КОЛЛОИДНЫЙ ЖУРНАЛ, 2020, том 82, № 4, с. 393–399

УДК 532.64

УГЛОВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ТЕНЗОРА ДАВЛЕНИЯ В КЛИНОВИДНОЙ ПОЛОСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

© 2020 г. Е. Н. Бродская[1, *], А. И. Русанов[1]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет, Институт химии
Университетский проспект, 26, Санкт-Петербург, Петродворец, 198504 Россия
*e-mail: e.brodskaya@spbu.ru

Поступила в редакцию 06.03.2020 г.
После доработки 10.03.2020 г.
Принята к публикации 12.03.2020 г.

В дополнение к работе, опубликованной нами ранее [1], проведен детальный анализ угловой зависимости всех компонент тензора давления в клиновидной полости твердого тела с дисперсионными силами. Показано, что компоненты тензора давления удовлетворяют условиям механического равновесия как функции расстояния до стенок клиновидной полости и угловой переменной. Для малых углов получены дополнительные вклады в тензор давления по отношению к тензору давления в плоской щели.

DOI: 10.31857/S0023291220040023

В нашем предыдущем исследовании [1] были получены общие формулы для тензора давления Ирвинга–Кирквуда [2] (см. Приложение 1) в пустой клиновидной щели многокомпонентного твердого тела с дисперсионными взаимодействиями. Соответствующий парный потенциал имеет вид

$$\Phi_{ij}(R) = -A_{ij}R^{-6}, \qquad (1)$$

где A_{ij} – константа взаимодействия компонентов i и j, R – расстояние между взаимодействующими молекулами. В этом сообщении мы дополним полученные результаты более детальным анализом угловой зависимости компонент тензора давления в пустой клиновидной щели, исправив некоторые неточности.

Чтобы облегчить читателю знакомство с новыми результатами, напомним основные моменты предыдущей работы. Представим клиновидную полость в виде двугранного угла, грани которого считаем плоскими и бесконечными. Для такой системы наиболее удобны цилиндрические координаты r, φ, z с осью z на ребре двугранного угла (рис. 1).

Очевидно, что в силу симметрии системы тензор давления, как и все другие локальные свойства, не может зависеть от z. Из этого также следует, что $p_{z\varphi} = p_{\varphi z} = 0$ и $p_{rz} = p_{zr} = 0$. Остаются четыре составляющих тензора давления: три диагональных, p_{rr}, $p_{\varphi\varphi}$ и p_{zz}, и одна недиагональная (сдвиговая) $p_{r\varphi} = p_{\varphi r}$. В данном случае давление $p_{\varphi\varphi} \equiv p_N$ действует по нормали к стенкам полости, составляющие же p_{rr} и p_{zz} играют роль тангенциальных давлений. Все они зависят от положения внутри полости, но при его изменении должны удовлетворять условию механического равновесия

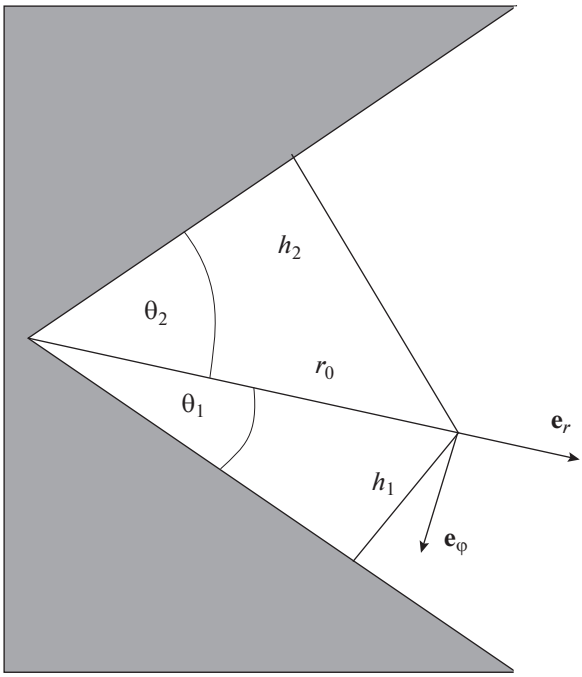

Рис. 1. Сечение клиновидной полости перпендикулярно ее ребру, вдоль которого направлена ось z. Угол раствора клина $\theta = \theta_1 + \theta_2$.

$$\nabla \cdot \hat{p}(\mathbf{r}) = 0, \tag{2}$$

которое в данном случае эквивалентно трем скалярным уравнениям

$$\frac{\partial p_{rr}}{\partial r} + \frac{p_{rr} - p_{\varphi\varphi}}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial p_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2p_{r\varphi}}{r} + \frac{\partial p_{r\varphi}}{\partial r} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial z} = 0. \tag{5}$$

Пропуская данный в [1] подробный вывод компонент тензора давления, приведем почти окончательный результат

$$\hat{p}(r_0, \theta_1, \theta_2) = -\frac{5C}{32r_0^3 \sin^3\theta}\hat{I}(\theta_1, \theta_2), \tag{6}$$

где

$$\hat{I}(\theta_1, \theta_2) \equiv \int\limits_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} \hat{\kappa}(\varphi)\frac{\sin^3(\varphi-\theta_1)\sin^3(\varphi+\theta_2)}{\sin^3\varphi}d\varphi, \tag{7}$$

а составляющие тензора $\hat{\kappa}(\varphi)$ даются выражениями

$$\begin{gathered}\kappa_{rr}(\varphi) = \cos^2\varphi, \quad \kappa_{\varphi\varphi}(\varphi) = \sin^2\varphi, \\ \kappa_{r\varphi}(\varphi) = \sin\varphi\cos\varphi, \quad \kappa_{zz}(\varphi) = 1/5.\end{gathered} \tag{8}$$

В выражение для постоянной $C \equiv \pi\sum_{i,j} A_{ij}\rho_i\rho_j$ входят парциальные плотности компонентов ρ_i, суммирование проводится по всем компонентам твердого тела. Диагональные составляющие тензорного интеграла (7) удовлетворяют условию

$$I_{\varphi\varphi} + I_{rr} = 5I_{zz}, \tag{9}$$

а потому и для диагональных составляющих тензора давления можно записать

$$p_{\varphi\varphi} + p_{rr} = 5p_{zz}. \tag{10}$$

Очевидно, что локальная зависимость тензора давления характеризуется расстоянием r_0 до ребра клина и одной угловой переменной, например, θ_1, поскольку $\theta_2 = \theta - \theta_1$. Интегралы (7) легко берутся, но приводят к громоздким выражениям из тригонометрических функций. Их явный вид дан в Приложении 2. Но убедиться, что полученные выражения удовлетворяют условиям механического равновесия (3)–(5), можно и не обращаясь к явным аналитическим выражениям для интегралов. Для этого введем переменную $\psi \equiv \varphi - \theta_1$, с помощью которой составляющие тензорного интеграла (7) примут вид

$$\begin{aligned}I_{\varphi\varphi} &= \int\limits_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} d\varphi\frac{\sin^3(\varphi-\theta_1)\sin^3(\varphi+\theta_2)}{\sin\varphi} = \\ &= \int\limits_0^{\pi-\theta} d\psi\frac{\sin^3\psi\sin^3(\psi+\theta)}{\sin(\psi+\theta_1)},\end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}I_{rr} &= \int\limits_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} d\varphi\frac{\cos^2\varphi\sin^3(\varphi-\theta_1)\sin^3(\varphi+\theta_2)}{\sin^3\varphi} = \\ &= \int\limits_0^{\pi-\theta} d\psi\frac{\cos^2(\psi+\theta_1)\sin^3\psi\sin^3(\psi+\theta)}{\sin^3(\psi+\theta_1)},\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}I_{zz} &= \frac{1}{5}\int\limits_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} d\varphi\frac{\sin^3(\varphi-\theta_1)\sin^3(\varphi+\theta_2)}{\sin^3\varphi} = \\ &= \frac{1}{5}\int\limits_0^{\pi-\theta} d\psi\frac{\sin^3\psi\sin^3(\psi+\theta)}{\sin^3(\psi+\theta_1)},\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}I_{r\varphi} &= \int\limits_{\theta_1}^{\pi-\theta_2} d\varphi\frac{\cos\varphi\sin^3(\varphi-\theta_1)\sin^3(\varphi+\theta_2)}{\sin^2\varphi} = \\ &= \int\limits_0^{\pi-\theta} d\psi\frac{\cos(\psi+\theta_1)\sin^3\psi\sin^3(\psi+\theta)}{\sin^2(\psi+\theta_1)}.\end{aligned} \tag{14}$$

Теперь, пользуясь выражениями (6) и (11)–(14), легко убедиться в том, что уравнения (3) и (4) выполняются, если принять во внимание тождество $\partial/\partial\varphi \equiv -\partial/\partial\theta_1$. Последнее вытекает из выбора направления орта $\mathbf{e}_\varphi$ (рис. 1) и определения углов θ_1 и θ_2. Условие (5) следует из симметрии системы.

Очевидно, что локальная угловая зависимость тензора давления в клиновидной щели сосредоточена в интегралах (11)–(14) как функциях угла θ_1. На рис. 2 приведены эти интегралы как двумерные функции θ и θ_1. Видно, что при больших значениях угла раствора клина все функции обращаются в нуль при любых значениях θ_1 в силу исчезновения щели и превращения системы в плоский поверхностный слой твердого тела в вакууме с нулевым значением давления. Все диагональные компоненты тензорного интеграла (рис. 2а, 2б, 2в) при фиксированном значении угла раствора являются симметричными функциями относительно серединного сечения щели при $\theta_1 = \theta/2$, где они принимают минимальные значения. Недиагональная компонента (рис. 2г) равна нулю на данном сечении и меняет знак при пересечении этой плоскости, являясь антисимметричной функцией относительно серединного сечения. Как объяснено в работе [1], это не означает изменения знака реальной сдвиговой компоненты давления на противоположных стенках щели и связано лишь с выбором направления орта полярного угла локальной системы координат (рис. 1).

Интеграл $I_{\varphi\varphi}$ при небольших значениях угла раствора описывает отклонения нормального давления от постоянного значения в плоской щели. Для заданного значения угла θ_1 этот интеграл монотонно уменьшается с ростом угла раствора. Аналогично ведет себя интеграл I_{zz} (рис. 2б), хотя его значения заметно меньше значений $I_{\varphi\varphi}$. Отсюда следует, что аналог тангенциального давле-

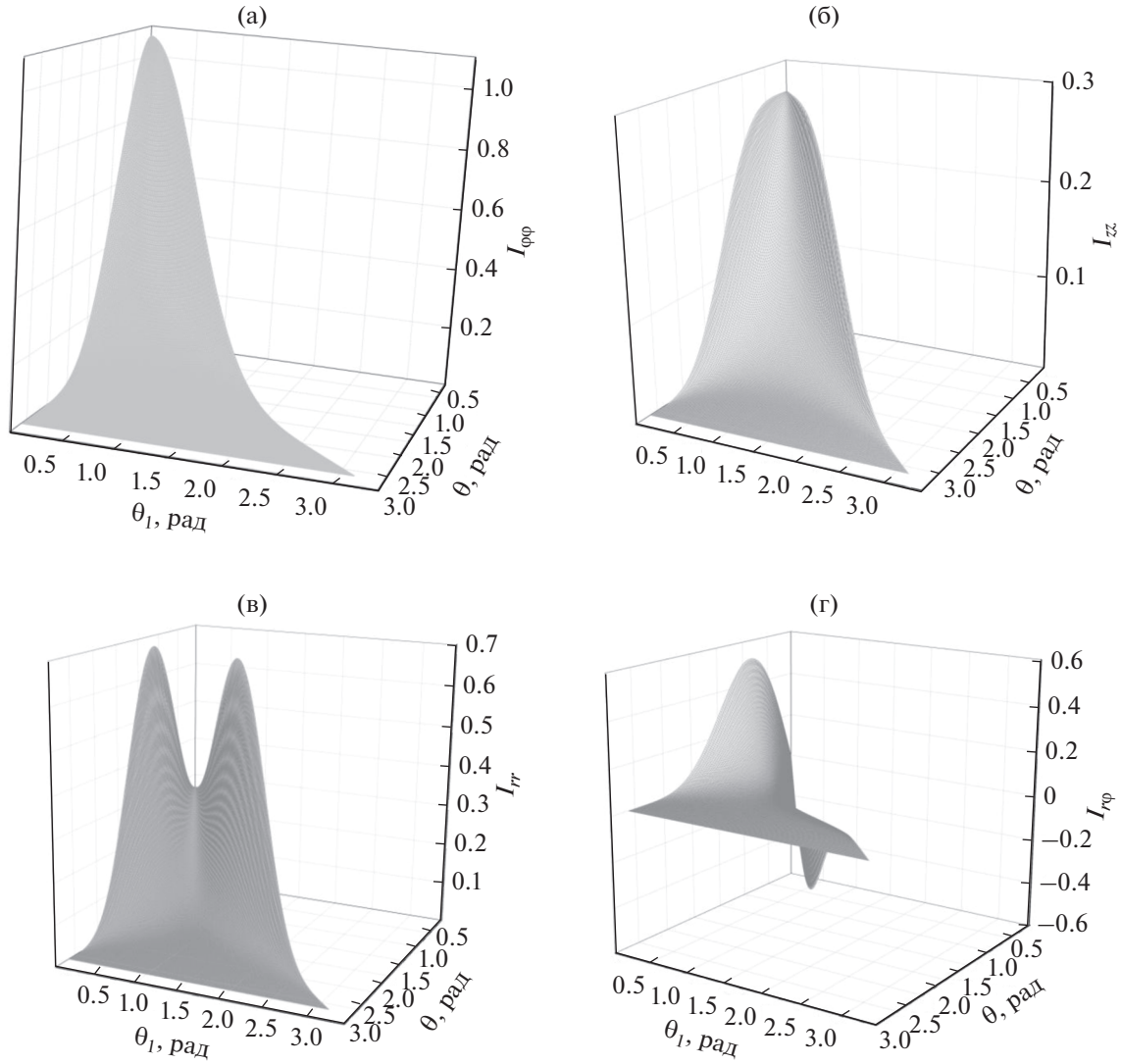

Рис. 2. Угловая зависимость компонентов тензорного интеграла $\hat{I}(\theta,\theta_1)$ в клиновидной щели $I_{\varphi\varphi}$ (а), I_{zz} (б), I_{rr} (в) и $I_{r\varphi}$ (г).

ния в плоской щели I_{zz} менее чувствителен к отклонению ее стенок от параллельности по сравнению с нормальным давлением. Гораздо более сложным поведением отличается второй аналог тангенциального давления I_{rr} (рис. 2в), характеризуемый немонотонной зависимостью от угла раствора щели при заданном локальном положении рассматриваемой точки.

В области малых значений переменных можно получить простые аналитические зависимости интегралов, разлагая точные выражения из Приложения 2 в степенные ряды. Получим следующие выражения:

$$I_{\varphi\varphi} \xrightarrow[\theta_1,\theta\to 0]{} \frac{16}{15}\times \left[1-\frac{3}{4}\theta_1^2-\frac{3}{4}(\theta-\theta_1)^2-\frac{9}{4}\theta_1(\theta-\theta_1)\right], \tag{15}$$

$$I_{zz} \xrightarrow[\theta_1,\theta\to 0]{} \frac{4}{15}\left[1-\frac{9}{2}\theta_1(\theta-\theta_1)\right], \tag{16}$$

$$I_{rr} \xrightarrow[\theta_1,\theta\to 0]{} \frac{4}{15}\times \left[1+3\theta_1^2+3(\theta-\theta_1)^2-\frac{27}{2}\theta_1(\theta-\theta_1)\right], \tag{17}$$

$$I_{r\varphi} \xrightarrow[\theta_1,\theta\to 0]{} \frac{4}{5}(\theta-2\theta_1)\times \left[1-3\theta_1^2-3(\theta-\theta_1)^2+\theta_1(\theta-\theta_1)\right]. \tag{18}$$

Приведенные выражения удовлетворяют условиям равновесия (3)–(5). Следует отметить, что в отличие от локальной переменной θ_1 зависимость интегралов $\hat{I}(\theta,\theta_1)$ от угла раствора θ не характеризует эту зависимость компонент тензора давле-

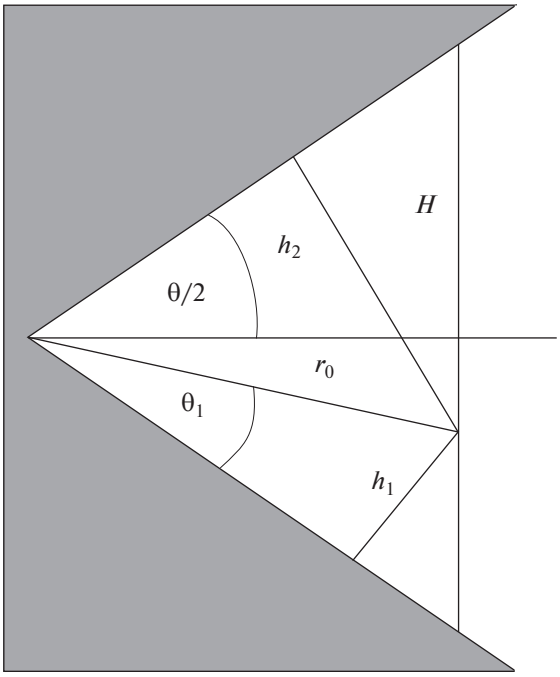

Рис. 3. Определение локальной ширины клиновидной полости. Горизонтальная линия – биссектриса угла θ.

ния, поскольку согласно формуле (6) помимо интегралов нужно учитывать еще множитель $\sin^{-3}\theta$ перед ними. Это затрудняет анализ поведения компонент тензора давления при малых значениях угла раствора и сравнения их с компонентами давления в плоской щели [3–5]. Более удобным для этой цели оказывается другой набор локальных переменных, в котором вместо расстояния до ребра r_0 рассматривают локальную ширину H, определяемую длиной отрезка (между стенками полости) прямой, перпендикулярной плоскости-биссектрисе двугранного угла и проходящей через расчетную точку $\mathbf{r}(r_0, \theta_1)$ (рис. 3).

Согласно геометрии

$$r_0 \sin\theta = H \frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos(\theta/2 - \theta_1)}. \quad (19)$$

Подставляя это выражение в формулу (6), получим новую формулу для тензора давления в пустой клиновидной щели

$$\hat{p}(H, \theta_1, \theta_2) = -\frac{5C\cos^3(\theta/2 - \theta_1)}{32H^3\cos^6(\theta/2)}\hat{I}(\theta_1, \theta_2). \quad (20)$$

Видно, что характерная для тонких пленок обратная кубическая зависимость от поперечного размера сохраняется и для клиновидной полости. Теперь угловая зависимость компонент тензора давления будет описываться следующими тензорными интегралами:

$$\hat{F}(\theta, \theta_1) \equiv \frac{\cos^3(\theta/2 - \theta_1)}{\cos^6(\theta/2)}\hat{I}(\theta, \theta_1). \quad (21)$$

Их численные значения отличаются от значений интегралов $\hat{I}(\theta, \theta_1)$ на множитель

$$f(\theta, \theta_1) = \frac{\cos^3(\theta/2 - \theta_1)}{\cos^6(\theta/2)}. \quad (22)$$

Очевидно, что функция (22) будет стремиться к бесконечности при приближении угла раствора к развернутому углу. Однако для сравнения с плоской пленкой достаточно изучить поведение этой функции при значениях углов, ограниченных величиной прямого угла. На рис. 4 приведены угловые зависимости данной функции для случаев $\theta < \pi/2$ и $\theta < \pi/6$. Видно, что функция симметрична, всюду больше единицы и при $\theta_1 = \theta/2$ принимает максимальные значения. В случае угла раствора $\pi/6$ максимальное значение примерно равно 1.8.

Учитывая поведение функции f, можно убедиться, что интегралы $\hat{F}(\theta, \theta_1)$ будут качественно отличаться от интегралов $\hat{I}(\theta, \theta_1)$ (рис. 2) и их численные значения окажутся больше. Компоненты этого интеграла при $\theta \le \pi$ приведены на рис. 5.

Интеграл $F_{\varphi\varphi}$ (рис. 5а) при небольших значениях угла раствора описывает отклонения нормального давления от постоянного значения в плоской щели. Будучи симметричной функцией локальной переменной θ_1, на серединном сечении он принимает максимальные значения. При малых значениях угла раствора зависимость от θ_1 является довольно слабой, что согласуется с постоянством этой компоненты в плоской щели. Для заданного значения угла θ_1 интеграл $F_{\varphi\varphi}$ монотонно уменьшается с ростом угла раствора. В отличие от функции $F_{\varphi\varphi}$ аналоги тангенциальных компонент тензора F_{zz} (рис. 5б) и F_{rr} (рис. 5в) принимают максимальные значения на стенках щели. При малых значениях угла раствора их значения близки друг другу, что согласуется с фактом тождества тангенциальных компонент в плоской щели. Однако с увеличением угла раствора предельные значения двух компонент начинают заметно различаться, так что $F_{rr} > F_{zz}$. Очевидно, что недиагональная компонента является слабо немонотонной функцией угла раствора клина. Как и интеграл $I_{r\varphi}$, $F_{r\varphi}$ является антисимметричной функцией локальной переменной θ_1, хотя соответствующая компонента тензора давления остается симметричной функцией, которая обращается в нуль на серединном сечении клина.

Поскольку при анализе этих функций особый интерес представляет область малых углов, полезно найти аналитические выражения для этой области. В пределе малых значений угла раствора

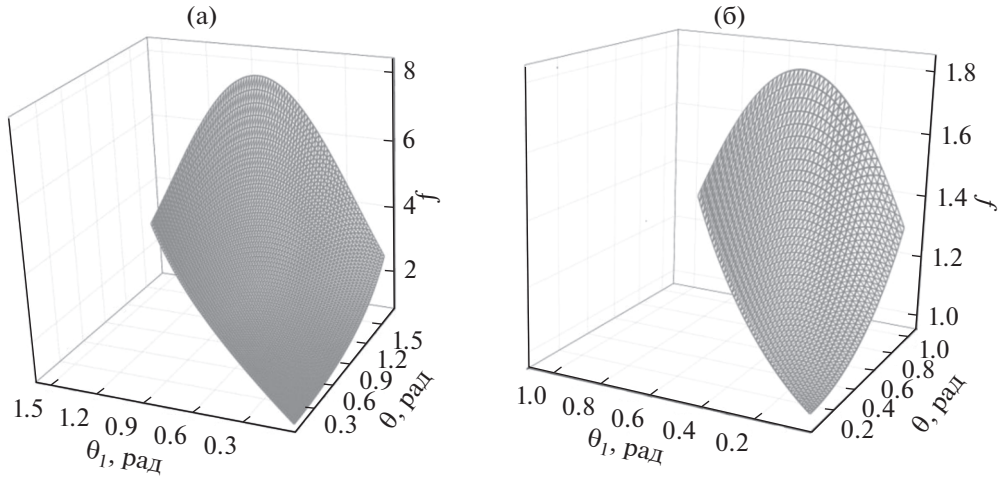

Рис. 4. Угловая зависимость функции $f(\theta_1,\theta)$ при $\theta < \pi/2$ (а) и $\theta < \pi/6$ (б).

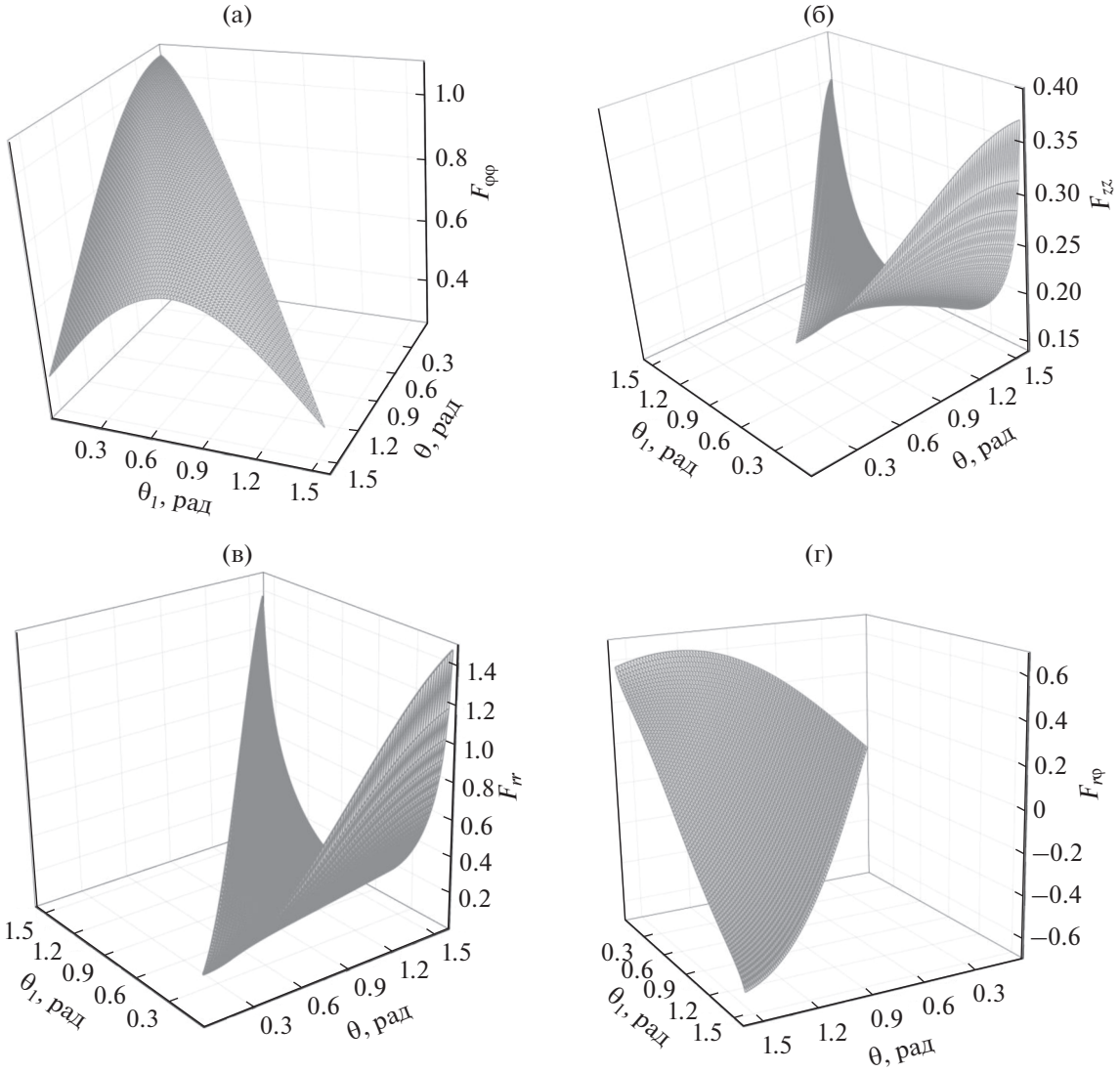

Рис. 5. Угловая зависимость компонент тензорного интеграла $\hat{F}(\theta,\theta_1)$: $F_{\varphi\varphi}$ (а), F_{zz} (б), F_{rr} (в) и $F_{r\varphi}$ (г).

функция f может быть представлена следующим образом:

$$f \xrightarrow[\theta_1,\theta\to 0]{} 1+\frac{3}{8}\left(\theta_1^2+\theta_2^2+6\theta_1\theta_2\right). \qquad (23)$$

Имея предельные значения интегралов (15)–(18) и функции f (23), можно найти приближенные формулы для компонент тензора давления в пределе слабых отклонений стенок щели от параллельности. Для удобства сравнения с известными результатами для плоских щелей [3–5] запишем выражения для тензора давления в терминах расстояний рассматриваемой точки до стенок щели h_1 и h_2, показанных на рис. 1 и 3. С учетом равенств $h_i = r_0\sin\theta_i \cong r_0\theta_i$ (i = 1, 2) приближенные выражения для компонент тензора давления принимают следующий вид:

$$p_{\varphi\varphi}(H,h_1,h_2) = -\frac{C}{6H^3}\left(1-\frac{3}{8}\frac{h_1^2+h_2^2}{r_0^2}\right), \qquad (24)$$

$$p_{rr}(H,h_1,h_2) = \\ = -\frac{C}{24H^3}\left(1+\frac{27}{8}\frac{h_1^2+h_2^2}{r_0^2}-\frac{45h_1h_2}{4r_0^2}\right), \qquad (25)$$

$$p_{zz}(H,h_1,h_2) = -\frac{C}{24H^3}\left(1+\frac{3}{8}\frac{h_1^2+h_2^2}{r_0^2}-\frac{27h_1h_2}{4r_0^2}\right), \qquad (26)$$

$$p_{r\varphi}(H,h_1,h_2) = \frac{C}{8H^3}\frac{h_1-h_2}{r_0}\times \\ \times\left(1-\frac{21}{8}\frac{h_1^2+h_2^2-2h_1h_2}{r_0^2}\right). \qquad (27)$$

По своей точности формулы (24)–(27) должны соответственно заменить формулы (26)–(29) в [1], при выводе которых не был учтен вклад функции f. Из формул (24)–(27) видно, что аналог нормального давления в клиновидной щели ($p_{\varphi\varphi}$) для данного значения локальной ширины меньше нормального давления в плоской щели, а аналоги тангенциальных компонент (p_{zz}, p_{rr}), наоборот, больше, чем тангенциальные компоненты в плоской щели.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тензор давления Ирвинга–Кирквуда определяется как

$$\hat{p}(\mathbf{r}) = kT\sum_i \rho_i(\mathbf{r})\hat{1} - \frac{1}{2}\sum_{i>j}\int d\mathbf{R}\,\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{R}}{R}\Phi'_{ij}(R)\times \\ \times\int_0^1 d\eta\,\rho_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}-\eta\mathbf{R},\mathbf{r}-\eta\mathbf{R}+\mathbf{R}),$$

где $\hat{p}(\mathbf{r})$ – значение тензора давления в точке $\mathbf{r}$, k – постоянная Больцмана, T – температура, $\rho_i(\mathbf{r})$ – одночастичная функция распределения (локальная плотность) частиц сорта i, $\hat{1}$ – единичный тензор, $\mathbf{R}$ – вектор, соединяющий две взаимодействующие частицы с расстоянием R между ними и проходящий через точку $\mathbf{r}$ (запись $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ символизирует прямое векторное произведение, являющееся тензором, $\Phi'_{ij}(R)$ – производная от потенциала парного взаимодействия $\Phi_{ij}(R)$ частиц сортов i и j (т.е. сила взаимодействия этих частиц), $\rho_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}-\eta\mathbf{R},\mathbf{r}-\eta\mathbf{R}+\mathbf{R})$ – двухчастичная функция распределения для частиц, находящихся одновременно в точках $\mathbf{r}-\eta\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}-\eta\mathbf{R}+\mathbf{R}$ по разные стороны от единичной площадки с координатой $\mathbf{r}$ (что регулируется вспомогательной переменной η).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. РЕЗУЛЬТАТ ИНТЕГРИРОВАНИЯ (7)

$$I_{\varphi\varphi} = \sin^3\theta_1\sin^3\theta_2\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}\right)+ \\ +3(\sin\theta_2-\sin\theta_1)\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin\Delta+ \\ +(\sin^3\theta_2-\sin^3\theta_1)\times \\ \times\left(\frac{1}{3}\sin^3\Delta-\sin\theta_1\sin\theta_2\sin 2\Delta\right)- \\ -\frac{1}{5}\sin\Delta\left(\sin^5\theta_2-\sin^5\theta_1\right)\left(1-4\cos^2\Delta\right)- \\ -(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\times \\ \times\left(\frac{3}{4}\sin 2\theta_1\sin 2\theta_2\cos\Delta-\cos^3\Delta\right)- \\ -(\cos^3\theta_1+\cos^3\theta_2)\times \\ \times\left(\cos\theta_1\cos\theta_2\cos 2\Delta-\frac{1}{3}\cos^3\Delta\right)+ \\ +\frac{1}{5}(\cos^5\theta_1+\cos^5\theta_2)(1-4\sin^2\Delta)\cos\Delta,$$

$$5I_{zz} = -\frac{1}{2}\sin\theta_1\sin\theta_2(\sin^2\theta_1\cos\theta_2+ \\ +\sin^2\theta_2\cos\theta_1)-\sin\theta_1\sin\theta_2\times \\ \times\left(3\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\Delta-3\sin^2\Delta- \\ -\frac{1}{2}\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\right)\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}\right)+ \\ +(\sin\theta_2-\sin\theta_1)(\sin^3\Delta-3\sin\theta_1\sin\theta_2\sin 2\Delta+ \\ +3\sin\theta_1\sin\theta_2\sin\Delta)+(\sin^3\theta_2-\sin^3\theta_1)\times \\ \times\left(\frac{1}{2}\cos\Delta\sin 2\Delta-\frac{1}{3}\sin^3\Delta\right)-(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\times \\ \times(3\sin\theta_1\sin\theta_2\cos 2\Delta-\cos^3\Delta)- \\ -(\cos^3\theta_1+\cos^3\theta_2)\left(\frac{1}{3}\cos^3\Delta-\frac{1}{2}\sin\Delta\sin 2\Delta\right),$$

$I_{rr} = 5I_{zz} - I_{\varphi\varphi}$ [см. (16)],

$$I_{r\varphi} = -3\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2\sin\Delta\ln\left(\mathrm{tg}\frac{\theta_1}{2}\mathrm{tg}\frac{\theta_2}{2}\right) + \\ + (\sin\theta_2 - \sin\theta_1)\sin\theta_1\sin\theta_2 \times \\ \times [3(\sin\theta_1\sin\theta_2\cos\Delta - \sin^2\Delta) - \sin\theta_1\sin\theta_2] + \\ + (\sin^3\theta_2 - \sin^3\theta_1)(\sin^2\Delta\cos\Delta - \\ - \sin\theta_1\sin\theta_2\cos 2\Delta) + \frac{1}{5}(\sin^5\theta_2 - \sin^5\theta_1)\times \\ \times (1 - 4\sin^2\Delta)\cos\Delta - 3(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\sin^2\theta_1 \times \\ \times \sin^2\theta_2\sin\Delta + (\cos^3\theta_1 + \cos^3\theta_2)\sin\Delta\cos\Delta\cos\theta + \\ + \frac{1}{5}(\cos^5\theta_1 + \cos^5\theta_2)\sin\Delta(1 - 4\cos^2\Delta),$$

где $\Delta \equiv \theta_2 - \theta_1$.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бродская Е.Н., Русанов А.И.* // Коллоид. журн. 2009. Т. 71. С. 23.
2. *Irving J.H., Kirkwood J.G.* // J. Chem. Phys. 1950. V. 18. P. 817.
3. *Hamaker H.C.* // Physica. 1937. V. 4. P. 1058.
4. *Дерягин Б.В.* // Коллоид. журн. 1955. Т. 17. С. 207.
5. *Русанов А.И., Куни Ф.М.* // Исследования в области поверхностных сил / ред. Дерягин Б.В. М.: Наука, 1967. С. 129.