

УДК 544.032

О ЗАРЯДОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И МЕТАСТАБИЛЬНОМ СОСТОЯНИИ РАВНОВЕСИЯ ЗАРЯЖЕННОЙ ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ ПРИ ЭЛЕКТРОРАСПЫЛЕНИИ ЖИДКОСТИ

© 2021 г. Ю. В. Самухина^{1, *}, Д. Д. Матюшин¹, П. А. Поляков², А. К. Буряк¹

¹Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,
Ленинский проспект, 31, Москва, 119071 Россия

²Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Ленинские горы, 1, Москва, 119991 Россия

*e-mail: juliesam2008@mail.ru

Поступила в редакцию 27.11.2020 г.

После доработки 13.03.2021 г.

Принята к публикации 15.03.2021 г.

Известно, что сильно заряженные капли, образовавшиеся в процессе электрораспыления, распадаются на ряд более мелких капель. В данной статье рассмотрены критерии неустойчивости и распада жидких проводящих капель в процессе электрораспыления. Продемонстрированы некоторые формы искажения сферической жидкой капли для случая превышения критерия устойчивости Рэлея. В результате анализа развития зарядовой неустойчивости показана возможность существования квазиустойчивого состояния в процессе распада жидкой капли в области неустойчивости согласно критерию Рэлея.

DOI: 10.31857/S0023291221040108

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день анализ органических и биоорганических молекул актуален для различных направлений в химии, биологии, физики и современной технологии. Например, в целях подбора оптимальной концентрации лекарственных средств [1, 2], для поиска и выявления биомаркеров патологических состояний в медицине [3], в области протеомики, предметом изучения которой является белковый состав биологических объектов [4], для исследования катализа [5] и в других областях [6]. Решение данных задач обеспечивается методами масс-спектрометрии, обладающими высокой чувствительностью и возможностью получения информации о структуре молекул. Однако при анализе труднолетучих, полярных и термически нестабильных соединений, к которым относится большинство веществ биоорганического происхождения, возникают трудности, связанные с невозможностью испарить их без разложения при обычном нагревании образца. В таких случаях необходимым является применение неразрушающих методов испарения и ионизации веществ в масс-спектрометре. Для этого используются методы “мягкой” ионизации, одним из которых является электрораспыление [7, 8].

В методе получения электроспрея исследуемое вещество смешивается с растворителем, в качестве которого чаще всего используются смеси воды с летучими органическими соединениями (например, с метанолом). Далее растворенный образец с постоянной скоростью подается в металлический капилляр, к которому приложено напряжение порядка 2.6–6 кВ относительно противоиэлектрода. В результате, внутри раствора происходит перераспределение зарядов: положительные скапливаются у среза капилляра и при равенстве сил электростатического расталкивания и поверхностного натяжения образуют конус Тейлора [9]. При дальнейшем увеличении разности потенциалов, увеличивается сила расталкивания и, когда эта сила превышает силу поверхностного натяжения, маленькая заряженная капля отрывается от поверхности и через окружающий газ летит к противои электроду. В процессе соударений с частицами газа растворитель испаряется с поверхности капли в токе нагретого газа. В результате плотность заряда на поверхности увеличивается. Также на каплю действуют поперечные силы со стороны плотного газа, через который она пролетает. В результате капля подвергается деформации: на ее поверхности образуется выступ. Если кулоновская сила отталкивания превышает силу поверхностного натяжения, с по-

верхности капли происходит эмиссия вторичных капель меньшего размера. Состояние, соответствующее предельному заряду, при котором начинается такой процесс, называется рэлеевским пределом стабильности. Вторичные (дочерние) капли также испаряются. Когда размер дочерних капель становится столь малым, что их заряд превышает рэлеевский предел стабильности, они распадаются с образованием кластеров заряженных молекул. Процессы реализации и развития зарядовой неустойчивости при электрораспылении детально рассмотрены в ряде работ [10–12].

Впервые задача о зарядовой неустойчивости капли проводящей жидкости была рассмотрена лордом Рэлеем еще в 19 веке. Он ввел так называемый критерий Рэля для устойчивости заряженной сферической капли, равный отношению удвоенной энергии кулоновского взаимодействия к энергии поверхностного натяжения:

$$T = \frac{q^2}{4\pi\alpha r_0^3}, \quad (1)$$

где q – заряд, сообщенный капле, α – коэффициент поверхностного натяжения, r_0 – радиус капли. При значениях $T \geq 4$ возникает неустойчивость.

В связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями данного явления [13] исследование неустойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес. Например, рассматриваемое явление широко используется при получении порошков тугоплавких металлов, в химической технологии при распылении жидкого топлива, лакокрасочных материалов и ядохимикатов, горючего в реактивных двигателях космической техники, в технологии электрокапельной печати.

Несмотря на большое количество теоретических и экспериментальных работ по изучению неустойчивости заряженной капли и условий ее распада на дочерние капли [14–16], многое в физике этого явления остается не выясненным до настоящего времени и поэтому привлекает внимание исследователей.

Отдельный интерес представляет расчет равновесных форм капель в левитаторах (бесконтактных подвесах) различного типа: акустического [17], аэродинамического, электромагнитного, электростатического [18] и их всевозможных комбинаций [19]. Широкое использование левитаторов связано с современными технологиями получения высокочистых веществ, а также с неоднократно попытками проверить справедливость критерия Рэля устойчивости капли по отношению к собственному заряду [20]. В последние годы этот критерий неоднократно экспериментально проверялся в различного вида левитаторах.

Согласно экспериментальным данным капля электропроводящей жидкости в непроводящей среде в однородном внешнем электростатическом поле будет вытягиваться вдоль поля E в фигуру, близкую к сфероиду. По мере усиления поля E удлинение капли будет увеличиваться и при достижении полей некоторого критического значения на вершинах капли начнут формироваться заостренные выступы, с вершин которых начнется сброс избыточного заряда (индуцированного полем E) в виде струек высокодисперсных сильно заряженных капелек [21].

В тех случаях, когда требуется оценить степень отклонения реальной равновесной формы капли от сфероидальной, используется представление профиля капли в виде разложения по полиномам Лежандра [22].

РАЗВИТИЕ ЗАРЯДОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ И МЕТАСТАБИЛЬНОЕ СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСИЯ

Обычно при решении задачи о зарядовой неустойчивости капли используют метод возмущений, рассматривая равновесную конфигурацию заряженной капли простой формы (как правило, шара). Далее рассматривается малое отклонение от шарообразной формы и анализируется развитие этого возмущения. При определенных параметрах среды возможно развитие неустойчивости. Однако данный способ позволяет обнаружить лишь линейную стадию неустойчивости и не дает возможности предсказать, приведет ли неустойчивость к новому равновесному состоянию формы капли или к ее распаду на более мелкие дочерние капли.

Иной подход (энергетический) к анализу зарядовой неустойчивости основан на рассмотрении свободной энергии заряженной капли в начальном состоянии и в конечном состоянии, которое обусловлено развитием неустойчивости. Например, для заданного заряда капли вычисляется суммарная энергия капли в начальном состоянии и после ее деформации, возникшей в результате развития неустойчивости.

Рассмотрим каплю проводящей жидкости сферической формы радиуса r_0 . На сферическую поверхность капли будут действовать капиллярное давление и давление электростатического поля собственного заряда капли, распределенного равномерно по ее поверхности. Капиллярное давление стремится сжать каплю. Давление электростатического поля, которое связано с отталкиванием одноименных зарядов друг от друга, стремится растянуть каплю. Отклик на превышение давления электростатического поля капиллярного давления будет изменение формы капли.

Свободная энергия капли будет равна сумме кулоновской энергии и энергии поверхностного натяжения:

$$W = W_q + W_s, \quad W_q = \frac{\Psi_0 q}{2}, \quad W_s = 4\pi r_0^2 \alpha,$$

где $\Psi_0 = q/r_0$ – потенциал заряженной капли.

Как было отмечено выше, простой деформацией сферической капли будет вытягивание капли в сфероид, который получается при вращении эллипса вокруг большей оси. В работе [23] рассматривалась устойчивость вытянутой сфероидальной заряженной проводящей капли с точки зрения минимума ее энергии, равной сумме энергии поверхностного натяжения и энергии электростатического поля собственного заряда капли; было показано существование метастабильных состояний в некотором диапазоне значений параметра Рэлея.

В работах [24–27] проводились аналитические (на основе принципа минимума свободной энергии равновесного состояния) и численные расчеты (из условия баланса давлений на свободной поверхности капли) для определения равновесной формы сфероидальной капли и нахождения критических условий потери такой каплей устойчивости. В частности, в работе [27] для численного анализа равновесной формы и устойчивости зараженной капли электропроводящей жидкости использовался метод конечных элементов, однако он применим лишь в случае малых отклонений формы капли от сферической.

Равновесная форма капли может быть не конгретизирована и представляться в виде результата численного расчета графически, а также в виде ряда по полиномам Лежандра, коэффициенты которого находятся из принципа минимума свободной энергии капли [22, 28].

В результате развития зарядовой неустойчивости могут также образовываться капли сложной, нетривиальной формы. Например, разнообразные геометрические формы были получены в работах [29, 30] при электрораспылении.

Следует отметить, что успеху проведенных аналитических расчетов стабильных форм капель способствовало широкое применение компьютерных пакетов аналитических вычислений: ввиду громоздкости расчетов, уверенность в их справедливости позволила приобрести только проверка данных расчетов с помощью пакета компьютерных программ. В данной работе анализ был проведен при помощи численных методов в среде Wolfram Mathematica. Вычисления проводились в пакете Wolfram Mathematica с использованием методов численного интегрирования и метода итераций.

Рассмотрим проводящую каплю сложной формы и исследуем, как изменяется ее энергия в

зависимости от заряда, сообщенного капле, и формы капли.

Как известно, решением уравнения Лапласа является представление потенциала в виде разложения по шаровым функциям [31]:

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=-n}^n \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} Y_n^k(\theta, \phi), \quad (2)$$

где $Y_n^k(\theta, \phi)$ – сферические функции.

Такое представление было использовано Рэлеем для исследования неустойчивости заряженной капли [32], где потенциал произвольно деформированной поверхности сферической капли был записан в указанном разложении по сферическим гармоникам.

Каждый член бесконечного ряда $\sum_{k=-n}^n \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} \times Y_n^k(\theta, \phi)$ является частным решением уравнения Лапласа [33]. Любая конечная сумма ряда (2) будет также являться решением уравнения Лапласа

$$\psi(r, \theta, \phi) = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} Y_n^k(\theta, \phi). \quad (3)$$

Мы подбираем такую форму заряженной проводящей оболочки, чтобы она совпадала с одной из эквипотенциальных поверхностей, задаваемых выражением (3) при фиксированном значении потенциала ψ .

$$\psi = \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^n \frac{a_{nk}}{r^{n+1}} Y_n^k(\theta, \phi). \quad (4)$$

Выражение (4) является полиномом степени $N + 1$ относительно обратного радиуса $1/r$. Следовательно, чтобы найти форму возможной замкнутой эквипотенциальной поверхности, необходимо найти корни этого полинома, коэффициентами которого является линейная комбинация сферических функций $Y_n^k(\theta, \phi)$. Каждый корень является функцией сферических координат θ, ϕ и определяет некоторую эквипотенциальную поверхность $r = r(\theta, \phi)$.

Аналитический вид решения уравнения (4) возможен только для полинома не старше 4-ой степени, иначе корни будут трансцендентными. Таким образом, имеется четыре набора возможных аналитических решений для замкнутых фигур, определяемых равенством (4). Форма поверхности этих фигур $r = r(\theta, \phi)$ задается аналитическими выражениями, определяемыми корнями соответствующих полиномиальных уравнений.

Для случая, когда потенциал зависит только от азимутального угла θ и не зависит от полярного угла ϕ , получаемые поверхности должны быть

фигурами вращения относительно оси Z . Форма этих поверхностей задается следующим уравнением [34]:

$$\Psi = \sum_{n=0}^N a_n \frac{P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}, \quad (5)$$

где $N \leq 3$, $P_n(\cos \theta)$ – полиномы Лежандра степени n , $a_n = a_{n0}$ в ряду (3). В частности, при $N = 0$ имеем случай однородно заряженной сферы.

В данной работе мы рассмотрели частный случай, при котором $N = 2$, коэффициент $a_1 = 0$. Тогда уравнение поверхности принимает вид

$$\frac{a_0}{r} \pm \frac{a_2}{r^3} P_2(\cos \theta) = \Psi, \quad \phi \in [0; 2\pi), \quad (6)$$

где a_2 и a_0 – некоторые постоянные, Ψ – постоянный потенциал на рассматриваемой поверхности. Параметр a_0 имеет смысл суммарного электрического заряда q , распределенного по поверхности, задаваемой уравнением (5).

Введем следующие обозначения: $\Psi_0 = \frac{a_0}{r_0}$ – электростатический потенциал проводящей сферы с зарядом $q = a_0$ и радиусом r_0 , $x = r/r_0$ – безразмерный радиус-вектор, нормированный на радиус этой сферы, $\Psi = \frac{\Psi}{\Psi_0} = \frac{\Psi}{a_0/r_0}$ – безразмерный потенциал.

Разделим обе части равенства (6) на потенциал Ψ_0 . Тогда уравнение поверхности (6) примет следующий безразмерный вид:

$$\Psi x^3 - x^2 \mp k P_2(\cos \theta) = 0,$$

где $k = \frac{a_2}{a_0 r_0^2}$.

Рассмотрим случай со знаком “+”:

$$\Psi x^3 - x^2 + k P_2(\cos \theta) = 0.$$

Действительный корень определяется выражением

$$x = \frac{1}{3\Psi} \left(1 + \frac{2^{1/3}}{(A + \sqrt{A^2 - 4})^{1/3}} + \frac{(A + \sqrt{A^2 - 4})^{1/3}}{2^{1/3}} \right), \quad (7)$$

где введено обозначение: $A = 2 - \frac{27}{2} \Psi^2 k P_2(\cos \theta)$.

Из условия необходимости действительности и неотрицательности выражения (7) следует ограничение на значения параметра k [34]:

$k \in \left[-\frac{4}{27}; \frac{8}{27} \right]$. При значениях параметра k , выходящих за пределы критических, произойдет разрыв исходной капли и она расплывится на мелкие заряженные капельки.

Объем исходной сферической капли $V_0 = \frac{4}{3} \pi r_0^3$. Объем фигуры вращения определяется формулой

$$V = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{r(\theta)} r^2 dr = \frac{2}{3} \pi \int_{-1}^1 r^3 d \cos \theta.$$

Воспользовавшись условием сохранения объема для несжимаемой жидкости ($V_0 = V$), можно методом простой итерации найти зависимость $\Psi(k)$.

На рис. 1 показана форма капель, образующихся при различных значениях параметра k .

Площадь поверхности капли описывается формулой [33]:

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta |\nabla F|}{\nabla F \vec{U}_r} d\theta, \quad (8)$$

где $F(r, \theta, \phi) = 0$ – уравнение поверхности, \vec{U}_r – орт радиус-вектора, $\nabla F \vec{U}_r / |\nabla F|$ – косинус угла между нормалью к поверхности и радиус-вектором в точке (r, θ, ϕ) .

Приведем уравнение (8) к безразмерному виду

$$S = 2\pi r_0^2 \int_{-1}^1 s_1 d \cos \theta,$$

где

$$s_1 = x^2 \frac{\left((3\Psi x^2 - 2x)^2 + \frac{9}{x^2} k^2 \cos^2 \theta (1 - \cos^2 \theta) \right)^{1/2}}{3\Psi x^2 - 2x}. \quad (9)$$

После процедуры разложения выражения для s_1 (9) в ряд по параметру k и подстановки в формулу для площади поверхности получим:

$$S = 2\pi r_0^2 \left(2 + \frac{4k^2}{5} + \frac{104k^3}{105} + \frac{1272k^4}{175} + \frac{45288k^5}{1925} + \frac{115560736k^6}{875875} \right).$$

Свободная энергия проводящей капли несферической формы определяется выражением

$$W = \frac{q\Psi}{2} + \alpha S,$$

где

$$\Psi = \Psi \frac{q}{r_0} = \frac{\left(1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} \right)}{r_0} q$$

– потенциал заряженной капли изменившейся формы. Следовательно,

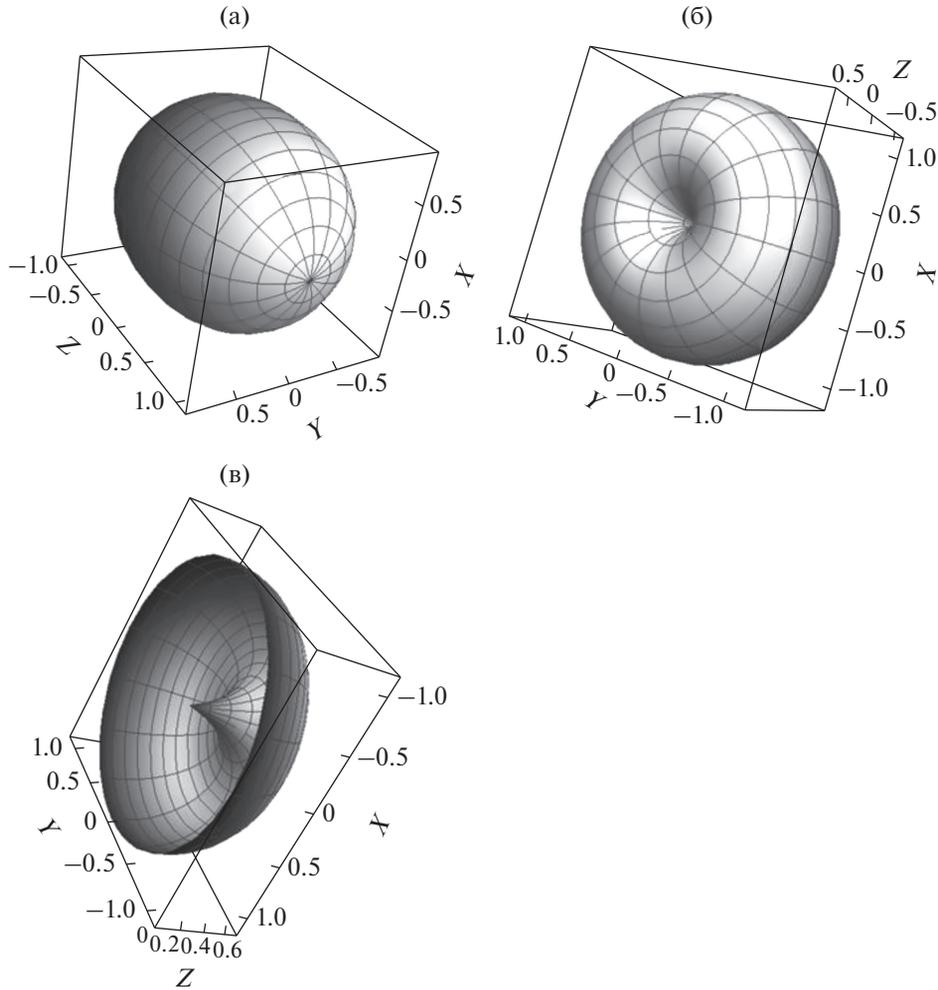


Рис. 1. Форма каплей, образующихся в результате развития зарядовой неустойчивости при значениях параметра $k = -0.12$ (а) и 0.25 (б); вид капли в разрезе при значении параметра $k = 0.27$ (в).

$$W = \frac{\left(1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3}\right)}{2r_0} q^2 + 2\alpha \left(2 + \frac{4k^2}{5} + \frac{104k^3}{105} + \frac{1272k^4}{175} + \frac{45288k^5}{1925} + \frac{115560736k^6}{875875}\right) \pi r_0^2.$$

Выразим энергию капли новой формы через параметры T (параметр Рэлея) и k :

$$W = 1 - \frac{k^2}{5} - \frac{4k^3}{21} - \frac{6k^4}{5} - \frac{24k^5}{7} - \frac{53k^6}{3} + \frac{2 \left(1 + \frac{2k^2}{5} + \frac{52k^3}{105} + \frac{636k^4}{175} + \frac{22644k^5}{1925} + \frac{57784868k^6}{875875}\right)}{T}. \quad (10)$$

На рис. 2 построены графики зависимости свободной энергии капли W от параметра k при значении параметра Рэлея $T = 4.6$. Сплошной линией обозначена кривая, соответствующая урав-

нению (10) при разложении по k до 6-го порядка. Пунктирной линией обозначена кривая, соответствующая разложению W до k^5 , а штрихпунктирной линией – кривая, соответствующая

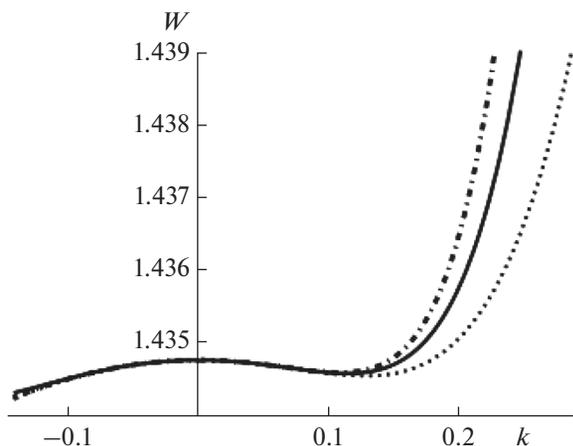


Рис. 2. Зависимости энергии капли W от параметра k , соответствующие разложению W до 5-го, 6-го и 7-го порядков по k .

разложению W до k^7 . Минимум энергии достигается в диапазоне значений параметра $k \approx [0.1; 0.13]$.

Как следует из рис. 2, на кривых зависимости свободной энергии W от параметра k имеется

участок, близкий к горизонтальному, за которым следует их резкий подъем. Видно, что возникает локальный минимум. Несомненным является факт существования такого участка, где энергия близка к локальному минимуму, а баланс ponderomotorных сил близок к нулю. Таким образом, при указанном выше диапазоне значений параметра k сферическая капля будет относительно длительное время находиться в новой, искаженной форме. Затем капля новой формы постепенно распадется в соответствии с критерием Рэлея (1) на отдельные заряженные капли.

На рис. 3 показана форма капли, находящейся в квазистабильном состоянии.

ВЫВОДЫ

Исследована зарядовая неустойчивость жидкой капли заряженной проводящей жидкости. В работе проведено исследование энергии каплей сложной формы. Рассмотрены некоторые формы искажения жидкой капли от сферической для случая превышения критерия устойчивости Рэлея. В результате исследования развития зарядовой неустойчивости получен новый результат: показана возможность существования квазиустойчивого состояния в процессе распада жидкой капли

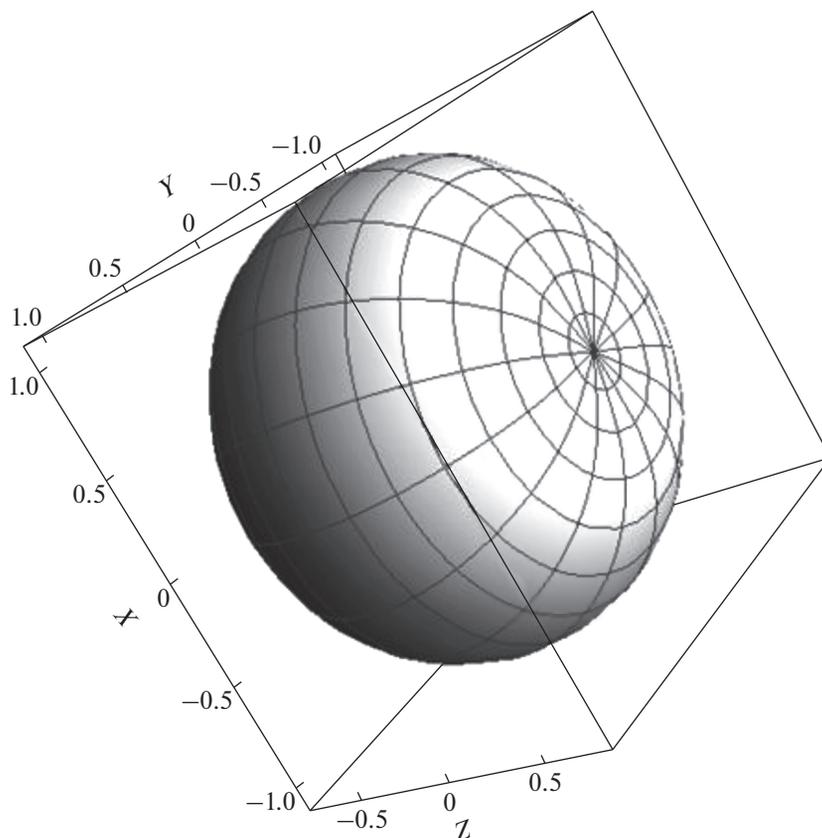


Рис. 3. Форма искаженной сферической капли, находящейся в квазистабильном состоянии.

для значения параметра Рэлея, превышающего критическое значение. Найдена новая несферическая форма капли, для которой процесс распада будет очень медленным, а величина изменения энергии будет практически равна нулю.

Следует отметить, что исследование неустойчивости заряженной поверхности жидкости представляет значительный интерес для понимания физических основ процесса электрораспыления. В свою очередь, глубокое понимание физики электрораспыления будет способствовать лучшей точности проведения измерений.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *McShane A.J., Bunch D.R., Wang S.* // Clin. Chim. Acta. 2016. V. 454. P. 1.
2. *Haouala A., Zanolari B., Rochat B., Montemurro M., Zaman K., Duchosal M.A., Ris H.B., Leyvraz S., Widmer N., Decosterd L.A.* // J. Chromatogr. B. 2009. V. 877. P. 1982.
3. *Dass C.* Principles and Practice of Biological Mass Spectrometry. N.Y.: Wiley, 2001.
4. *Conrotto P., Souchelnytskyi S.* // Exp. Oncol. 2008. V. 30. P. 171.
5. *Schröder D.* // Acc. Chem. Res. 2012. V. 45. P. 1521.
6. *Lebedev A.T., Zaikin V.G.* // J. Anal. Chem. 2008. V. 63. P. 1128.
7. *Kebarle P., Peschke M.* // Anal. Chim. Acta. 2000. V. 406. P. 11.
8. *Fenn J.B., Mann V.V., Meng C.K., Wong S.F., Whitehouse C.M.* // Science. 1989. V. 246. P. 64.
9. *Taylor G.* // Proc. R. Soc., London A. 1964. V. 280. P. 383.
10. *Li K.-Y., Tu H., Asit K.* // Langmuir. 2005. V. 21. P. 3786.
11. *Tang K., Smith R.* // J. Am. Soc. Mass. Spectrom. 2001. V. 12. P. 343.
12. *Gomez A., Tang K.* // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 404.
13. *Shiryayeva S.O., Kornienko D.O., Volkova M.V.* // Surf. Eng. Appl. Electrochem. 2009. V. 45. P. 272.
14. *Shiryayeva S.O.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2006. V. 51. p. 1431.
15. *Belonozhko D.F., Grigor'ev A.I.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2000. V. 45. P. 1001.
16. *Shchukin S.I., Grigor'ev A.I.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2000. V. 45. P. 381.
17. *Yarin A.L., Brenn G., Kastner O.* // J. Fluid. Mech. 1999. V. 399. P. 151.
18. *Dupac M., Beale D.G., Overflat R.A.* // Nonlinear Dyn. 2005. V. 42. P. 25.
19. *Shiryayeva S.O.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2014. V. 59. P. 813.
20. *Grigor'ev A.I., Zharov A.N., Shiryayeva S.O.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2005. V. 50. P. 1006.
21. *Grigor'ev A.I.* // Technical Phys. The Russian J. Appl. Phys. 2009. V. 54. P. 482.
22. *Sample S.B., Raghupathy B., Hendricks C.D.* // Int. J. Eng. Sci. 1970. V. 8. P. 97.
23. *Шукин С.И., А.И. Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24. № 7. С. 73.
24. *O'Konski C.T., Harris F.E.* // J. Phys. Chem. 1957. V. 61. P. 1172.
25. *Winterhalter M., Helfrich W.* // J. Colloid Interface. Sci. 1988. V. 122. P. 583.
26. *Basaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids A. 1989. V. 1. P. 799.
27. *Tsamopoulos J.A., Akylas T.R., Brown R.A.* // Proc. R. Soc., London A. 1985. V. 401. P. 67.
28. *Sample S.B., Raghupathy B.* // J. Colloid Interface Sci. 1971. V. 41. P. 185.
29. *Linh N.V.V., Phu H.D.* // STDJ. 2017. V. 20. P. 130.
30. *Xie J., Marijnissen J.C.M., Wang C.-H.* // Biomaterials. 2006. V. 27. P. 3321.
31. *Abramowitz M., Stegun I.A.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. N.Y.: Dover Publications, 1964.
32. *Lord Rayleigh* // Philos. Mag., Ser. 5. 1882. V. 14. P. 184.
33. *Hendricks C.D., Schneider J.M.* // Am. J. Phys. 1963. V. 1. P. 450.
34. *Polyakov P.A., Rusakova N.E., Samukhina Yu.V.* // J. Electrostat. 2015. V. 77. P. 147.