

УДК 661.185.1+541.18+536.7

ЧИСЛЕННОЕ ОПИСАНИЕ БЫСТРОЙ РЕЛАКСАЦИИ В МИЦЕЛЛЯРНЫХ РАСТВОРАХ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ СФЕРОЦИЛИНДРОВ

© 2019 г. Л. В. Аджемян¹, Ю. А. Ерошкин², Т. Л. Ким², А. К. Щёкин², *

¹Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет),
факультет экономики и менеджмента,
Московский проспект, 26, Санкт-Петербург, 190013 Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, физический факультет,
Университетская наб., 7/9, Санкт-Петербург, 199034 Россия

*e-mail: a.shchekin@spbu.ru

Поступила в редакцию 07.12.2018 г.

После доработки 10.12.2018 г.

Принята к публикации 10.12.2018 г.

Недавно на основе кинетических уравнений Беккера–Дёринга был разработан полуаналитический метод расчета времени быстрой релаксации в растворах поверхностно-активных веществ с цилиндрическими мицеллами, позволяющий без потери точности значительно сократить процедуру вычислений. Для кинетических коэффициентов присоединения мономеров к агрегату использовалась модель мицеллы в виде вытянутого эллипсоида, для которой задача нахождения диффузионного потока мономеров на мицеллу имеет аналитическое решение. В настоящей работе проведены численные расчеты диффузионного потока и времени быстрой релаксации для более реалистичной модели мицеллы в виде сфероцилиндра. Результаты сопоставлены с ранее известными.

DOI: 10.1134/S0023291219030029

ВВЕДЕНИЕ

Большую роль в кинетике агрегирующих систем играет как можно более точное задание коэффициентов соответствующего кинетического уравнения, будь это уравнение Беккера–Дёринга [1], описывающее молекулярный механизм агрегации, уравнение коагуляции Смолуховского [2] или обобщенное уравнение Смолуховского [3–5] при механизме слияния и распада агрегатов.

В кинетике мицеллообразования [6, 7] для задания коэффициентов кинетических уравнений Беккера–Дёринга используются выражения для равновесного распределения мицелл по числам агрегации и для стационарного диффузионного потока мономеров поверхностно-активных вещества (ПАВ) на мицеллу при заданном числе агрегации. Для сферических агрегатов эти выражения хорошо известны [4–8], однако для цилиндрических мицелл приходится использовать доступные аппроксимации. Так, недавно для работы агрегации в равновесном распределении цилиндрических мицелл в [9] была взята за основу линейная по числу агрегации работа агрегации сфероцилиндров, а для коэффициентов присоединения мономеров к агрегату использовались линейная по числу агрегации функция и полученное более

строгое аналитическое выражение для диффузионного потока на вытянутый эллипсоид.

В настоящей работе будет рассмотрена более реалистичная модель коэффициентов присоединения мономеров к мицелле в виде сфероцилиндра. Для этого будут проведены численные расчеты диффузионных потоков на сфероцилиндры с разными числами агрегации и соответствующего этим потокам наименьшего из обратных времен быстрой релаксации для мицеллярного раствора. Результаты будут сопоставлены с ранее известными.

1. КИНЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МИЦЕЛЛ

Кинетические уравнения Беккера–Дёринга для концентраций c_n агрегатов ПАВ с числами агрегации $n = 2, 3, \dots$ имеют вид

$$\frac{\partial c_n}{\partial t} = -(J_n - J_{n-1}). \quad (1)$$

Поток J_n агрегатов вдоль оси чисел агрегации дается выражением

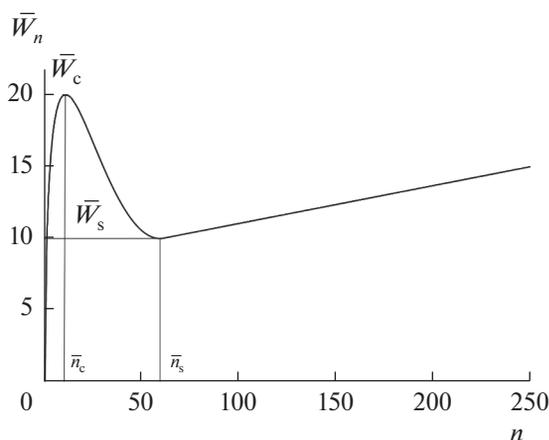


Рис. 1. Работа агрегации \bar{W}_n как функция числа агрегации n .

$$J_n = a_n \left(c_1 c_n - \frac{\tilde{c}_1 \tilde{c}_n}{\tilde{c}_{n+1}} c_{n+1} \right), \quad (2)$$

где a_n — скорость присоединения мономеров к агрегатам с числом агрегации n , \tilde{c}_n — равновесная концентрация агрегатов в единице объема. Уравнение для концентрации мономеров $c_1(t)$ следует из условия сохранения полной концентрации ПАВ c :

$$c = c_1(t) + \sum_{n>1} n c_n(t). \quad (3)$$

Для малых отклонений $\xi_n = (c_n - \tilde{c}_n)/\tilde{c}_n$ от равновесного распределения агрегатов \tilde{c}_n , т.е. при $\xi_n \ll 1$, поток J_n в (2) можно линеаризовать,

$$J_n = a_n \tilde{c}_1 \tilde{c}_n (\xi_1 + \xi_n - \xi_{n+1}). \quad (4)$$

Линеаризованную систему уравнений Беккера–Дёринга для концентраций агрегатов удобно записать в терминах переменной $u_n = \xi_n \sqrt{\tilde{c}_n}$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{A}}_* \mathbf{u}. \quad (5)$$

Здесь $\hat{\mathbf{A}}_*$ — симметричная трехдиагональная матрица с ненулевыми первой строкой и столбцом. Ее собственные значения определяют спектр обратных времен релаксации мицеллярной системы.

Равновесная концентрация агрегатов ПАВ описывается флуктуационной формулой Больцмана

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_1 e^{-W_n(\tilde{c}_1)}, \quad (6)$$

где W_n — минимальная работа агрегации (выраженная в единицах kT , k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Для идеального мицеллярного раствора зависимость работы W_n

от концентрации мономеров \tilde{c}_1 определяется выражением $-(n-1) \ln \tilde{c}_1$ [7], так что работа агрегации $\bar{W}_n \equiv W_n + (n-1) \ln \tilde{c}_1$ не зависит в идеальном растворе от концентрации мономеров \tilde{c}_1 и является функцией лишь числа агрегации n . Здесь и в дальнейшем концентрация мономеров \tilde{c}_1 предполагается измеренной в относительных единицах. Соответственно, W_n совпадает с \bar{W}_n при концентрации $\tilde{c}_1 = 1$. В терминах работы \bar{W}_n соотношение (6) примет вид

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_1^n e^{-\bar{W}_n}. \quad (7)$$

Следуя работе [10], будем использовать для работы \bar{W}_n следующее выражение:

$$\bar{W}_n = \begin{cases} w_1(n-1)^{4/3} + w_2(n-1) + w_3(n-1)^{2/3}, & n \leq n_0, \\ \bar{W}_0 + \frac{n-n_0}{\bar{n}_* - n_0}, & n > n_0. \end{cases} \quad (8)$$

Для агрегатов с числом агрегации $n \leq n_0$ работа \bar{W}_n соответствует капельной модели сферических мицелл [11, 12], а при $n > n_0$ — линейной модели цилиндрических мицелл [13]. Параметры w_i и n_0 выбираются из условия непрерывности функции \bar{W}_n и ее производной по n при $n = n_0$. Параметр \bar{n}_* имеет смысл среднего значения числа агрегации цилиндрических мицелл по области $n > n_0$ при концентрации мономеров $\tilde{c}_1 = 1$.

На рис. 1 показан график зависимости от числа n работы \bar{W}_n , определенной по формуле (8) с параметрами $w_1 = 1.01126$, $w_2 = -8.21261$, $w_3 = 17.3055$, $n_0 = 62.0334$, $\bar{W}_0 = 10.0268$, выбранными из условий $\bar{W}_n = 20$, $\bar{n}_s = 60$, $\bar{W}_s = 10$, $\bar{n}_* = 100$. Общей чертой этой работы с работой для системы сферических мицелл [6, 7] является наличие потенциального горба и ямы. Для сферических мицелл потенциальная яма относительно узка и имеет параболическую форму, так что равновесное распределение (6) — почти монодисперсное, тогда как равновесное распределение, соответствующее кривой для цилиндрических мицелл на рис. 1, является широким. При численном нахождении спектра обратных времен релаксации ранг матрицы $\hat{\mathbf{A}}_*$ ограничивают некоторым значением N числа агрегации, которое выбирается достаточно большим, чтобы исключить его влияние на наименьшие собственные значения матричного спектра. Для цилиндрических мицелл это значение оказывается значительно большим, чем для сферических мицелл, и это существенно усложняет вычисления. Разработанный в [9] полуаналитический подход позволяет значительно сократить объем вычислений.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПРИСОЕДИНЕНИЯ МОНОМЕРОВ В МОДЕЛИ СФЕРОЦИЛИНДРА

Как уже отмечалось, еще одной важной кинетической характеристикой мицеллярной системы является зависимость коэффициента присоединения a_n от n . Если пренебречь подвижностью агрегата по сравнению с подвижностью мономеров, то проблема нахождения этого коэффициента сводится к задаче нахождения полного диффузионного потока $P = a_n \tilde{c}_1$ мономеров на поверхность S неподвижной цилиндрической мицеллы. Этот поток можно записать как

$$P = D \int_S \frac{\partial c_1(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} dS, \quad (9)$$

где $\partial c_1(\mathbf{r})/\partial \mathbf{n}|_S$ – производная локальной концентрации мономеров $c_1(\mathbf{r})$ по нормали \mathbf{n} к поверхности мицеллы, D – коэффициент диффузии мономеров.

Локальная концентрация мономеров $c_1(\mathbf{r})$ удовлетворяет стационарному уравнению диффузии

$$\Delta c_1(\mathbf{r}) = 0 \quad (10)$$

(Δ – оператор Лапласа) с граничными условиями

$$c_1(\mathbf{r})|_S = 0; \quad c_1(\mathbf{r}) \rightarrow \tilde{c}_1, \quad r \rightarrow \infty. \quad (11)$$

В качестве модели цилиндрической мицеллы можно принять сфероцилиндр, ограниченный цилиндрической поверхностью с длиной L и радиусом R и двумя полусферами радиуса R на концах. Однако для такой модели аналитического решения задачи (10), (11) не существует, поэтому в работе [9] мицеллы моделировались вытянутыми эллипсоидами с малыми осями $b = c = R$ и большой осью a . Учитывая, что объем сфероида V равен $V = 4\pi a b^2/3$, а объем v_0 , приходящийся на один мономер в мицелле, не зависит от числа агрегации n , справедливы соотношения

$$n = \frac{4\pi a R^2}{3v_0}, \quad \frac{a}{R} = \frac{n}{n_0}, \quad (12)$$

где $n_0 = 4\pi R^3/3v_0$ – число агрегации в сферической мицелле максимального радиуса. Решение задачи (10), (11) было получено с использованием известного решения задачи о нахождении электростатического потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ проводящего сфероида с зарядом e . Такой потенциал удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi(\mathbf{r}) = 0 \quad (13)$$

и граничным условиям

$$\varphi(\mathbf{r})|_S = \varphi_s; \quad \varphi(\mathbf{r}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty. \quad (14)$$

Связь полного заряда сфероида e и потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ определяется соотношением, аналогичным (9):

$$e = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial \varphi(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} dS. \quad (15)$$

Согласно решению задачи (13)–(15), приведенному в [14], потенциал φ_s на поверхности выражается через полный заряд сфероида соотношением

$$\varphi_s = \frac{e}{R f\left(\frac{a}{R}\right)}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}. \quad (16)$$

Задача диффузии сводится к задаче электростатики заменами

$$\varphi(\mathbf{r}) = c_1(\mathbf{r}) - \tilde{c}_1, \quad e = \frac{-P}{4\pi D}, \quad \varphi_s = \tilde{c}_1. \quad (17)$$

В результате получаем

$$P = 4\pi R D \tilde{c}_1 f(x), \quad x = \frac{a}{R}. \quad (18)$$

В пределе $a \rightarrow R$ выражение (18) сводится к стационарному диффузионному потоку на поверхность фиксированной сферы:

$$P^{(sph)} = 4\pi D R \tilde{c}_1. \quad (19)$$

Формулы (18), (19), (12) с учетом соотношения $P = a_n \tilde{c}_1$ определяют выражение для скорости присоединения мономеров a_n для вытянутых эллипсоидов с числами агрегации $n > n_0$:

$$a_n = a_{n_0} f(x), \quad f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}, \quad x \equiv \frac{n}{n_0}. \quad (20)$$

Задача нахождения диффузионного потока на сфероцилиндр, как и в рассмотренном случае, эквивалентна определению поля $\varphi(\mathbf{r})$ заряженного сфероцилиндра. Будем решать ее в сферической системе координат с полярной осью (ось z), направленной по оси цилиндра, и началом координат в центре симметрии сфероцилиндра. В силу симметрии задачи поле $\varphi(\mathbf{r})$ зависит только от полярного угла θ и расстояния r от начала координат: $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(r, \theta)$. Симметрия задачи относительно отражения $z \rightarrow -z$ означает, что $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \pi - \theta)$, и выполнения граничного условия $\varphi(r, \theta)|_S = \varphi_s$. Достаточно потребовать на правой границе сечения сфероцилиндра, показанного на рис. 2.

Число мономеров в сфероцилиндре равно $n = (4\pi R^3/3 + \pi R^2 L)/v_0$, отношение

$$\frac{n}{n_0} = 1 + \frac{3L}{4R}, \quad (21)$$

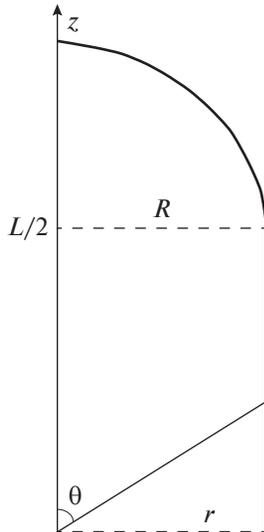


Рис. 2. Сечение сфероцилиндра. Жирной линией показана граница, на которой ставится условие $\varphi(r)|_S = \varphi_s$.

зависит только от L/R . В силу масштабной инвариантности отношение $a_n/a_{n_0} = P_n/P_{n_0}$ также зависит только от этого параметра, поэтому все расчеты проводились при $R = 1$ с соответствующим переходом к аргументу n/n_0 согласно (21).

Будем искать решение в виде разложения по системе гармонических функций $\phi_n(r, \theta) = r^{-1-n} P_n(\cos \theta)$, где $P_n(u)$ – полиномы Лежандра, $u = \cos \theta$. Функции $\phi_n(r, \theta)$ удовлетворяют уравнению $\Delta \phi_n(r, \theta) = 0$ и условию $\phi_n(r, \theta) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, для выполнения условия $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \pi - \theta)$ надо использовать четные значения n . Таким образом, запишем решение в виде

$$\varphi(\theta, r) = \varphi_s \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^{-1-2n} P_{2n}(u), \quad u \equiv \cos \theta, \quad (22)$$

множитель φ_s выделен для удобства. Приближенное решение найдем, ограничиваясь в сумме конечным числом слагаемых до N и выбирая коэффициенты A_n из требования наилучшего выполнения условия $\sum_{n=0}^N A_n r_s^{-1-2n} P_{2n}(u_s) = 1$, где (r_s, u_s) – точки, лежащие на поверхности сфероцилиндра. Используем для этого метод наименьших квадратов: выберем на поверхности некоторый набор точек $[(r_s)_k, (u_s)_k]$, $k = 1 \dots M$, $M > N$ и найдем коэффициенты A_n , минимизирующие величину $\sum_{k=1}^M \left[\left(\sum_{n=0}^N A_n (r_s^{(k)})^{-1-2n} P_{2n}(u_s^{(k)}) \right) - 1 \right]^2$. Искомую связь потенциала на поверхности φ_s с полным зарядом e проще всего найти, рассматривая потенциал (22) в дальней зоне. Учитывая, что

$P_0(u) = 1$, находим из (22) $\varphi(\theta, r) \approx A_0 \varphi_s / r$, $r \rightarrow \infty$, что определяет искомую связь: $e = A_0 \varphi_s$.

Точность полученного решения оценивалась по отклонениям потенциала на поверхности $\varphi(r, \theta)|_S$ от значения φ_s . Для контроля проводилось сравнение аналогичного приближенного расчета для модели сфероида с точным решением (20). Погрешность расчета возрастает с увеличением отношения L/R (с ростом n/n_0). Мы довели расчеты до значения $L/R = 4$ ($n/n_0 = 4$). Максимальная относительная погрешность составила 0.1%.

Представим результаты в виде $a_n = a_{n_0} F(x)$, $x = n/n_0$. Функция $F(x)$ в области $1 \leq x \leq 11/8$ ($0 \leq L/R \leq 1/2$) достаточно хорошо аппроксимируется полиномом $F(x) = 1 + (1/3)(x - 1) - 0.051(x - 1)^2$ (соответствующее разложение функции $f(x)$ имеет вид $f(x) \approx 1 + (1/3)(x - 1) - (1/45)(x - 1)^2$ с тем же начальным наклоном). В области $x > 11/8$ ($L/R > 1/2$) отношение $f(x)/F(x)$ хорошо аппроксимируется линейной функцией. Нормируя эту функцию на точку $x = 7/4$ ($L/R = 1$), в которой рассчитанное значение отношения $f(x)/F(x)$ равно 1.0114, получаем окончательно

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3}(x - 1) - 0.051(x - 1)^2, & x \leq \frac{11}{8}, \\ \frac{f(x)}{1.0114 + 0.021(x - 1.75)}, & x > \frac{11}{8}. \end{cases} \quad (23)$$

Такое аналитическое представление результата удобно для дальнейших расчетов и может рассматриваться как экстраполяция в область $n/n_0 > 4$ (разумеется, пока поправка в знаменателе (23) невелика).

На рис. 3 показаны графики зависимости $F(x)$ и $f(x)$, рассчитанные по формулам (23), (20), а также их линейная аппроксимация.

Коэффициент присоединения для сфероцилиндров всюду меньше коэффициента для вытянутых эллипсоидов (максимальное отличие при $x = 4$ составляет 6%). Это можно интерпретировать как следствие того, что при одинаковых объемах площадь сфероида больше площади сфероцилиндра (при одинаковых R). Попробуем учесть этот факт в виде поправочного множителя к (20), предполагая, что средние диффузионные потоки на единицу поверхности сфероцилиндра и сфероида близки по величине. Запишем условие равенства объемов сфероида и сфероцилиндра: $(4/3)\pi R^2 a = (4/3)\pi R^3 + \pi R^2 L$, отсюда $L = (4/3) \times (a - R)$. Площадь сфероцилиндра равна $S_{\text{sph_cyl}} =$

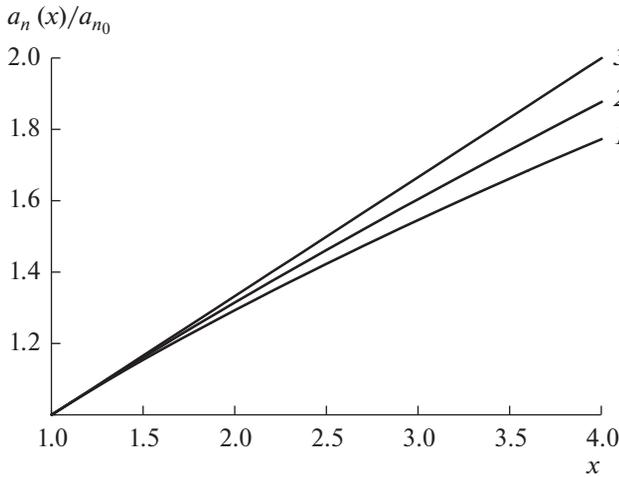


Рис. 3. Зависимость скорости присоединения мономеров от числа агрегации $x = n/n_0$: кривая 1 – для модели сфероцилиндров, 2 – для модели вытянутых эллипсоидов, 3 – линейная аппроксимация.

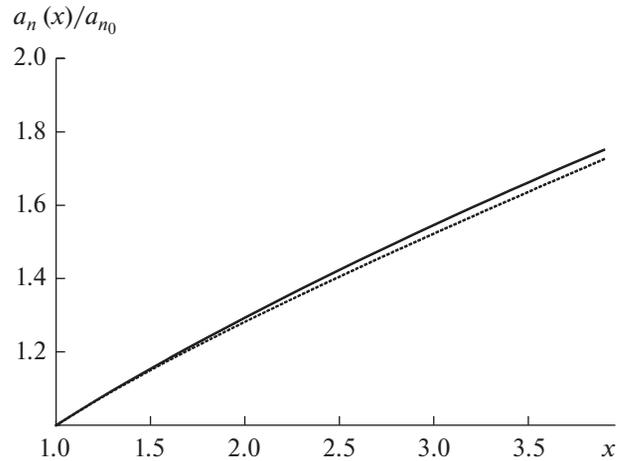


Рис. 4. Зависимость скорости присоединения мономеров от $x = n/n_0$: сплошная кривая – расчет по формуле (23), пунктир – по формуле (25).

$= 2\pi R(2R + L) = (2\pi R/3)(2R + 4a)$, а площадь сфероида для $x = a/R \geq 1$ определяется формулой $S_{\text{spheroid}} = 2\pi R^2 \left[1 + (x^2/\sqrt{x^2 - 1}) \arcsin(\sqrt{x^2 - 1}/x) \right]$. Отсюда искомый поправочный множитель равен

$$\beta \equiv \frac{S_{\text{sph_cyl}}}{S_{\text{spheroid}}} = \frac{2}{3} \frac{1 + 2x}{1 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right)}. \quad (24)$$

Будем рассматривать функцию

$$F_1(x) \equiv \beta(x)f(x) = \frac{2}{3} \times \frac{(1 + 2x)(x^2 - 1)}{\left[\sqrt{x^2 - 1} + x^2 \arcsin\left(\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}\right) \right] \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})}, \quad (25)$$

$$x \equiv \frac{n}{n_0},$$

как аппроксимацию функции $F(x)$. На рис. 4 показаны графики функций $F(x)$ и $F_1(x)$. Видим, что аппроксимация (25) оказалась достаточно хорошей, максимальное относительное расхождение кривых при $x = 4$ составляет 1%.

3. НАИБОЛЬШЕЕ ИЗ ВРЕМЕН БЫСТРОЙ РЕЛАКСАЦИИ

Рассчитанная функция $F(x)$ была использована для вычисления λ_{\min} – наименьшего из обратных времен быстрой релаксации. Расчет проводился полуаналитическим методом, предложенным в работе [9], для работы агрегации

использовалось выражение (8). Как и в [9], время измерялось в единицах $\tau_0 = 3n_0(n_* - n_0)/a_{n_0}\tilde{c}_1$. Графики зависимости λ_{\min} от концентрации для сфероцилиндров и вытянутых эллипсоидов показаны на рис. 5.

В рассмотренном диапазоне концентраций \tilde{c}_1 степень мицеллизации возрастала от $\alpha = 0.109$ при $\tilde{c}_1 = 0.995$ до $\alpha = 0.83$ при $\tilde{c}_1 = 1.02$, а среднее число агрегации мицелл – от $\bar{n}_* = 94$ до $\bar{n}_* = 215$. Ввиду меньшего значения коэффициента a_n для

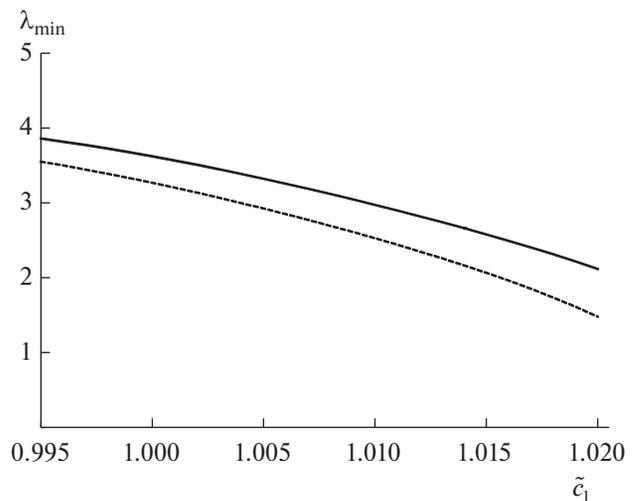


Рис. 5. Зависимость наименьшего из обратных времен быстрой релаксации λ_{\min} от концентрации мономеров \tilde{c}_1 : сплошная кривая – для модели вытянутых эллипсоидов, пунктир – для модели сфероцилиндров.

сфероцилиндра, релаксация происходит медленнее, относительная разность времен увеличивается с ростом концентрации, т.к. при этом возрастает роль крупных мицелл, для которых отличие коэффициентов a_n существеннее.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведенный численный расчет скорости присоединения мономеров показал, что для модели цилиндрических мицелл в виде вытянутых эллипсоидов эта величина несколько завышена по сравнению с более реалистичной моделью сфероцилиндров.

Получена аналитическая формула, описывающая с точностью порядка 1% зависимость скорости присоединения в модели сфероцилиндров от числа агрегации.

Вычислено наименьшее из обратных времен быстрой релаксации в модели сфероцилиндров при различных числах агрегации, оно оказалось в среднем на 10% меньше, чем для модели вытянутых эллипсоидов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-13-00112).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Becker R., Döring W.* // Ann. Phys. 1935. V. 24. P. 719.
2. *Friedlander S.K.* Smoke, Dust, and Haze. Fundamentals of Aerosol Dynamics. Oxford: Oxford University Press, 2000. P. 190.
3. *Ball J.M., Carr J.* // J. Stat. Phys. 1990. V. 61. P. 203.
4. *Zakharov A.I., Adzhemyan L.Ts., Shchekin A.K.* // J. Chem. Phys. 2015. V. 143. 124902.
5. *Shchekin A.K., Babintsev I.A., Adzhemyan L.Ts.* // J. Chem. Phys. 2016. V. 145. 174105.
6. *von Smoluchowski M.* // Z. Phys. Chem. 1917. V. 92. P. 129.
7. *Русанов А.И., Щёкин А.К.* Мицеллообразование в растворах поверхностно-активных веществ. 2-е изд. СПб.: Изд-во Лань, 2016.
8. *Щёкин А.К., Аджемьян Л.Ц., Бабинцев И.А., Волков Н.А.* // Коллоид. журн. 2018. Т. 80. С. 115.
9. *Adzhemyan L.Ts., Eroshkin Y.A., Babintsev I.A., Shchekin A.K.* // Physica A. 2019. V. 518. P. 299.
10. *Babintsev I.A., Adzhemyan L.T., Shchekin A.K.* // Soft Matter. 2014. V. 10. P. 2619.
11. *Русанов А.И., Гринин А.П., Куни Ф.М., Щёкин А.К.* // Журн. общей химии. 2002. Т. 72. С. 651.
12. *Русанов А.И., Куни Ф.М., Гринин А.П., Щёкин А.К.* // Коллоид. журн. 2002. Т. 64. С. 670.
13. *Kuni F.M., Shchekin A.K., Rusanov A.I., Grinin A.P.* // Langmuir. 2006. V. 22. P. 1534.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. 4-е изд. М.: Физматлит, 2005.