрицательной и основное состояние, как ожидается, будет ферримагнитным. Как следует из выражения (2), нижняя ветвь при $\alpha = \alpha_c$ является бездисперсионной (ее энергия не зависит от q). Как известно, это означает, что одномагнанные состояния этой ветви могут быть представлены как локализованные. В этом представлении они имеют вид

$$\Phi_i = (s_{(a)2i}^- + 2s_{(b)2i+1}^- + s_{(a)2i+2}^-) |F\rangle, \quad i = 1, 2, \dots, N/2, \quad (3)$$

где $s_{(a)}^-$ и $s_{(b)}^-$ — операторы понижения спинов s_a и s_b , а $|F\rangle$ — ферромагнитное состояние. В состоя-

нии (3) магнон “живет” в долине между соседними треугольниками.

Докажем теперь, что энергия основного состояния равна нулю при $\alpha_c = s_a/2s_b$. Для этого представим гамильтониан (1) при $\alpha = \alpha_c$ как сумму локальных гамильтонианов:

$$H = \sum H_i, \quad (4)$$

где H_i — гамильтониан i -го треугольника, имеющий вид:

$$H_i = -(S_{(b)2i-1} + S_{(b)2i+1})S_{(a)2i} + \frac{1}{2}S_{(b)2i-1}S_{(b)2i+1} + 2s_a s_b - \frac{1}{2}s_b^2. \quad (5)$$

Расчет собственных значений (5) показывает, что энергии состояния с максимальным спином

треугольника $S = (2s_b + s_a)$ и одного из состояний с $S = (2s_b + s_a - 1)$ равны нулю, а энергии всех других состояний положительны. Поскольку гамильтонианы соседних треугольников не коммутируют, нижайшее собственное значение (5) E_0 удовлетворяет неравенству

$$E_0 \geq \sum E_i = 0, \quad (6)$$

и, следовательно, энергия основного состояния всей системы неотрицательна. В действительности она равна нулю, так как уже ферромагнитное и одномагнитные состояния (1) имеют нулевую энергию? Возникает вопрос, есть ли еще состояния, имеющие нулевую энергию. Оказывается, что есть и их довольно много. Очевидно, что двухмагнитные состояния с $S = S_{max} - 2$, представляющие пары неперекрывающихся локализованных магнов (не находящихся в соседних долинах) также имеют нулевую энергию. Подобным образом, k неперекрывающихся локализованных магнов в состоянии $S = S_{max} - k$ ($k \leq N/4$) также являются точными состояниями с нулевой энергией. Оказывается также, что наряду с многомагнитными состояниями такого типа существует еще один класс состояний нулевой энергии, построенный из перекрывающихся состояний типа (3). Например, имеются двухмагнитные состояния вида

$$\Phi_i (\Phi_{i-1} + \Phi_i + \Phi_{i+1}). \quad (7)$$

Можно показать, что эти состояния имеют нулевую энергию и принадлежат к основному состоянию. Аналогичным образом могут быть построены и многомагнитные волновые функции этого типа. Подсчет числа всех основных состояний с нулевой энергией представляет довольно сложную комбинаторную задачу, которая подобна возникающей в модели с $s_a = s_b = 1/2$ и решенная нами в работе [10]. Мы опустим соответствующие громоздкие выкладки и приведем окончательный ответ, который оказывается неожиданно простым. Число основных состояний B_k с фиксированным значением полного спина $S = S_{max} - k$ равно

$$\begin{aligned} B_k &= C_{N/2}^k - C_{N/2}^{k-1}, \quad 0 \leq k \leq N/4 \\ B_k &= 0, \quad N/4 < k \leq N/2. \end{aligned} \quad (8)$$

Согласно (8), полное число всех состояний F-AF дельта-цепочки со спинами s_a и s_b при критическом значении параметра фрустрации $\alpha_c = s_a/2s_b$ равно:

$$W = \left(s_a + s_b - \frac{1}{2}\right) N C_{N/2}^{N/4} + 2^{N/2}. \quad (9)$$

При $N \gg 1$ полное число всех состояний $W = 2^{N/2} \sqrt{N/\pi}$, а остаточная энтропия на узел равна $1/2 \ln 2$. Таким образом, основное состояние дельта-цепочки в критической точке $\alpha = \alpha_c$ мак-

роскопически вырождено и энтропия на спин при нулевой температуре конечна.

Намагниченность (спин основного состояния) при нулевой температуре $T = 0$ определяется усреднением S^z по ансамблю вырожденных основных состояний и магнитный момент на спин равен $m = (s_a + s_b)/2 - 1/4$. Заметим, что в ферримагнитной фазе m также равна этому значению, а в ферромагнитной фазе $m = (s_a + s_b)/2$, т.е. при $\alpha = \alpha_c$ происходит скачок намагниченности $\Delta m = 1/4$. Таким образом, в критической точке происходит квантовый фазовый переход первого рода.

Дельта-цепочка в критической точке является одним из немногочисленных примеров многочастичной квантово-механической системы с макроскопически вырожденным основным состоянием и остаточной энтропией. Спектр возбужденных состояний модели в критической точке также весьма необычен. Например, в одномагнитном спиновом секторе $S = S_{max} - 1$ модели с $s_a = s_b = 1/2$ щель ΔE в спектре возбуждений равна единице, а в двухмагнитном $S = S_{max} - 2$ она становится $\Delta E = 0.022$. Такое резкое уменьшение величины щели связано с тем, что минимальной энергии возбуждения соответствуют не состояния рассеяния двух магнов, а их связанное состояние. Низколежащие многомагнитные возбуждения также сформированы связанными состояниями и щель в спектре состояний с фиксированным значением спина $S = S_{max} - k$ драматически уменьшается с ростом k . Например, при $k = 6$ щель $\Delta E < 10^{-9}$. Это свидетельствует об экспоненциальной малости щели при $k \gg 1$. Подобно модели с $s_a = s_b = 1/2$ щель в спектре возбуждений экспоненциально мала и в случае других s_a и s_b . Оказывается также, что полный спектр нижайших возбуждений состоит из участков (подзон), соответствующих энергиям связанных состояний двух, трех и более магнов. Другими словами, спектр имеет многомасштабную структуру, которая определяет особенности низкотемпературной термодинамики. Например, теплоемкость имеет пики, определяемые вкладом соответствующих подзон спектра.

Как следует из приведенных выше результатов, поведение F-AF дельта-цепочки в критической точке имеет ряд необычных свойств, касающихся прежде всего гигантского вырождения основного состояния и остаточной энтропии, экспоненциально малых щелей в спектре возбуждений и особенностей низкотемпературной термодинамики. Хотя все эти особенности относятся, строго говоря, к модели в самой критической точке, тем не менее при значении параметра фрустрации, близком к критическому, "следы" этих особенностей все еще заметны. Например, континуум вырожденных при $\alpha = \alpha_c$ основных состояний расщепля-

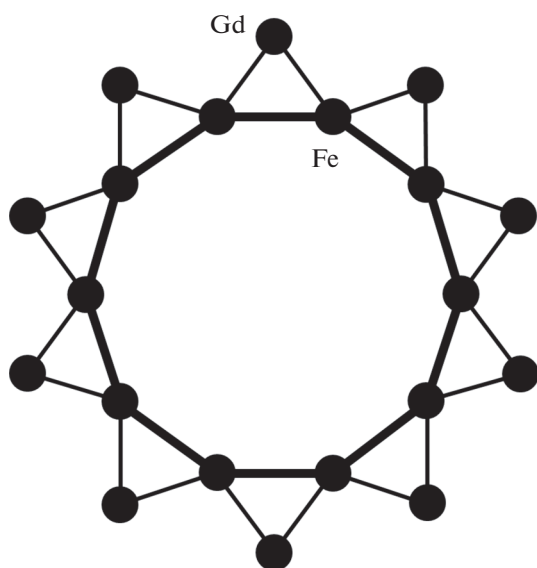


Рис. 2. Структура синтезированной магнитной молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$.

ется и превращается в огромное число экспоненциально близких уровней, а спектр возбуждений имеет, хотя и менее выраженную, но многомасштабную структуру.

На первый взгляд, все необычные свойства модели при $\alpha \approx \alpha_c$ хотя и весьма интересны, но представляют скорее академический интерес, поскольку существование реальных соединений со структурой F-AF дельта-цепочки с параметром фрустрации, близким к критическому, представлялось маловероятным. Тем более неожиданным оказалось недавнее сообщение, приведенное в работе [12] о синтезе соединения, содержащего магнитные молекулы с рекордным на тот момент значением спина основного состояния, $S = 60$! Эти молекулы представляют собой циклические координационные кластеры, в которых десять магнитных ионов Fe и десять ионов Gd образуют структуру циклической дельта-цепочки $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$, (показанной на рис. 2), состоящей из десяти треугольников с ионами Gd в вершинах и ионами Fe в основаниях. Ожидается, что это соединение весьма перспективно для использования в молекулярной спинтронике и для создания эффективных магнитоохлаждающих устройств.

Анализ экспериментальных данных для кривой намагниченности и магнитной восприимчивости соединений $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ позволил установить [12], что обменное взаимодействие ионов Fe антиферромагнитно и составляет $J_2 \sim 0.65\text{K}$, а взаимодействие ионов Fe и Gd ферромагнитно с величиной $J_1 \sim 1\text{K}$, тогда как прямое взаимодействие между ионами Gd пренебрежимо мало. На основании этих данных можно заключить, что молекула

$\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ является практически идеальной конечно-размерной реализацией F-AF дельта-цепочки с параметром фрустрации $\alpha = J_2/J_1 = 0.65$. Поскольку спины магнитных ионов Fe (s_b) и Gd (s_a) равны $5/2$ и $7/2$ соответственно, критическое значение параметра фрустрации равно $\alpha_c = 0.7$. Таким образом, молекула $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ находится в ферромагнитной области фазовой диаграммы модели (что объясняет рекордное значение спина основного состояния), но очень близко от критической точки. Как предполагают авторы работы [12], химическая модификация молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ может сдвинуть ее параметр α прямо к критическому значению и даже пересечь его.

Таким образом, понимание магнитных свойств молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ связано с задачей исследования магнитных свойств дельта-цепочки в ферромагнитной фазе, но с параметром фрустрации, близким к критическому. Точное аналитическое решение такой квантово-механической модели не представляется возможным и в таком случае естественно использовать численные расчеты. К сожалению, относительно большие значения спинов ионов Fe и Gd являются серьезной проблемой на этом пути, поскольку размерность Гильбертова пространства соответствующей матрицы для модели с $N = 20$ слишком велика ($\approx 6 \cdot 10^{16}$). Даже высокоэффективные приближенные методы на основе метода Ланцоша (Lanczos Method) позволяют провести расчет лишь для гипотетической молекулы Fe_6Gd_6 . Эти расчеты, выполненные в работе [12], показали, что даже для модели с $N = 12$ и параметром $\alpha = 0.65$ спектр низкоэнергетических состояний имеет квазивыврожденную структуру. В то же время эта система слишком мала для исследования термодинамических свойств, особенно при низких температурах. С другой стороны, в случае относительно больших значений спинов $s_a = 7/2$, $s_b = 5/2$ представляется вполне оправданным использование классического приближения, когда спины заменяются векторами с длинами s_a и s_b . Легко убедиться, что фазовые диаграммы основного состояния квантовой и классической дельта-цепочки совпадают. Энергия классической модели равна

$$E = \left(-s_a s_b \cos \varphi + \alpha s_b^2 \cos(2\varphi) \right) \frac{N}{2}, \quad (10)$$

где φ — угол между векторами s_a и s_b . Минимизация E по φ приводит к условию

$$\cos \varphi = \frac{s_a}{2\alpha s_b}, \quad (11)$$

из которого следует, что при $\alpha < \alpha_c$ основное состояние ферромагнитно (все векторы параллельны), а при $\alpha > \alpha_c$ ферромагнитно и магнитный момент на спин равен $m = s_a(1 + (2\alpha)^{-1})/2$. Значе-

ние $\alpha_c = s_a/2s_b$ определяет точку перехода между двумя фазами как в классической, так и в квантовой модели. Статистическая сумма и свободная энергия классической модели может быть вычислена точно. Мы не будем останавливаться здесь на деталях этих вычислений и приводить соответствующие довольно громоздкие формулы, а обсудим некоторые наиболее важные особенности, относящиеся к магнитным свойствам модели в ферромагнитной фазе, которая реализуется для молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$. Одной из важных характеристик системы являются спиновые корреляционные функции, определяющие ее магнитные свойства. При нулевой температуре спины выстроены параллельно, т.е. имеется дальний порядок, который разрушается при $T \neq 0$ и корреляционные функции падают экспоненциально с расстоянием между спинами и радиус корреляции при низ-

ких температурах равен $r_0 = \left(1 - 2\alpha \frac{s_a}{s_b}\right) \frac{s_a s_b}{T}$. Такое поведение корреляторов определяет, в частности, реакцию системы на внешние возмущения. Например, намагниченность при низких температурах и малых магнитных полях ведет себя как $m \sim hr_0/T$, (h – безразмерное магнитное поле), а магнитная восприимчивость в нулевом поле $\chi_0 = (\partial m / \partial h)_h = 0$ как $\chi \sim r_0/T$. Точное выражение для ведущего члена $\chi_0(T)$ при $T \rightarrow 0$ имеет вид:

$$\chi_0 = \left(1 - 2\alpha \frac{s_a}{s_b}\right) \frac{s_a s_b (s_a + s_b)^2}{6T^2}. \quad (12)$$

Формула (12) определяет поведение восприимчивости и намагниченности классической модели. Известно, однако [13], что для одномерной ферромагнитной цепочки ($\alpha = 0$) поведение намагниченности при малых полях и температурах является универсальным, зависящим только от скейлин-

говой переменной $x = \frac{hs_a s_b (s_a + s_b)^2}{6T^2}$, $m = f(x)$.

Универсальность означает, что сама функция $f(x)$ не зависит от величин s_a и s_b и, в частности, сохраняет свой функциональный вид в классическом пределе $s_a, s_b \rightarrow \infty$. Есть основания ожидать, что и для фрустрированной модели в ферромагнитной фазе такая универсальность имеет место, но скейлинговая переменная x модифицируется в

$x^* = \left(1 - 2\alpha \frac{s_a}{s_b}\right)x$. Таким образом, можно ожидать,

что классическое приближение вполне адекватно для описания магнитных термодинамических функций квантовой дельта-цепочки, по крайней мере, в ферромагнитной фазе. Действительно, полученная нами в классической модели зависимость $m(h, T)$ (при малых значениях h и T) хорошо согласуется с экспериментальными данными, полученными в работе [12] для молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$.

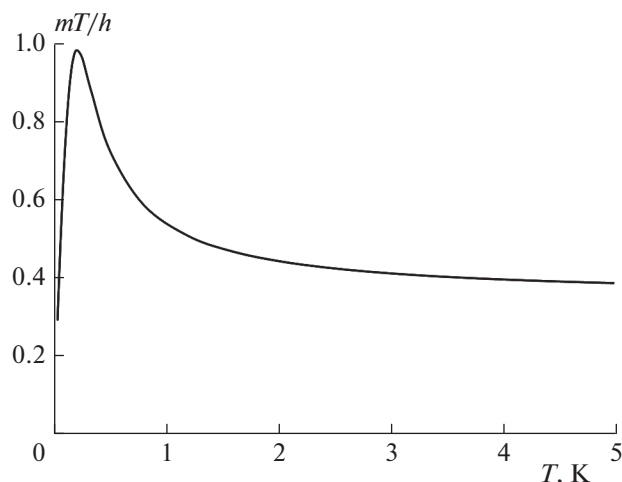


Рис. 3. Зависимость mT/h от температуры.

Интересным с точки зрения “универсальности” было бы также сравнение низкотемпературного поведения зависимости магнитной восприимчивости $\chi_0(T)$ (описываемой формулой (12)) с восприимчивостью молекулы $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ в нулевом магнитном поле, но в работе [12] восприимчивость определялась как отношение $\chi = m/h$ в ненулевом поле. Что же касается определенной таким образом восприимчивости, то ее температурная зависимость при фиксированном поле (точнее, зависимость величины mT/h), вычисленная нами в классическом приближении, показана на рис. 3. Она имеет максимум и затем падает до нуля. Кривая на рис. 3 очень хорошо воспроизводит экспериментальную зависимость для $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$, приведенную в работе [12].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы изучили модель дельта-цепочки с ферро- и антиферромагнитными обменными взаимодействиями. Конкуренция взаимодействий приводит к фрустрации. Взаимное влияние квантовых эффектов и фрустрации приводит к ряду необычных свойств, которые проявляются особенно заметно при критическом значении параметра фрустрации. Основное состояние в этом случае макроскопически вырождено и имеется остаточная энтропия. Спектр возбуждений имеет экспоненциальную щель и многомасштабную структуру, которая проявляется в низкотемпературном поведении термодинамических величин. Недавно синтезированное циклическое соединение $\text{Fe}_{10}\text{Gd}_{10}$ является реализацией этой модели с параметром фрустрации, близким к критическому, и для описания ее магнитных свойств может быть использовано классическое приближение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Diep H.T.* Frustrated Spin Systems. Singapore: World Scientific, 2013.
2. *Derzhko O., Richter J., Maksymenko M.* // Int. J. Mod. Phys. B. 2015. V. 29(12). P. 1530007.
3. *Дмитриев Д.В., Кривнов В.Я.* // Хим. физика. 2009. Т. 28. № 3. С. 24.
4. *Zhitomirsky M.E., Tsunetsugu H.* // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. P. 100403.
5. *Schnack J., Schmidt H.-J., Richter J., Schulenberg J.* // Eur. Phys. J. B. 2001. V. 24. P. 475.
6. *Richter J., Schulenburg J., Honecker A., Schnack J., Schmidt H.J.* // J. Phys.: Condens. Matter. 2004. V. 16. P. S779.
7. *Derzhko O., Richter J.* // Phys. Rev. B. 2004. V. 70. P. 104415.
8. *Ruiz-Perez C., Hernandez-Molina M., Lorenzo-Luis P. et al.* // Inorg. Chem. 2000. V. 39. P. 3845.
9. *Inagaki Y., Narumi Y., Kindo K. et al.* // J. Phys. Soc. Jpn. 2005. 2005. V. 74. P. 2831.
10. *Krivnov V.Ya., Dmitriev D.V., Nishimoto S., Drechsler S.-L., Richter J.* // J. Phys. Rev. B. 2014. V. 90. P. 014441.
11. *Dmitriev D.V., Krivnov V.Ya.* // Phys. Rev. B. 2015. V. 82. P. 054407.
12. *Baniodeh A., Magnani N., Lan Y. et al.* // npj Quantum Materials. 2018. V. 3.1. P. 10.
13. *Takahashi M., Nakamura H., Sachdev S.* // Phys. Rev. B. 1996. V. 54. P. R744.