

## БИФУРКАЦИИ ТЕЧЕНИЯ ПСЕВДОПЛАСТИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В КАНАЛЕ С РЕЗКИМ СУЖЕНИЕМ И РАСШИРЕНИЕМ

© 2019 г. С. А. Патлажан<sup>1\*</sup>, Д. Е. Рошин<sup>2,3</sup>, И. В. Кравченко<sup>2</sup>, А. А. Берлин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт химической физики им. Н.Н. Семёнова Российской академии наук, Москва, Россия

<sup>2</sup>Институт проблем химической физики Российской академии наук, Черноголовка, Россия

<sup>3</sup>Московский физико-технический институт, Долгопрудный, Россия

\*E-mail: sapat@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.03.2019;

после доработки 15.03.2019;

принята в печать 20.03.2019

Методами численного моделирования изучены условия бифуркационных переходов при течении псевдопластических жидкостей в канале с резким сужением и расширением. Реологические свойства рассматриваемых неньютоновских жидкостей описывались моделью Карро–Ясуда. Построены бифуркационные диаграммы течения для сред с разными кривыми вязкости. Показано, что значения критического числа Рейнольдса в точке бифуркации и размеры образующихся угловых вихрей существенно зависят от характера кривой вязкости.

*Ключевые слова:* канал с переменным поперечным сечением, псевдопластические жидкости, бифуркация течения.

DOI: 10.1134/S0207401X19090061

### ВВЕДЕНИЕ

Каналы с переменным поперечным сечением находят широкое применение в различных областях науки и технологии. В частности, они используются для формирования высокоскоростных струй [1, 2] и более однородного перемешивания смесей несовместимых полимеров [3]. Особый интерес представляет применение таких каналов для турбулизации течения при небольших числах Рейнольдса [4–6]. Такие течения благоприятствуют интенсификации теплообмена [7, 8] и значительному увеличению эффективности работы химических реакторов [9, 10]. Частным случаем является канал с резким сужением и расширением, и в литературе можно найти достаточно много работ, посвященных исследованию структуры течений различных жидкостей в таких каналах (см., например, [3, 5, 11–17]). Исследования показали, что на выходе из зоны сужения образуются вихри, симметрия которых может нарушаться при увеличении числа Рейнольдса. Такое резкое изменение структуры течения называют бифуркацией. Дальнейшее увеличение числа Рейнольдса приводит к каскаду бифуркационных переходов с образованием все новых вихрей разных размеров вплоть до возникновения развитого турбулентного течения.

С учетом использования каналов с переменным сечением для переноса расплавов и раство-

ров полимеров представляет значительный интерес исследовать их транспортные свойства. В данной работе ограничимся рассмотрением псевдопластических жидкостей. К ним относятся расплавы олигомеров и разбавленные растворы полиакриламида [18], ксантановой камеди [19] и карбоксиметил целлюлозы [20], а также суспензии с анизодиаметрической формой частиц, кровь [21]. Упругой реакцией таких жидкостей можно пренебречь, однако их вязкость, как правило, уменьшается с ростом скорости сдвига.

Для моделирования реологических свойств неупругих псевдопластических жидкостей зачастую используют степенную модель вязкости:

$$\eta(\dot{\gamma}) = K\dot{\gamma}^{n-1}, \quad (1)$$

где  $\eta(\dot{\gamma})$  – динамическая вязкость,  $\dot{\gamma}$  – скорость сдвига, а  $K$ ,  $n$  – параметры модели. Для псевдопластических сред  $n < 1$  [15–17, 22, 23]. Соотношение (1) использовалось также для описания течения псевдопластических сред в канале с резким сужением и расширением [15–17, 24]. Однако данная модель имеет ряд недостатков. В частности, она предсказывает неограниченное увеличение вязкости с уменьшением скорости сдвига и не описывает переход к ньютоновской жидкости с постоянной вязкостью, который наблюдается для большинства псевдопластических жидкостей.

Кроме того, согласно (1), при больших скоростях сдвига вязкость стремится к нулю. Этим недостатком лишена модель Карро–Ясуда:

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{(n-1)/a}. \quad (2)$$

Параметр  $\lambda$  определяет скорость сдвига, при которой ньютоновское плато переходит в область снижения вязкости. При малых и больших скоростях сдвига  $\dot{\gamma}$  вязкость такой модели остается конечной и принимает значения  $\eta_0$  и  $\eta_{\infty}$  соответственно. При больших скоростях сдвига и достаточно малой вязкости  $\eta_{\infty}$  ( $(\lambda \dot{\gamma})^a \gg 1$  и  $\eta_{\infty} \rightarrow 0$ ) соотношение Карро–Ясуда (2) переходит в модель степенной жидкости (1):

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 \lambda^{n-1} \dot{\gamma}^{n-1}.$$

Таким образом,  $K = \eta_0 \lambda^{n-1}$ . Модель Карро–Ясуда успешно использовалась для описания реологических свойств псевдопластических сред [18–21], в том числе при течении в каналах с резким сужением и расширением при достаточно малых числах Рейнольдса [12].

Цель настоящей работы – изучение структуры течения в канале с резким сужением и расширением на примере псевдопластических жидкостей, реологическое поведение которых описывается моделью Карро–Ясуда, соответствующих разным кривым вязкости. Мы не ограничиваемся исследованием симметричной моды течения, но также рассматриваем условия возникновения бифуркационных переходов к асимметричной картине течения. Подробно исследуются особенности бифуркаций течения (критические числа Рейнольдса и размеры угловых вихрей) различных псевдопластических жидкостей.

## МОДЕЛЬ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Течение псевдопластической жидкости рассматривалось в 2D-канале с резким сужением и расширением (рис. 1). Канал состоит из двух широких камер одинаковой ширины  $w = 0.03$  м, длиной  $l_1 = l_3 = 0.15$  м и узкого зазора между ними шириной  $a = 0.002$  м и длиной  $l_2 = 0.01$  м. Таким образом, относительное сужение составило  $w/a = 15$ . Начало координат отсчитывалось от нижнего левого угла канала. Поэтому вход в сужение лежит при  $x = 0.15$  м. Центральная линия канала соответствует  $y = 0.015$  м.

Скорость  $\mathbf{u}$  и давление  $p$  несжимаемой псевдопластической жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и условием несжимаемости:

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla p + 2\nabla [\eta(I_2) \mathbf{D}], \quad (3)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0. \quad (3a)$$

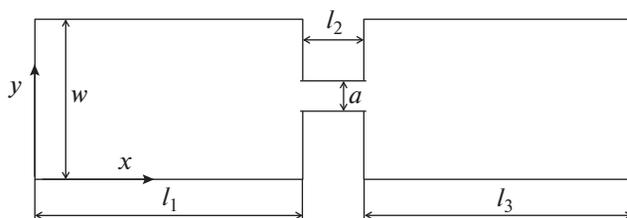


Рис. 1. Модель канала с резким сужением и расширением.

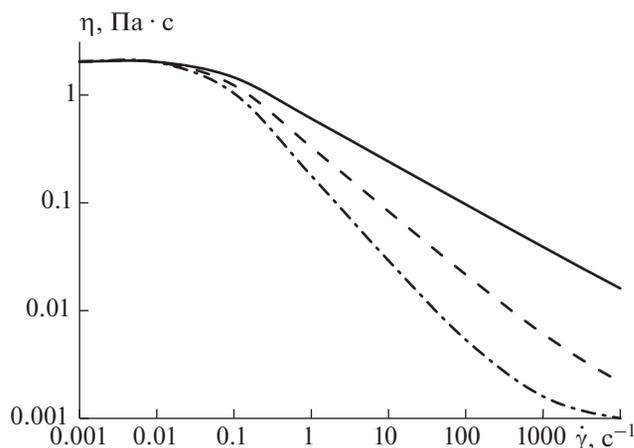


Рис. 2. Кривые вязкости для разных значений показателя  $n$  модели Карро–Ясуда:  $n = 0.6$  (сплошная линия),  $0.4$  (штриховая – 0.2%-ный (по массе) раствор ксантановой камеди),  $0.2$  (штрих-пунктир).

Здесь  $\mathbf{D} = 1/2 (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$  – тензор скоростей деформаций, а  $\rho$  – плотность жидкости, которая принята равной  $1000 \text{ кг/м}^3$ . В каналах сложной геометрии вязкость  $\eta(I_2)$  неньютоновской жидкости удобно рассматривать как функцию второго инварианта тензора скоростей деформаций  $I_2 = \mathbf{D} : \mathbf{D}$ . В этом случае соотношение (2) Карро–Ясуда представляется в виде

$$\eta(I_2) = \eta_{\infty} + (\eta_0 - \eta_{\infty}) \left[ 1 + (2\lambda^2 I_2)^{a/2} \right]^{(n-1)/a}. \quad (4)$$

При течении простого сдвига соотношения (2) и (4) совпадают. На входе в канал задавалась постоянная скорость течения, а на выходе – постоянное давление и нулевой градиент скорости. На твердых стенках выполнялось условие прилипания:  $\mathbf{u}_{wall} = 0$ .

В качестве модельной жидкости в данной работе рассматривался 0.2%-ный (по массе) водный раствор ксантановой камеди, для которого  $\eta_0 = 2.05 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\eta_{\infty} = 0.00089 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\lambda = 21.2 \text{ с}$ ,  $a = 2$  и  $n = 0.406$  [25]. Кривая вязкости такой среды соответствует штриховой линии на рис. 2. Сплошная и штрих-пунктирная линии соответствуют  $n = 0.6$

и 0.2. Видно, что уменьшение параметра  $n$  приводит к более сильной зависимости вязкости от скорости сдвига, что соответствует большему наклону кривой вязкости.

Число Рейнольдса определяли формулой

$$Re = \rho \bar{u} w / \bar{\eta}_w, \quad (5)$$

где  $\bar{u}$  – средняя скорость, а  $\bar{\eta}_w$  – средняя вязкость среды в широкой части канала. Ее можно оценить как

$$\bar{\eta}_w = \eta_\infty + (\eta_0 - \eta_\infty) [1 + (\lambda \bar{u} w^{-1})^a]^{(n-1)/a}. \quad (6)$$

При  $n = 1$   $\bar{\eta}_w = \eta_0$  и формула (5) переходит в классическое определение числа Рейнольдса для ньютоновской жидкости с вязкостью  $\eta_0$ .

Систему уравнений (3) совместно с реологической моделью (4) решали в рамках открытой вычислительной платформы OpenFoam [26] при помощи метода конечных объемов и алгоритма PISO. На расчетную область накладывали регулярные прямоугольные сетки. С целью исследования влияния густоты сетки на получаемые решения провели расчеты для ньютоновской жидкости при  $Re = 16$  для разного числа ячеек. Определили размеры  $l_1$  и  $l_2$  угловых вихрей, образующихся на выходе из узкой части канала в асимметричном режиме течения. В табл. 1 эти величины представлены в безразмерном виде относительно ширины канала  $L_1 = l_1/w$  и  $L_2 = l_2/w$ . Видно, что, начиная с числа ячеек  $1185 \times 256$ , решение перестает заметно зависеть от густоты сетки. Такая расчетная сетка была использована в данной работе для дальнейших расчетов.

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Вначале рассмотрели профили скорости установившегося течения ньютоновской и ряда псевдопластических жидкостей Карро–Ясуда при разных значениях показателя  $n$  (соотношение (4)). В средней части входной камеры канала ( $x = 0.08$  м) распределения скорости практически совпадают с таковыми в бесконечно длинной плоской щели. В частности, профиль скорости ньютоновской жидкости ( $n = 1$ ) соответствует течению Пуазейля (параболическое распределение), а при  $n = 0$  распределение скорости принимает пробкообразную форму (рис. 3). Отметим, что в последнем случае средняя скорость течения  $\bar{u}$  близка к скорости в широкой части профиля. При  $0 < n < 1$  профили скорости занимают промежуточные положения. Представленные на рис. 3 профили скорости течения соответствуют  $\bar{u} = 0.25$  м/с. Они согласуются с результатами, полученным в работе [22] для  $n \in [0.3; 1]$ .

При достаточно малых числах  $Re$  на выходе из зоны сужения формируются симметричные угло-

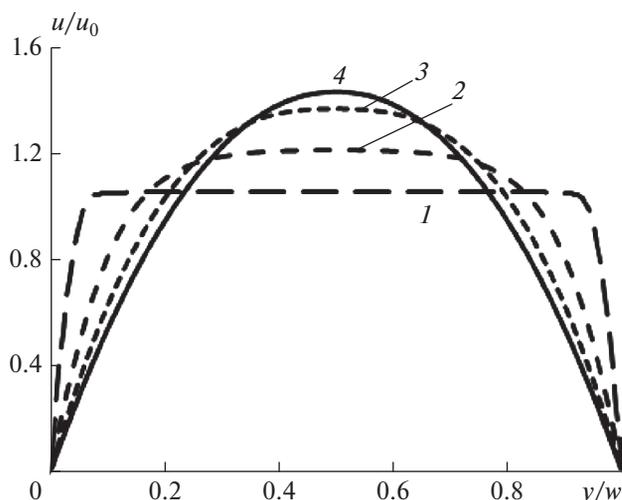


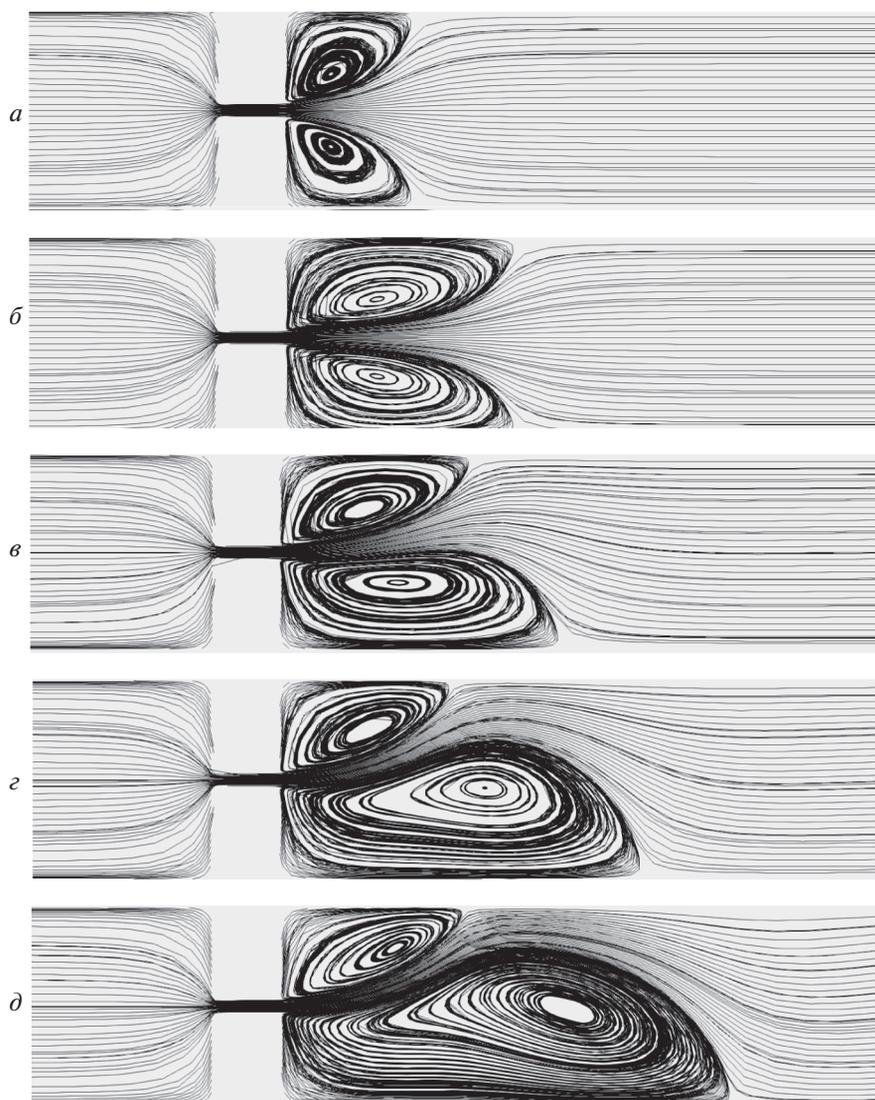
Рис. 3. Профили скоростей в широкой части канала для жидкостей с различным показателем степени  $n$ : 1 –  $n = 0$ , 2 –  $n = 0.4$ , 3 –  $n = 0.6$ , 4 –  $n = 0.9$ . Средняя скорость  $\bar{u} = 0.25$  м/с.

вые вихри как для ньютоновских, так и для псевдопластических жидкостей. Их размеры возрастают по мере увеличения  $Re$  до тех пор, пока не достигнуто некоторое критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$ , выше которого симметричная картина течения резко нарушается и один из вихрей становится больше другого – возникает асимметричное течение. Такой бифуркационный переход продемонстрирован на рис. 4 на примере псевдопластической среды Карро–Ясуда при  $n = 0.6$ , для которой, как оказалось,  $Re_{cr} = 3.06$ .

Для количественной оценки данного эффекта построили бифуркационные диаграммы в форме зависимости относительных размеров  $L_1 = l_1/w$  и  $L_2 = l_2/w$  угловых вихрей от числа Рейнольдса  $Re$  для разных значений показателя  $n = 0, 0.6, 0.9$  и 1 (рис. 5). Видно, что с увеличением числа Рейнольдса размер большего вихря продолжает расти, в то время как меньший вихрь практически не изменяется, а его наибольший размер меньше критической длины  $L_{cr}$  в точке бифуркации. Рисунок 5 также показывает, что уменьшение  $n$  приводит к заметному снижению критического числа Рей-

Таблица 1. Зависимость размеров угловых вихрей,  $L_1$  и  $L_2$ , от густоты расчетной сетки

Число ячеек	$L_1$	$L_2$
1116 × 178	0.856	1.802
1175 × 210	0.85	1.8
<b>1185 × 256</b>	<b>0.833</b>	<b>1.842</b>
1210 × 274	0.83	1.8425
1344 × 304	0.835	1.843



**Рис. 4.** Линии тока при течении жидкости Карро–Ясуда через канал с резким сужением и расширением при различных числах Рейнольдса,  $n = 0.6$ ,  $Re_{cr} = 3.06$ :  $Re/Re_{cr} = 0.60$  (а),  $1.00$  (б),  $1.07$  (в),  $1.29$  (г),  $1.76$  (д).

нольдса  $Re_{cr}$ . Другими словами, у псевдопластических жидкостей бифуркационный переход происходит при гораздо меньших числах Рейнольдса по сравнению с ньютоновской жидкостью.

Это подтверждает рис. 6, который показывает, что  $Re_{cr}$  экспоненциально спадает при уменьшении показателя  $n$ , которое соответствует росту угла наклона кривой вязкости (см. рис. 2). Зависимость  $Re_{cr}$  от  $n$  хорошо аппроксимируется соотношением  $Re_{cr} = 0.43e^{3.4n}$ . Это говорит о том, что по сравнению с ньютоновскими жидкостями течение псевдопластических сред в каналах с резким сужением и расширением гораздо менее устойчиво.

Интересно отметить, что в точке бифуркации максимальные значения относительных размеров вихрей  $L_{cr}$  также зависят от типа жидкости, т.е.

величины показателя  $n$  в соотношении Карро–Ясуда (4). Эта зависимость приведена на рис. 7. Из графика можно сделать вывод, что при  $n > 0.6$  критический размер вихрей практически не зависит от  $n$  и его значение составляет примерно 1.175. При  $n < 0.6$  величина  $L_{cr}$  начинает расти вплоть до максимального значения при  $n = 0$ .

Поскольку для рассмотренных псевдопластических жидкостей критические значения размеров вихрей  $L_{cr}$  и чисел Рейнольдса  $Re_{cr}$  сильно различаются, представляет интерес преобразовать бифуркационные диаграммы на рис. 5 в относительных координатах  $L/L_{cr}$  и  $Re/Re_{cr}$ . В этом случае все диаграммы имеют общую точку ветвления (рис. 8). При этом в асимметричной моде течения размер меньшего вихря практически не

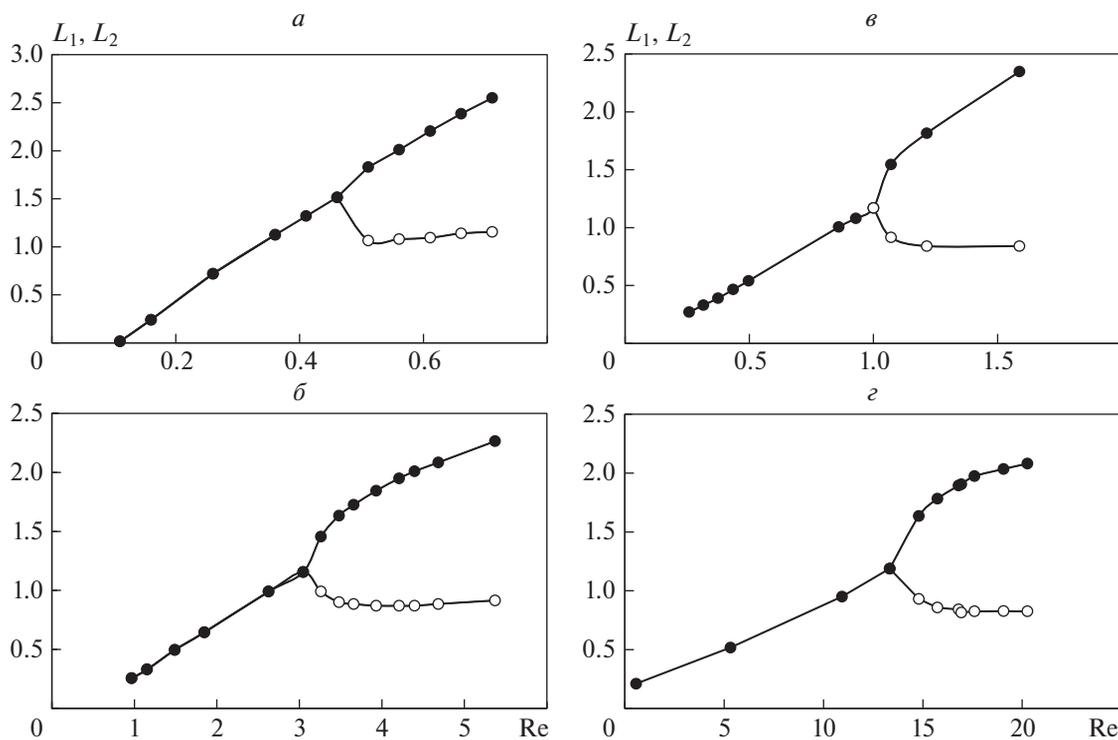


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы для разных псевдопластических и ньютоновской жидкостей:  $n = 0$  (а), 0.6 (б), 0.8 (в), 1 [25] (г).

зависит от показателя  $n$ . Он примерно одинаков для ньютоновской ( $n = 1$ ) и рассмотренных псевдопластических жидкостей при  $0 \leq n < 1$ . В то же время длина наибольшего вихря растет относительно  $L_{cr}$  с увеличением  $n$ . В симметричном режиме течения ( $Re < Re_{cr}$ ) относительный размер угловых вихрей также увеличивается с увеличением числа Рейнольдса. Этот фрагмент диаграммы показан на рис. 9 в большем увеличении. Вид-

но, что в этом случае зависимости  $L/L_{cr}$  от  $Re/Re_{cr}$  хорошо аппроксимируются линейной зависимостью при любом  $n$ :

$$\frac{L}{L_{cr}} = \alpha(n) \frac{Re}{Re_{cr}} + \beta(n). \quad (7)$$

Значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  представлены в табл. 2 при разных  $n$ , а на рис. 10 показана зависимость  $\alpha(n)$ . Видно, что с увеличением  $n$  (уменьшением

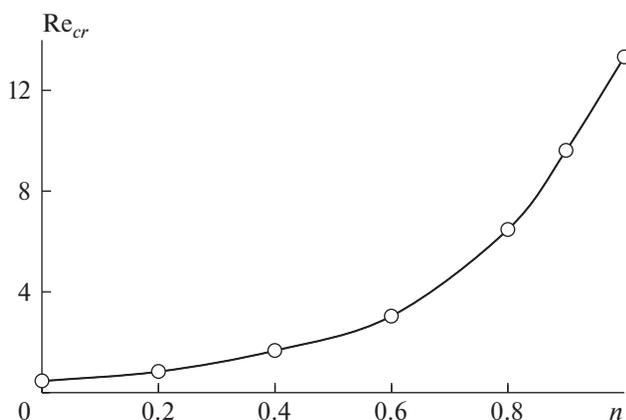


Рис. 6. Зависимость критического числа Рейнольдса от показателя степени  $n$ .

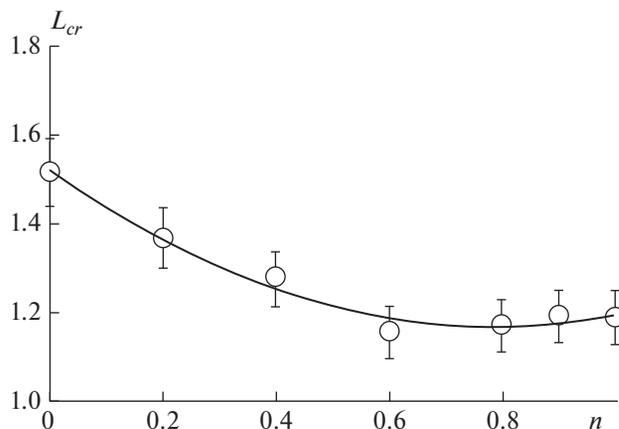


Рис. 7. Зависимость критического размера вихрей от показателя степени  $n$ .

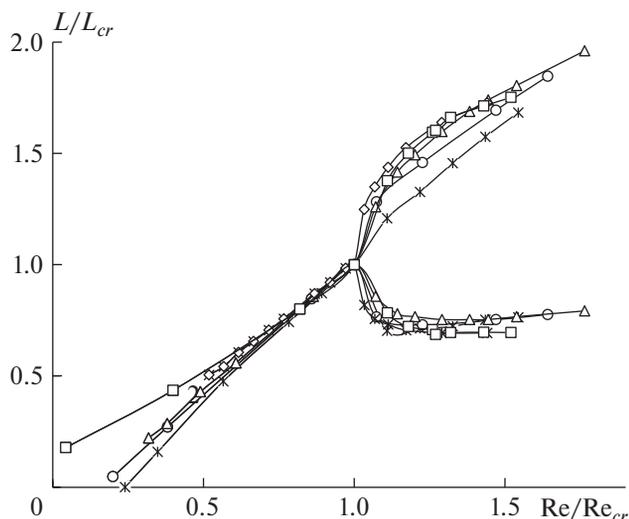


Рис. 8. Совмещенная бифуркационная диаграмма для ньютоновской и разных псевдопластических жидкостей: \* –  $n=0$ ,  $\circ$  –  $n=0.4$ ,  $\triangle$  –  $n=0.6$ ,  $\diamond$  –  $n=0.9$ ,  $\square$  –  $n=1$ .

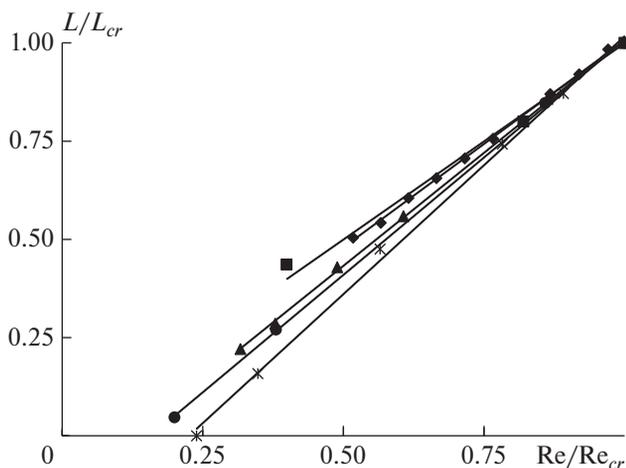


Рис. 9. Совмещенная бифуркационная диаграмма при  $Re \leq Re_{cr}$ : \* –  $n=0$ ,  $\bullet$  –  $n=0.4$ ,  $\blacktriangle$  –  $n=0.6$ ,  $\blacklozenge$  –  $n=0.9$ ,  $\blacksquare$  –  $n=1$ .

угла наклона кривой вязкости (см. рис. 2) скорость роста вихрей уменьшается линейно.

Таблица 2. Значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$  из соотношения (7) при разных  $n$

$n$	$\alpha$	$\beta$
0	1.3132	–0.2961
0.2	1.201	–0.1945
0.4	1.1949	–0.1875
0.6	1.1502	–0.1423
0.8	1.0523	–0.0536
0.9	1.052	–0.046
1.0	0.926	0.0603

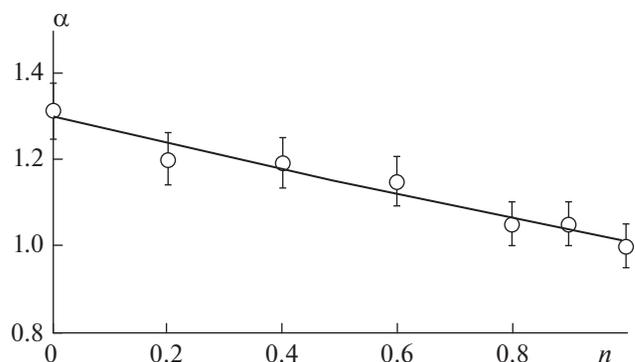


Рис. 10. Зависимость тангенса угла наклона  $\alpha$  в соотношении (7) от  $n$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методами численного моделирования в данной работе изучены особенности бифуркационных переходов различных псевдопластических сред в канале с резким сужением и расширением. Показано, что в точке бифуркации симметричное положение угловых вихрей скачкообразно переходит в асимметричное состояние, при котором их размеры становятся разными. Установлено, что с уменьшением показателя степени  $n$  в модели Карро–Ясуда, отвечающего за скорость уменьшения вязкости с ростом скорости сдвига, критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$  экспоненциально уменьшается. Последнее обстоятельство свидетельствует о том, что в канале с переменным сечением течение псевдопластических сред менее устойчиво по сравнению с ньютоновскими жидкостями. Совмещенная бифуркационная диаграмма в координатах относительного размера вихрей  $L/L_{cr}$  и относительного числа Рейнольдса  $Re/Re_{cr}$  показала, что в асимметричном режиме течения размер меньшего из вихрей практически не зависит от вида кривой вязкости или параметра  $n$ , тогда как с его уменьшением относительный размер  $L/L_{cr}$  большего вихря снижается. В режиме симметричного течения относительный размер угловых вихрей линейно возрастает с ростом  $Re/Re_{cr}$ . Таким образом, перемешивание жидкостей в каналах с резким сужением и расширением, которое ассоциируется с динамикой вихрей на выходе из узкой зоны, существенно зависит от типа кривой вязкости.

Численные расчеты проводились с использованием вычислительных ресурсов Межведомственного суперкомпьютерного центра РАН.

Научно-исследовательская работа выполнена за счет субсидии, выделенной ИХФ РАН на выполнение государственного задания (тема № 0082-2014-0013) и ИПХФ РАН (тема № 0089-2019-0001),

а также за счет гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 18-29-17072.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Eggers J., Villermaux E.* // Rep. Prog. Phys. 2008. V. 71. P. 036601.
2. *Litvinenko Y.A., Grek G.R., Kozlov G.V. et al.* // EUCASS Proc. Ser. 2012. V. 3. P. 429.
3. *Rondin J., Bouquey M., Muller R. et al.* // Polym. Eng. Sci. 2014. V. 54. P. 1444.
4. *Oliveira M.S.N., Rodd L.E., McKinley G.H. et al.* // Microfluid. Nanofluid. 2008. V. 5. P. 809.
5. *Tsai C.H., Chen H.T., Wang Y.N. et al.* // Ibid. 2007. V. 3. № 1. P. 13.
6. *Kravchenko I.V., Patlazhan S.A., Muller R. et al.* // J. Phys. Conf. Ser. 2016. V. 774. № 1. P. 012026.
7. *Konoplev A.A., Aleksanyan G.G., Rytov B.L. et al.* // Theor Found. Chem. Eng. 2007. V. 41. P. 526.
8. *Motaharinezhad M., Shahraki S., Tirgar R. et al.* // Indian J. Sci. Res. 2014. V. 1. P. 47.
9. *Minsker K.S., Berlin A.A., Zakharov V.P., Zaikov G.E.* Fast Liquid-Phase Processes in Turbulent Flows. Utrecht, Boston: Taylor & Francis, 2004.
10. *Dong L., Shufen Z.* Intern. // J. Chem. React. Eng. 2014. V. 12. P. 465.
11. *Cherdron W., Durst F., Whitelaw J.H.* // J. Fluid Mech. 1978. V. 84. P. 1. P. 13.
12. *Poole R.J., Escudier M.P., Oliveira P.J.* // Proc. Royal Soc. London Ser. A. 2005. V. 461. P. 3827.
13. *Oliveira P.J.* // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2009. V. 160. P. 40.
14. *Lanzaro A., Yuan X.F.* // Ibid. 2011. V. 166. P. 1064.
15. *Ternik P.* // Ibid. 2009. V. 157. P. 15.
16. *Ternik P.* // Ibid. 2010. V. 165. P. 1400.
17. *Dhinakaran S., Oliveira M.S.N., Pinho F.T. et al.* // Ibid. 2013. V. 198. P. 48.
18. *Balan C.M., Balan C.* // U.P.B. Sci. Bull. Ser. D. 2010. V. 72. P. 121.
19. *Haase A.S., Wood J.A., Sprakel L.M.J. et al.* // Phys. Rev. E. 2017. V. 95. № 2. P. 023105.
20. *Al-Habahbeh A.A.* Simulations of Newtonian and non-Newtonian flows in deformable tubes. PhD thesis. Michigan Technological University, 2013.
21. *Boyd J., Buick J.M., Green S.* // Phys. Fluids 2007. V. 19. № 9. P. 093103.
22. *Wang L., Tian F.-B.* // Appl. Sci. 2018. V. 8. P. 559.
23. *Pravesh R., Dhiman A., Bharti R.P.* // J. Brazil. Soc. Mech. Sci. Eng. 2019. V. 41. P. 88.
24. *Manica R., De Bortoli A.L.* // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2004. V. 121. P. 35.
25. *Патлажан С.А., Кравченко И.В., Мюллер Р.* // Докл. АН. 2017. Т. 473. № 2. С. 163.
26. *Weller H.G., Tabor G., Jasak H. et al.* // Comput. Phys. 1998. V. 12. P. 620.