

## УПРУГИЕ СВОЙСТВА МАГНИТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

© 2021 г. А. К. Зарипов\*

Таджикский национальный университет,  
просп. Рудаки, 17, Душанбе, 734025 Таджикистан

\*e-mail: afzal.z@mail.ru

Поступила в редакцию 22.06.2021 г.

После доработки 02.08.2021 г.

Принята к публикации 06.08.2021 г.

На основе метода статистической теории и микроскопического выражения тензора напряжения для модели двухкомпонентной магнитной жидкости получены аналитические выражения для динамических релаксационного и структурного релаксационных процессов. На основе полученных выражений исследована частотная дисперсия динамических модулей упругости магнитных жидкостей. Показано, что при высоких частотах объемный и сдвиговый модули упругости перестают зависеть от частоты и стремятся к значениям “твердоподобных” модулей упругости  $K_\infty$  и  $\mu_\infty$ . Вычислено отношение  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  в широком интервале изменения частоты. Полученные значения  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  лежат в интервале, соответствующем предсказаниям феноменологической релаксационной теории. Также проведен численный расчет зависимостей модулей упругости магнитных жидкостей от напряженности внешнего магнитного поля и показано, что в согласии с литературными данными изомодульные объемный и сдвиговый модули упругости нелинейно возрастают с увеличением напряженности поля.

DOI: 10.31857/S0023291221060185

### ВВЕДЕНИЕ

Управление физическими свойствами жидкостей с помощью внешнего магнитного поля позволяет получить новые решения ряда технических и инженерных задач. Магнитные жидкости, как искусственно синтезированные материалы, легко управляются слабыми магнитными полями. Помещая магнитную жидкость во внешнее магнитное поле, можно легко изменять ее поведение и физические свойства, такие как вязкость, упругость, теплопроводность, оптическая проницаемость [1, 2].

Опубликовано достаточно большое число работ, посвященных исследованию вязкостных свойств магнитных жидкостей (см., например, [3–6]), которые позволяют решить задачи, связанные с их применением в качестве смазывающих материалов, измерительных приборов, герметизирующих устройств. Вместе с тем многие колебательные системы, созданные на основе магнитных жидкостей, такие как амортизаторы и демпфирующие устройства, датчики перемещения и акустические системы, основаны на упругих колебаниях магнитных жидкостей [6, 7]. Следовательно, требуется детальный теоретический анализ упругих свойств магнитных жидкостей.

В [8] теоретически исследованы магнито-реологические свойства магнитных жидкостей с кластерными частицами и показано, что предложенная модель объясняет обнаруженные в экспериментах эффекты длительной релаксации напряжения с характерным временем и существованием остаточного напряжения, сохраняющегося после прекращения течения среды.

Механическая реакция эластомерных композитов с железными частицами на приложенное магнитное поле исследована в [9]. Показано, что модуль упругости композита под воздействием магнитного поля увеличивается на 30–40%. Также изучено влияние частоты на модуль упругости и показано, что возрастание частоты приводит к увеличению этого модуля композитного материала.

Упругие свойства магнитных гелей, представляющих собой намагничивающиеся частицы, распределенные в мягкой и упругой матрице, исследованы в [10, 11].

В [12] представлены результаты теоретического изучения эффективного модуля сдвига магнитного геля, состоящего из намагниченных частиц, изотропно распределенных в упругой матрице. Там же, на основе аналогии между решениями задач о вязком течении и упругих свойствах, а также известных результатов теории намагничиваемо-

сти макроскопическое напряжение композита представили в виде

$$\sigma = \sigma_{el} + \sigma_m, \quad (1)$$

где  $\sigma_{el} = G_{el}\gamma$  – напряжение сдвига в упругом композите с твердыми частицами,  $G_{el}$  – соответствующий модуль сдвига композита,  $\sigma_m = \frac{1}{2}\phi\mu_0\langle M_x \rangle$  – часть общего напряжения, создаваемая приложенным магнитным полем,  $\langle M_x \rangle$  – соответствующая составляющая намагниченности, усредненная по всем относительным положениям частиц в композите,  $\phi$  – объемная концентрация частиц,  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума.

На основе результатов работы Бэтчелора и Грина [13] эффективный модуль сдвига  $G_{el}$  представлен в виде

$$G_{el} = G_0(1 + 2.5\phi + 5.2\phi^2), \quad (2)$$

где  $G_0$  является модулем сдвига материала матрицы композита.

Как известно, формула (2) для обычных суспензий и композитных материалов хорошо описывает экспериментальные данные при концентрации частиц твердой фазы до 10–15%. Для более точного определения модуля сдвига феррожидкостей, магнитных суспензий и магнитных гелей, необходимо учесть магнитное взаимодействие между твердыми частицами.

В [12] при учете магнитного взаимодействия твердых частиц показано, что при незначительной магнитоиндуцированной анизотропии приложенное поле приводит к уменьшению модуля сдвига, тогда как сильная анизотропия может вызвать его увеличение с возрастанием напряженности магнитного поля.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование упругих свойств магнитных жидкостей и влияния внешнего магнитного поля на сдвиговый и объемный модули упругости.

### ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И УРАВНЕНИЯ

Одним из основных свойств жидкостей является их текучесть и способность к свободному изменению формы. При изменении формы в жидкости не возникает сил, стремящихся вернуть ее в первоначальное состояние, т.е. жидкости не обладают упругими свойствами по отношению к изменениям формы. В то же время жидкости проявляют идеальные упругие свойства по отношению к изменению объема. Следовательно, единственной упругой реакцией жидкости на медленное внешнее воздействие является ее сопротивление всестороннему сжатию, характеризующееся коэффициентом изотермической сжимаемости  $\beta_T$

или соответствующим адиабатическим объемным модулем упругости  $K_s$ .

Если жидкость подвергается очень быстрым внешним воздействиям, в ней обнаруживаются упругие свойства такого же рода, как в упругом твердом теле. В жидкостях, наряду с вязким течением, проявляется упругость, при этом жидкости, становясь неньютоновскими, подчиняются обобщенному закону Гука, а их реологическое уравнение является уравнением Кельвина–Фойгта или уравнением Максвелла. Тензор напряжения, возникающего в жидкости, складывается из упругого напряжения, пропорционального деформации среды  $\mathbf{u}$ , и вязкого напряжения, пропорционального скорости деформации  $\dot{\mathbf{u}}$  [14]:

$$\sigma^{\alpha\beta} = -P\delta^{\alpha\beta} + K\text{div}\mathbf{u}\delta^{\alpha\beta} + \eta_v\text{div}\dot{\mathbf{u}}\delta^{\alpha\beta} + 2\mu\left(u^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\text{div}\mathbf{u}\delta^{\alpha\beta}\right) + 2\eta_s\left(\dot{u}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\text{div}\dot{\mathbf{u}}\delta^{\alpha\beta}\right). \quad (3)$$

В этом случае каждому виду переноса соответствуют определенный модуль упругости, т.е. между уравнениями теории упругости и соответствующими уравнениями движения вязких жидкостей можно обнаружить аналогию, где кинетическим коэффициентам объемной  $\eta_v$  и сдвиговой  $\eta_s$  вязкости соответствуют объемный  $K$  и сдвиговый  $\mu$  модули упругости.

Ранее [15–17] были исследованы вязкостные свойства магнитных жидкостей для модели двухкомпонентной системы, состоящей из ферритной (далее обозначаемой индексом  $f$ ) и молекулярной (индекс  $s$ ) частей. На основе полученных аналитических выражений для динамических коэффициентов объемной  $\eta_v(\omega)$  и сдвиговой  $\eta_s(\omega)$  вязкости магнитных жидкостей были проведены численные расчеты зависимости коэффициентов переноса от частоты внешнего возмущения и термодинамических параметров системы. Полученные результаты показали удовлетворительное согласие с литературными данными.

В [15, 16] на основе кинетических уравнений для одночастичной  $f_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t)$  и двухчастичной  $f_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t)$  функций распределения частиц магнитной жидкости

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{li}}{\partial t} + \frac{p_{li}^\alpha}{m_i} \frac{\partial f_{li}}{\partial q_{li}^\alpha} + F^\alpha(\mathbf{q}_1, t) \frac{\partial f_{li}}{\partial p_{li}^\alpha} - \\ & - \int \frac{\partial \Phi_i(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)}{\partial q_1^\alpha} \frac{\partial f_{2i}}{\partial p_1^\alpha} d\mathbf{q}_2 d\mathbf{p}_2 = \\ & = \beta_i \frac{\partial}{\partial p_{li}^\alpha} \left[ \frac{\tilde{p}_{li}^\alpha}{m_i} f_{li} + kT(\mathbf{q}_1, t) \frac{\partial f_{li}}{\partial p_{li}^\alpha} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{2i}}{\partial t} + \sum_{n=1}^2 \left[ \frac{p_n^\alpha}{m_i} \frac{\partial f_{2i}}{\partial q_n^\alpha} + F^\alpha(\mathbf{q}_n, t) \frac{\partial f_{2i}}{\partial p_n^\alpha} - \frac{\partial \Phi_i(|\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2|)}{\partial q_n^\alpha} \frac{\partial f_{2i}}{\partial p_n^\alpha} - \int \frac{\partial \Phi_i(|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_3|)}{\partial q_n^\alpha} \frac{\partial f_{3i}}{\partial p_n^\alpha} d\mathbf{q}_3 d\mathbf{p}_3 \right] = \\ = \sum_{n=1}^2 \beta_i \frac{\partial}{\partial p_n^\alpha} \left[ \frac{\tilde{p}_n^\alpha}{m_i} + kT(\mathbf{q}_n, t) \frac{\partial}{\partial p_n^\alpha} \right] f_{2i} \end{aligned} \quad (5)$$

получена система уравнений обобщенной гидродинамики, в которой микроскопическое выражение для тензора напряжения имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t) = - \sum_{i=f,s} K_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t) + \\ + \sum_{i=f,s} \frac{\sigma_i^3}{2} \int \frac{\partial \Phi_i(r)}{\partial r} \frac{r^\alpha r^\beta}{r} n_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $K_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t) = P_{ki}(\mathbf{q}_1, t) \delta^{\alpha\beta} + k_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t)$  – кинетическая часть тензора потока импульса  $i$ -ой подсистемы,  $P_{ki}(\mathbf{q}_1, t) = \frac{1}{3} \int \frac{p_i^2}{m_i} f_{li}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_i, t) d\mathbf{p}_i$  – кинетическая часть неравновесного давления,  $k_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t) = \int \frac{1}{m_i} \left( p_i^\alpha p_i^\beta - \frac{1}{3} p_i^2 \delta^{\alpha\beta} \right) f_{li}(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_i, t) d\mathbf{p}_i$  – кинетическая часть вязкого тензора напряжения,  $n_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$  – неравновесная бинарная плотность,  $\sigma_i$  – диаметр частицы соответствующей подсистемы,  $r = |\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_1|/\sigma = x/\sigma$  – безразмерное расстояние между частицами. Уравнения для  $P_k(\mathbf{q}_1, t)$  и  $k^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t)$ , полученные на основе уравнения (4), приведены в [18], где найдены их решения.

Согласно (6) тензор напряжения магнитной жидкости определяется посредством функций бинарной плотности частиц  $n_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$ , для которых необходимо иметь уравнение. Интегрируя уравнение (5) по импульсам  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ , после некоторых преобразований получим обобщенное уравнение Смолуховского для возмущенной части неравновесной функции бинарной плотности частиц  $i$ -ой подсистемы магнитной жидкости в конфигурационном пространстве [16]:

$$\frac{\partial n_{2i}'}{\partial t} + \omega_{0i} \hat{L}_i n_{2i}'(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t), \quad (7)$$

где  $R_s(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = -\varphi_s(r) \operatorname{div} \mathbf{u} - \varphi_s^{\alpha\beta}(r) \left\{ \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\}$ ,

$$\begin{aligned} R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = \\ = - \left[ \varphi_i(r) + \frac{n_i^2 \mu_0}{9\beta_i} (\mathbf{m} \nabla) \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{u}} \right)_{n_i, T} r \left( \frac{\partial g_i}{\partial r} \right) \right] \operatorname{div} \mathbf{u} - \\ - \varphi_i^{\alpha\beta}(r) \left[ 1 + \frac{\mu_0}{6\beta_i} (\mathbf{m} \nabla) \left( \frac{\partial H}{\partial \dot{u}} \right)_{n_i, T} \right] \left\{ \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\}, \\ \varphi_i(r) = 2n_i^2 g_i \left\{ 1 + \frac{1}{6} \frac{\partial \ln g_i}{\partial \ln r} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[ n_i \left( \frac{\partial \ln g_i}{\partial n_i} \right)_T + \gamma_i T \left( \frac{\partial \ln g_i}{\partial T} \right)_{n_i} \right] \right\}, \\ \gamma_i = \frac{1}{n_i C_{Vi}} \left( \frac{\partial P_i}{\partial T} \right)_{n_i}, \\ \varphi_i^{\alpha\beta}(r) = 2n_i^2 \frac{\left( r^\alpha r^\beta - \frac{1}{3} r^2 \delta^{\alpha\beta} \right)}{r} \frac{\partial g_i}{\partial r}, \\ \left\{ \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial q_1^\beta} + \frac{\partial \dot{u}^\beta}{\partial q_1^\alpha} - \frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta} \operatorname{div} \mathbf{u} \right), \end{aligned}$$

$\hat{L}_i = -\frac{\partial}{\partial r^\alpha} \left[ \frac{\partial}{\partial r^\alpha} - \frac{\partial}{\partial r^\alpha} \ln g_i(r) \right]$  – оператор Смолуховского в конфигурационном пространстве,  $\omega_{0i} = 1/\tau_{0i} = 2kT/\beta_i \sigma_i^2$ ,  $n_i$ ,  $\beta_i$ ,  $C_{Vi}$ ,  $P_i$  и  $g_i$  – соответствующие  $i$ -ой подсистеме характеристическая частота, числовая плотность, коэффициент трения, теплоемкость, давление и радиальная функция распределения,  $T$  – температура системы,  $H$  – внешнее магнитное поле,  $\mathbf{m}$  – магнитный момент магнитной частицы,  $\mathbf{u}$  – вектор смещения.

Решение уравнения для  $n_{2i}'(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$ , приведенное в [16], имеет следующий вид:

$$n_{2i}'(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = \int_0^t dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} G_i(r, r_1, t - t_1) R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1, t_1) d\mathbf{r}_1. \quad (8)$$

Функция

$$\begin{aligned} G_i(r, r_1, t - t_1) = 2(2\pi)^{-3} (rr_1)^{-1} \left( \frac{\pi}{\omega_{0i}(t - t_1)} \right)^{1/2} \times \\ \times \left\{ \exp \left[ -\frac{(r - r_1)^2}{4\omega_{0i}(t - t_1)} \right] - \exp \left[ -\frac{(r + r_1)^2}{4\omega_{0i}(t - t_1)} \right] \right\}, \end{aligned}$$

являясь функцией Грина или фундаментальным решением однородного уравнения Смолуховского, описывает пространственно-временное поведение неравновесной бинарной плотности  $n_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$  под действием приложенной гидродинамической силы  $R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t)$ .

Из анализа (7) и (8) видно, что процесс перестройки структуры магнитной жидкости носит диффузионный характер и описывается непрерывным спектром времен релаксации.

Теперь, записывая неравновесную бинарную плотность в виде, состоящем из локально-равновесной и возмущенной частей:

$$n_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t) = n_{2i}^0(|\mathbf{r}|, n_i(\mathbf{q}_1, t), T(\mathbf{q}_1, t)) + n'_{2i}(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где  $n_{2i}^0(|\mathbf{r}|, n_i(\mathbf{q}_1, t), T(\mathbf{q}_1, t)) = n_{2i}^0(|\mathbf{r}|) + \left(\frac{\partial n_{2i}^0(|\mathbf{r}|)}{\partial n_i}\right)_T \times n'_i(\mathbf{q}_1, t) + \left(\frac{\partial n_{2i}^0(|\mathbf{r}|)}{\partial T}\right)_{n_i} T'(\mathbf{q}_1, t)$ ,  $n_{2i}^0(|\mathbf{r}|) = n_i^2 g_i(|\mathbf{r}|)$  – равновесная бинарная плотность, далее подставляя решение (8) в определение (9) и учитывая его вместе с решениями  $P_{ki}(\mathbf{q}_1, t)$  и  $k_i^{\alpha\beta}(\mathbf{q}_1, t)$  из [17] в (6), и совершив после этого в нем фурье-преобразование по времени, получим:

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\omega) = & -\sum_{i=f,s} P_{ki}(0)\delta^{\alpha\beta} + \sum_{i=f,s} (1 + \gamma_i)P_{ki}(0)\text{divu}\delta^{\alpha\beta} - \\ & - \sum_{i=f,s} \frac{i\omega\tau_{li}}{1 - i\omega\tau_{li}} 2P_{ki}(0) \left\{ \frac{\partial \dot{u}^\alpha}{\partial q_1^\beta} \right\} + \\ & + \sum_{i=f,s} \frac{\sigma_i^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} r^{\alpha} r^{\beta} n_{2i}^0(|\mathbf{r}|, n_i, T) d\mathbf{r} + \\ & + \sum_{i=f,s} \frac{\sigma_i^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} r^{\alpha} r^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} G_{0i}(r, r_1, \omega) R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1, \omega) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $G_{0i}(r, r_1, \omega) = \int_0^t e^{i\omega(t-t_1)} G_i(r, r_1, t - t_1) dt_1$ .

Используя в (10) термодинамические соотношения

$$\begin{aligned} P_i(0) = & P_{ki}(0) - \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} g_i r d\mathbf{r}, \quad \left(\frac{\partial P_i(0)}{\partial n_i}\right)_T = \\ = & kT - \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \left(\frac{\partial g_i}{\partial n_i}\right)_T r d\mathbf{r}, \quad \left(\frac{\partial P_i(0)}{\partial T}\right)_{n_i} = n_i T - \\ - & \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \left(\frac{\partial g_i}{\partial T}\right)_{n_i} r d\mathbf{r} \end{aligned}$$

и фурье-образ  $R_i(\mathbf{q}_1, \mathbf{r}_1, \omega)$ , выражение для тензора напряжения приводим к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma^{\alpha\beta}(\omega) = & -\sum_{i=f,s} P_i(0)\delta^{\alpha\beta} + \\ & + \left[ \sum_{i=f,s} \left( K_{Si} + i\omega \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{6} \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} G_{0i}(r, r_1, \omega) \Phi_i^*(r_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} \left. \left. + i\omega \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{54} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} G_{0f}(r, r_1, \omega) \times \\ & \times \left. \left. \frac{\mu_0}{\beta_f} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial g_f}{\partial r_1} r_1 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} \right] \text{divu}\delta^{\alpha\beta} + \\ & + \left[ i\omega \sum_{i=f,s} \left( -\frac{2n_i k T \tau_{li}}{1 - i\omega\tau_{li}} + \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{15} \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} G_{0i}(r, r_1, \omega) \frac{\partial g_i}{\partial r_1} r_1 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} \left. \left. + i\omega \frac{n_i^2 \sigma_i^3}{45} \int_{-\infty}^{\infty} r \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} \times \right. \right. \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} G_{0f}(r, r_1, \omega) \frac{\mu_0}{\beta_f} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial g_f}{\partial r_1} r_1 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} \left. \left. \right] \left\{ \frac{\partial u^\alpha(\omega)}{\partial q_1^\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из выражения (11) видно, что, как и в (1), в присутствии магнитного поля тензор напряжения в магнитной жидкости складывается из напряжения, возникающего в отсутствие поля, и напряжения, создаваемого приложенным полем.

Далее в (11), применяя к реальной и мнимой частям функции  $G_{0i}(r, r_1, \omega)$  косинус и синус преобразования Фурье соответственно и сравнивая полученное выражение с фурье-образом (3) для динамических релаксационного объемного  $K_r(\omega) = K(\omega) - K_s$  и сдвигового  $\mu(\omega)$  модулей упругости магнитной жидкости, получим:

$$\begin{aligned} K_r(\omega) = & \sum_{i=f,s} \frac{n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{24\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i(r, r_1, \omega) \Phi_i^*(r_1) r_1^{-1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} + \\ & + \frac{n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{216\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_f(r, r_1, \omega) \frac{\mu_0}{\beta_f} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial g_f}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}, \\ \mu(\omega) = & \sum_{i=f,s} \frac{n_i k T (\omega\tau_{li})^2}{1 + (\omega\tau_{li})^2} + \sum_{i=f,s} \frac{n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{120\pi} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_i}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i(r, r_1, \omega) \frac{\partial g_i}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r} + \frac{n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{360\pi} \times \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi_f}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_f(r, r_1, \omega) \frac{\mu_0}{\beta_f} (\mathbf{m}\nabla) \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial g_f}{\partial r_1} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\Phi_i^*(r_i) = \frac{r_1}{3} \frac{\partial g_i}{\partial r_1} = n_i \left( \frac{\partial g_i}{\partial n_i} \right)_T - \gamma_i T \left( \frac{\partial g_i}{\partial T} \right)_{n_i},$$

$$\Gamma_i(r, r_1, \omega) = -\frac{\tau_{0i}}{2} \left( \frac{2}{\omega \tau_{0i}} \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left[ (\sin \varphi_{1i} + \cos \varphi_{1i}) e^{-\varphi_{1i}} - (\sin \varphi_{2i} + \cos \varphi_{2i}) e^{-\varphi_{2i}} \right],$$

$$\varphi_{(1,2)i}(r, r_1, \omega) = \left( \frac{\omega \tau_{0i}}{2} \right)^{1/2} (r \mp r_1), \quad \tau_{1i} = \frac{m_i}{2\beta_i} - \text{время}$$

трансляционной релаксации вязкого тензора напряжений,  $\tau_{0i} = \frac{\beta_i \sigma_i^2}{2kT}$  – феноменологическое время структурной релаксации.

Выражения (12) позволяют определить динамические модули упругости магнитной жидкости в широком диапазоне изменения частоты и термодинамических параметров состояния. Первое слагаемое  $\mu(\omega)$  учитывает трансляционную релаксацию в магнитной жидкости с характерными временами  $\tau_{1i}$ . Потенциальные части  $K(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  содержат функции  $\Gamma_i(r, r_1, \omega)$  с характерными временами  $\tau_{0i}$  и определяют вклад структурной релаксации в модули упругости.

**ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ**

Для проведения численных расчетов в (12) необходимо выбрать явный вид потенциальных энергий взаимодействия  $\Phi_i$  между структурными единицами каждой подсистемы и соответствующие радиальные функции распределения  $g_i$ .

Энергию взаимодействия молекулярной подсистемы выбираем в виде модели Штокмайера

$$\Phi_s(\mathbf{r}) = \Phi_s^{L-J}(r) + \Phi^{pp}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

где  $\Phi_s^{L-J}(r) = 4\epsilon_s(r^{-12} - r^{-6})$ ,  $\Phi^{pp}(\mathbf{r}) = \frac{p^2}{4\pi\epsilon\epsilon_0\sigma_s^3} \times$

$$\times \left[ \frac{(\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b)}{r_{ab}^3} - \frac{3(\mathbf{e}_a \mathbf{r}_{ab})(\mathbf{e}_b \mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5} \right].$$

В магнитной подсистеме, считая феррочастицы сферическими однодоменными частицами, покрытыми слоем поверхностно-активного вещества, и находящимися под действием внешнего магнитного поля, представим их взаимодействие в виде

$$\Phi_f(\mathbf{r}, \mathbf{H}) = \Phi_f^{L-J}(r) + \Phi^{mm}(\mathbf{r}) + \Phi^H(\mathbf{H}), \quad (14)$$

где  $\Phi_f^{L-J}(r) = 4\epsilon_f(r^{-12} - r^{-6})$ ,  $\Phi^{mm}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 m^2}{4\pi\sigma_f^3} \times$

$$\times \left[ \frac{(\mathbf{e}_a \mathbf{e}_b)}{r_{ab}^3} - \frac{3(\mathbf{e}_a \mathbf{r}_{ab})(\mathbf{e}_b \mathbf{r}_{ab})}{r_{ab}^5} \right], \quad \Phi^H(\mathbf{H}) = -\mu_0 m \mathbf{H}.$$

При переходе к сферической системе координат выражение для энергии диполь-дипольного взаимодействия примет вид:

$$\Phi^{dd}(r, \theta_a, \theta_b, \varphi_a - \varphi_b) = -A^d \frac{d^2}{r^3} \times$$

$$\times (2 \cos \theta_a \cos \theta_b - \sin \theta_a \sin \theta_b \cos(\varphi_a - \varphi_b)), \quad (15)$$

где при  $d = p$  и  $d = m$  имеем соответственно

$$A^p = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0\sigma_s^3} \quad \text{и} \quad A^m = \frac{\mu_0}{4\pi\sigma_f^3}.$$

Непосредственная подстановка потенциалов (13)–(15) в выражении (12) приводит к сложным математическим трудностям. С целью упрощения задачи, следуя работам [19, 20], для двух ближайших частиц момент первой частицы принимаем направленным вдоль радиус-вектора, соединяющего ее со второй частицей, и, соответственно, в (15), положив  $\theta_a = 0$ ,  $\theta_b = \theta$  (рис. 1), энергию взаимодействия двух диполей выражаем в виде

$$\Phi^{dd}(r, \theta) = -A^d \frac{d^2}{r^3} \cos \theta.$$

Аналогично, направляя вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$  параллельно оси  $z$  системы, для потенциальной энергии магнитодипольного взаимодействия феррочастиц получим:

$$\Phi^H(H, \theta) = -\mu_0 m H \cos \theta.$$

Радиальные функции распределения в соответствии с [21] выбираем в виде

$$g_s(r, n_s, T) = y_s(\rho^*) \exp[-\Phi_s(\mathbf{r})/kT], \quad (16)$$

$$g_f(r, T, H) = \exp[-\Phi_f(\mathbf{r}, \mathbf{H})/kT],$$

где  $y_s(\rho^*) = (2 - \rho_s^*) / (2(1 - \rho_s^*)^3)$  – контактная функция Карнахана–Старлинга для молекулярной подсистемы, соответствующей системе с плотноупакованными твердыми частицами,  $\rho_s^* = \pi\sigma_s^3 n_s / 6$ .

Подставляя (13), (14) и (16) в выражение (12), приведем их к виду, удобному для проведения численных расчетов:

$$K_f(\omega) = \sum_{i=f,s} \frac{4\epsilon_i n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{kT} B_{vi}, \quad (17)$$

$$\mu(\omega) = \sum_{i=f,s} \frac{n_i kT (\omega \tau_{1i})^2}{1 + (\omega \tau_{1i})^2} + \sum_{i=f,s} \frac{4\epsilon_i n_i^2 \sigma_i^3 \omega}{kT} B_{si},$$

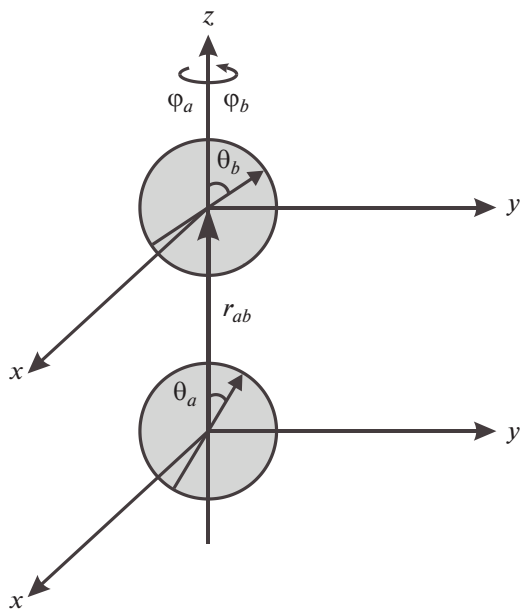


Рис. 1. Схематическое представление взаимодействия двух диполей в сферической системе координат.

где

$$\begin{aligned}
 B_{vs} &= \int_0^{\infty} (r^{-5} - 2r^{-11}) dr \int_0^{\infty} \Gamma_s(r, r_1, \omega) y_s(\rho^*) \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{\Phi_s^{L-J}}{kT} \right] \left[ \left( 16\pi \epsilon_s \left( (4 - \gamma_s) r_1^{-11} - \right. \right. \right. \\
 &- (2 - \gamma_s) r_1^{-5} \left. \left. \left. + \frac{2p^2}{\epsilon \epsilon_0 \sigma_s^3 r_1^2} - 4\pi \gamma_s k T r_1 - \right. \right. \right. \\
 &- 4\pi k T y'_s(\rho^*) r_1 \left. \left. \left. \frac{sha_s}{a_s} + (4\pi \gamma_s k T a_s r - \right. \right. \right. \\
 &\left. \left. \left. - \frac{2p^2}{\epsilon \epsilon_0 \sigma_s^3 r_1^2} \right) \frac{cha_s}{a_s} \right] dr_1, \\
 B_{vf} &= \int_0^{\infty} (r^{-5} - 2r^{-11}) dr \int_0^{\infty} \Gamma_f(r, r_1, \omega) \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{\Phi_f^{L-J}}{kT} \right] \left[ \left( \left( 32\pi \epsilon_f (2r_1^{-11} - r_1^{-5}) + \frac{2\mu_0 m^2}{\sigma_f^3 r_1^2 a_f} \right) \times \right. \right. \\
 &\times \left( 1 + \frac{\mu_0 m H \tau_{of}}{3\beta_f l^2} \right) - 4\pi \gamma_f (4\epsilon_f (r_1^{-11} - r_1^{-5}) + k T r_1) \left. \left. \frac{sha_f}{a_f} + \right. \right. \\
 &\left. \left. \left( 4\pi \gamma_f k T a_f r_1 - \frac{2\mu_0 m^2}{\sigma_f^3 r_1^2} \left( 1 + \frac{\mu_0 m H \tau_{of}}{3\beta_f l^2} \right) \right) \frac{cha_f}{a_f} \right] dr_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{ss} &= \int_0^{\infty} (r^{-5} - 2r^{-11}) dr \int_0^{\infty} \Gamma_s(r, r_1, \omega) y_s(\rho^*) \times \\
 &\times \exp \left[ -\frac{\Phi_s^{L-J}}{kT} \right] \left[ \left( \frac{96\pi \epsilon_s (2r_1^{-11} - r_1^{-5})}{5} + \frac{6p^2}{5\epsilon \epsilon_0 \sigma_s^3 r_1^2 a_s} \right) \frac{sha_s}{a_s} - \right. \\
 &\left. - \frac{6p^2}{5\epsilon \epsilon_0 \sigma_s^3 r_1^2} \frac{cha_s}{a_s} \right] dr_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{sf} &= \int_0^{\infty} (r^{-5} - 2r^{-11}) dr \int_0^{\infty} \Gamma_f(r, r_1, \omega) \exp \left[ -\frac{\Phi_f^{L-J}}{kT} \right] \times \\
 &\times \left( 1 + \frac{\mu_0 m H \tau_{of}}{3\beta_f l^2} \right) \left[ \left( \frac{96\pi \epsilon_f (2r_1^{-11} - r_1^{-5})}{5} + \frac{6\mu_0 m^2}{5\sigma_f^3 r_1^2 a_f} \right) \frac{sha_f}{a_f} - \right. \\
 &\left. - \frac{6\mu_0 m^2}{5\sigma_f^3 r_1^2} \frac{cha_f}{a_f} \right] dr_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_s &= \frac{p^2}{2\pi \epsilon \epsilon_0 \sigma_s^3 r_1^3 k T}, \quad a_f = \frac{\mu_0 m^2}{2\pi \sigma_f^3 r_1^3 k T} + \frac{\mu_0 m H}{k T}, \quad y'_s(\rho^*) = \\
 &= \frac{\rho_s^* (5 - 2\rho_s^*)}{(1 - \rho_s^*) (2 - \rho_s^*)}, \quad \epsilon_f, \epsilon_s - \text{глубины потенциальных} \\
 &\text{ям для соответствующих подсистем, } l - \text{характер-} \\
 &\text{ный размер системы.}
 \end{aligned}$$

Учитывая в (17), что  $n_f = \frac{N_f}{V} = \frac{\rho_f N_A}{\mu_f} \varphi$ ,

$n_s = \frac{N_s \rho_s N_A}{V \mu_s} (1 - \varphi)$  и раскрывая суммы, получим:

$$\begin{aligned}
 K_r &= \frac{4\epsilon_s \sigma_s^3 \rho_s^2 N_A^2 \omega}{k T \mu_s^2} B_{vs} (1 - \varphi)^2 + \\
 &+ \frac{4\epsilon_f \sigma_f^3 \rho_f^2 N_A^2 \omega}{k T \mu_f^2} B_{vf} \varphi^2 = \\
 &= K_s (1 + 2.5\varphi) + (K_s - 4.5K_s/\varphi + K_f) \varphi^2, \\
 \mu &= \frac{k T (\omega \tau_{is})^2 \rho_s N_A (1 - \varphi) + k T (\omega \tau_{if})^2 \rho_f N_A \varphi}{1 + (\omega \tau_{is})^2 \mu_s} \varphi + (18) \\
 &+ \frac{4\epsilon_s \sigma_s^3 \rho_s^2 N_A^2 \omega}{k T \mu_s^2} B_{ss} (1 - \varphi)^2 + \frac{4\epsilon_f \sigma_f^3 \rho_f^2 N_A^2 \omega}{k T \mu_f^2} B_{sf} \varphi^2 = \\
 &= \mu_s (1 + 2.5\varphi) + \\
 &+ (\mu_{sp} + (\mu_{fk} - \mu_{sp} - 3.5\mu_s)/\varphi + \mu_{fp}) \varphi^2.
 \end{aligned}$$

Видно, что в пределе  $\varphi \rightarrow 0$  объемный и сдвиговый модули упругости магнитных жидкостей стремятся к значениям модулей упругости жидкости-основы  $K_s$  и  $\mu_s$  соответственно. Если в (18) при малых значениях концентрации не учитывать квадратичные зависимости по  $\varphi$ , выражения для модулей упругости принимает вид выражения, приведенного в [12, 13, 22], аналогичного выражению Эйнштейна для эффективной вязкости разбавленных суспензий.

**Таблица 1.** Численные значения коэффициентов трения и времен релаксации для магнитных жидкостей

Магнитная жидкость	T, К	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>		$\beta \times 10^{13}$ , кг/с		$\tau \times 10^{13}$ , с				H, кА/м
		$\rho_s$	$\rho_f$	$\beta_s$	$\beta_f$	$\tau_{1s}$	$\tau_{0s}$	$\tau_{1f}$	$\tau_{0f}$	
На основе керосина	293	819	5340	19.4	3.51 6.61	1.0	216	5.49 2.91	2101 3959	0 200
	303	814	5310	17.9	3.5 6.51	1.09	193	5.5 2.95	2025 3770	0 200
На основе воды	293	998.2	5340	4.03	3.51 6.61	0.37	49.4	5.49 2.91	2101 3959	0 200
	303	995.7	5310	3.98	3.5 6.51	0.37	47.2	5.5 2.95	2025 3770	0 200

Для определения области частотной дисперсии динамических модулей упругости  $K_r(\omega)$  и  $\mu(\omega)$  необходимо вычислить характерные времена  $\tau_{li} = m_i/2\beta_i$  и  $\tau_{oi} = \beta_i\sigma_i^2/2kT$ , которые определяются через соответствующие коэффициенты внутреннего трения  $\beta_i$ . Как известно, в статистической теории коэффициент трения определяется на основе обобщенной теории броуновского движения, в которой устанавливается его связь с межмолекулярными силами и параметрами состояния системы. Отметим, что исследователями для нахождения коэффициента трения на основе различных приближений предложены несколько моделей [23, 24], однако проблема его определения на основе статистических методов до сих пор остается нерешенной. Анализ, проведенный в [24], показал, что наиболее удовлетворительным для расчета коэффициентов внутреннего трения магнитной жидкости является полуфеноменологическое выражение, полученное Кирквудом в виде

$$\beta_i^2 = \frac{1}{3} m_i n_i \int \nabla^2 \Phi_i(r) g_i(r) dr.$$

С учетом выбранных потенциальных энергий и радиальных функций распределения последнее выражение приводится к виду

$$\beta_i^2 = 160\pi\rho_i\varepsilon_i\sigma_i \int_0^\infty g_{0i}(r)(4.4r^{-12} - r^{-6}) \frac{sh a_i}{a_i} dr + \frac{16\pi\rho_i\sigma_i kT}{3} \int_0^\infty g_{0i}(r) \left( cha_i - \frac{sh a_i}{a_i} \right) dr, \quad (19)$$

где  $g_{0s}(r) = y_s(\rho^*) \exp[-\Phi_s^{L-J}(r)/kT]$ ,  $g_{0f}(r) = \exp[-\Phi_f^{L-J}(r)/kT]$ .

В табл. 1 приведены результаты численных расчетов коэффициентов трения, проведенных на основе (19), и соответствующие значения времен релаксации магнитных жидкостей, приго-

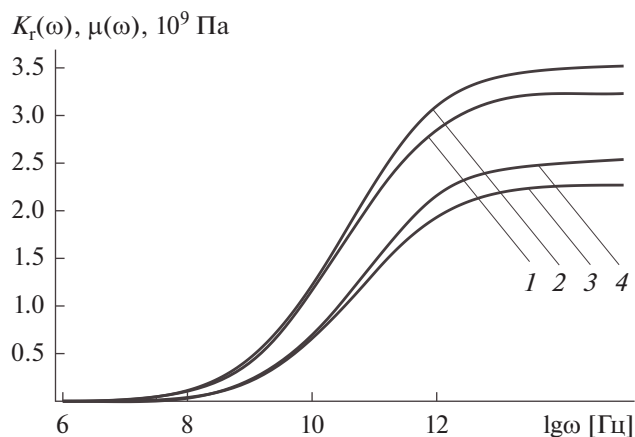
товленных на основе керосина ( $\sigma_s = 0.43$  нм,  $\varepsilon_s = 0.6kT$ ,  $\varepsilon = 2.1$ ,  $p = 8.3 \times 10^{-30}$  Клм) или воды ( $\sigma_s = 0.27$  нм,  $\varepsilon_s = 1.27kT$ ,  $\varepsilon = 81$ ,  $p = 6.2 \times 10^{-30}$  Клм) и частиц  $Fe_3O_4$ , при  $m = 10^{-20}$  Дж/Тл,  $\sigma_f = 5$  нм,  $\varepsilon_f = 0.37kT$ .

Видно, что трансляционная релаксация в обеих подсистемах магнитных жидкостей протекает очень быстро. Времена структурной релаксации всегда на 2–3 порядка меньше времени трансляционной релаксации.

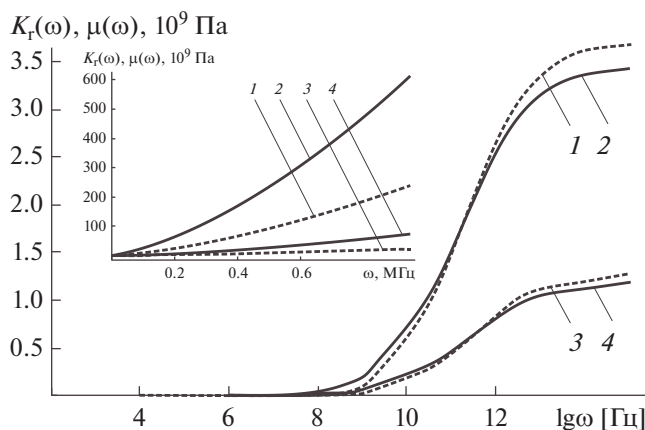
Далее на основе (17) были проведены численные расчеты частотных зависимостей релаксационного объемного и сдвигового модулей упругости магнитных жидкостей на основе керосина и воды. Результаты расчетов продемонстрированы на рис. 2 и 3. Кривые 1 и 3 соответствуют объемной концентрации  $\phi = 0.03$ , кривые 2 и 4 –  $\phi = 0.1$ .

Данные, приведенные на рис. 2 и 3, показывают, что с увеличением частоты внешнего возмущения модули упругости возрастают и качественно согласуются с результатами экспериментов [9], проведенных для композитных материалов с частицами железа. Для обеих магнитных жидкостей дисперсия объемного и сдвигового модулей упругости начинается примерно с частоты  $10^8$  Гц и при высоких частотах стремится к постоянному значению, соответствующая теоретическим выводам [25, 26]. Согласно рис. 3, для магнитной жидкости на основе воды модули упругости в низкочастотной области возрастают с концентрацией магнитной фазы, напротив, при высоких частотах увеличение ее концентрации приводит к уменьшению модулей упругости. Такой эффект для магнитной жидкости на основе керосина не наблюдается.

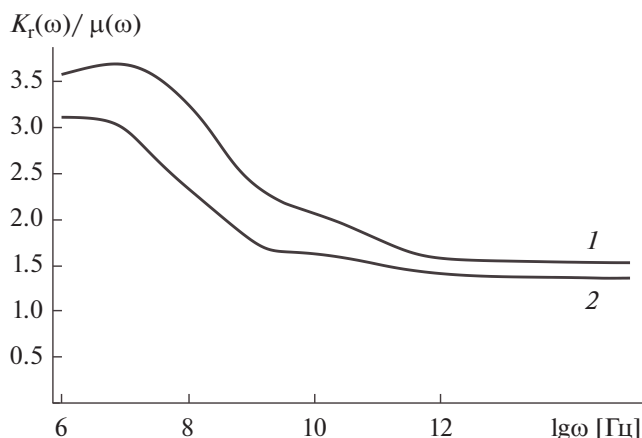
На рис. 4 и 5 приведены зависимости величины  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  от частоты для магнитных жидкостей на основе керосина и воды. С увеличением частоты значение  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  для магнитной жид-



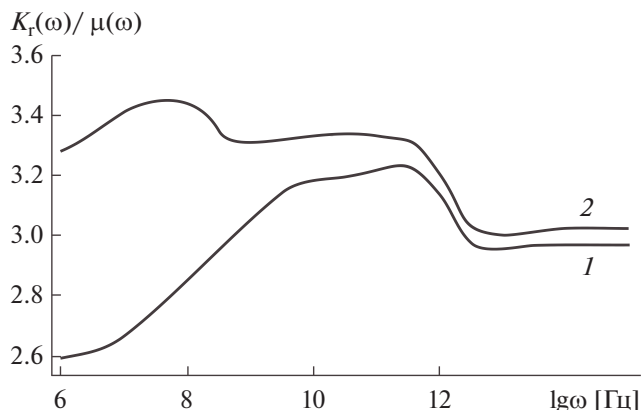
**Рис. 2.** Зависимости  $K_r(\omega)$  (1, 2) и  $\mu(\omega)$  (3, 4) от частоты для магнитной жидкости на основе керосина при  $T = 293$  К. Кривые 1 и 3 соответствуют объемной концентрации  $\varphi = 0.03$ , кривые 2 и 4 –  $\varphi = 0.1$ .



**Рис. 3.** Зависимости  $K_r(\omega)$  (1, 2) и  $\mu(\omega)$  (3, 4) от частоты для магнитной жидкости на основе воды при  $T = 293$  К. Кривые 1 и 3 соответствуют объемной концентрации  $\varphi = 0.03$ , кривые 2 и 4 –  $\varphi = 0.1$ .



**Рис. 4.** Зависимости отношения  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  от частоты для магнитной жидкости на основе керосина при  $\varphi = 0.03$  (1) и  $\varphi = 0.1$  (2);  $T = 293$  К.



**Рис. 5.** Зависимости отношения  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  от частоты для магнитной жидкости на основе воды при  $\varphi = 0.03$  (1) и  $\varphi = 0.1$  (2);  $T = 293$  К.

кости на основе керосина при  $\varphi = 0.1$  изменяется от 4 до 1.5, а для магнитной жидкости на основе воды при той же концентрации отношение  $K_r(\omega)/\mu(\omega)$  лежит в пределах 3.5–3, что обусловлено вкладом структурной релаксации и согласуется с выводами феноменологической релаксационной теории [27, 28]. Для обеих жидкостей в области высоких частот отношение модулей упругости остается постоянным. Согласно [28], отношение высокочастотных модулей упругости  $K_\infty/\mu_\infty$  для сильно ассоциированных жидкостей определено больше, чем для углеводородных и полимерных жидкостей. Это различие, по-видимому, связано [28] со слабостью ван-дер-ваальсовых сил в углеводородных и полимерных жидкостях по сравнению с относительно сильными

водородными связями, существующими в ассоциированных жидкостях. Такой же результат можно наблюдать на рис. 4 и 5: для магнитной жидкости на основе керосина  $K_\infty/\mu_\infty \approx 1.5$ , а для магнитной жидкости на основе воды  $K_\infty/\mu_\infty \approx 3$ .

На рис. 6 и 7 продемонстрированы результаты численных расчетов зависимостей изочастотных ( $\omega = 10^{12}$  Гц) релаксационного объемного и сдвигового модулей упругости магнитных жидкостей на основе керосина и воды от напряженности внешнего магнитного поля.

Согласно рис. 6 и 7, как объемный, так и сдвиговый модули упругости обеих магнитных жидкостей монотонно возрастают с увеличением  $H$  магнитного поля. Также видно, что увеличение



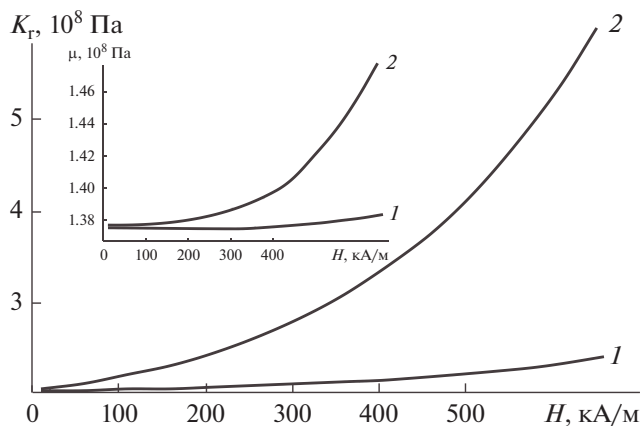


Рис. 6. Зависимости релаксационного объемного и сдвигового модулей упругости магнитной жидкости на основе керосина от напряженности магнитного поля при  $\varphi = 0.03$  (1) и  $\varphi = 0.1$  (2).

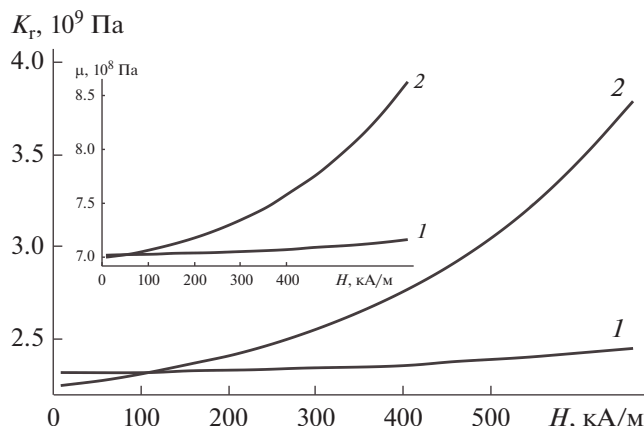


Рис. 7. Зависимости релаксационного объемного и сдвигового модулей упругости магнитной жидкости на основе воды от напряженности магнитного поля при  $\varphi = 0.03$  (1) и  $\varphi = 0.1$  (2).

концентрации магнитных частиц приводит к более быстрому возрастанию модулей упругости с увеличением значения  $H$ . Возрастание модулей упругости магнитных жидкостей в зависимости от приложенного магнитного поля аналогично магнитовязкому эффекту, наблюдаемому в экспериментах, и подтверждает правильность учета диполь-дипольного взаимодействия магнитных частиц и их взаимодействия с внешним магнитным полем. Проведенные расчеты зависимости модулей упругости от напряженности магнитного поля находятся в качественном согласии с результатами экспериментальных и теоретических исследований [8, 9, 11].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе кинетических уравнений для одночастичных и двухчастичных функций распределения получены аналитические выражения для динамических релаксационного объемного  $K_r(\omega)$  и сдвигового  $\mu(\omega)$  модулей упругости магнитной жидкости, потенциальные части которых определены через равновесные потенциальные энергии межчастичного взаимодействия  $\Phi_i(\mathbf{r})$  и равновесные радиальные функции распределения  $g_i(r, n_i, T)$ . Показано, что в пределе малых концентраций выражения для модулей упругости трансформируются в выражение для модуля сдвига, полученное Бэтчелером и Кристенсенем [13, 22].

Исследована частотная зависимость динамических модулей упругости магнитных жидкостей на основе керосина и воды, и установлено, что область дисперсии модулей упругости, как следствие учета структурной релаксации, является широкой, и при высоких частотах, как и в [25, 26], они стремятся к постоянным значениям высоко-

частотных модулей упругости  $K_\infty$  и  $\mu_\infty$ . Показано, что отношение модулей упругости для магнитных жидкостей при изменении частоты лежит в пределах интервала 1.5–4, который согласуется с интервалом 0.5–10, указанным в [27].

Проведенные численные расчеты зависимостей модулей упругости магнитных жидкостей от напряженности внешнего магнитного поля при различных значениях концентрации магнитной фазы показали их возрастание с увеличением напряженности внешнего поля, аналогичное магнитовязкому эффекту.

На основе полученных результатов можно заключить, что учет потенциала диполь-дипольного взаимодействия магнитных частиц и их взаимодействия с внешним магнитным полем в аналитических выражениях для модулей упругости позволяет адекватно описать упругие свойства магнитных жидкостей.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение нанодисперсных систем в технике, медицине, биологии и экологии // Сб. научных трудов 19-ой Международной Плесской научной конференция по нанодисперсным магнитным жидкостям. Иваново: 2020.
2. *Такетоми С., Тикадзуми С.* Магнитные жидкости. М.: Мир. 1993.
3. *Odenbach S.* Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids. Berlin: Springer, 2009.
4. *Sreekumari A., Ilg P.* // Phys. Rev. 2015. V. 92. 012306.
5. *Zubarev A.Yu., Iskakova L.Yu.* // J. Phys.: Condens. Matter. 2006. V. 18. P. S2771.
6. *Берковский В.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989.

7. *Полунин В.М.* Акустические свойства нанодисперсных магнитных жидкостей. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012.
8. *Зубарев А.Ю., Чириков Д.Н.* // Коллоид. журн. 2013. Т. 75. С. 567.
9. *Jolly M.R., Carlson J.D., Mucoz B.C., Bullions T.A.* // J. Intell. Mater. Syst. Struct. 1996. V. 6. P. 613.
10. *Lopez-Lopez M.T., Iskakova L.Yu., Zubarev A.Yu.* // Physica A. 2017. V. 486. P. 908.
11. *Borin D., Chirikov D., Zubarev A.* // Sensors. 2018. V. 18. P. 2054.
12. *Lopez-Lopez M.T., Borin D.Yu., Zubarev A.Yu.* // Phys. Rev. 2017. V. 96. P. 022605.
13. *Batchelor G.K., Green J.T.* // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. P. 4101.
14. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Механика сплошных сред. М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1953.
15. *Комилов К., Зарипов А.К., Убайди А.* // Журн. физ. химии. 2020. Т. 94. С. 1279.
16. *Комилов К., Зарипов А.К., Убайди А.* // Вестник ТНУ. Серия естественных. наук. 2021. № 1. С. 121.
17. *Зарипов А.К.* // Коллоид. журн. 2021. Т. 83. С. 412.
18. *Одинаев С., Комилов К., Зарифов А.* // Журн. физ. химии. 2006. Т. 80. С. 864.
19. *Литинский Г.Б.* // Журн. структ. химии. 2004. Т. 45. С. 86.
20. *Менделев В.С.* Магнитные свойства феррожидкостей с цепочечными агрегатами. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Екатеринбург: Уральский государственный университет им. А.М. Горького, 2009.
21. *Юхновский И.Р., Головкин М.Ф.* Статистическая теория классических равновесных систем. Киев: Наукова думка, 1980.
22. *Кристенсен Р.М.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982.
23. *Крокстон К.* Физика жидкого состояния. Статистическое введение. М.: Мир, 1978.
24. *Комилов К., Зарипов А.К.* // Вестник фил. МГУ им. М.В. Ломоносова в г. Душанбе. 2018. № 1(2). С. 64.
25. *Фишер И.З.* Статистическая теория жидкостей. М.: Физматгиз, 1961.
26. *Zwanzig R., Mountain R.D.* // J. Chem. phys. 1965. V. 43. P. 4464.
27. *Михайлов И.Г., Соловьев В.А., Сырников Ю.П.* Основы молекулярной акустики. М.: Наука, 1964.
28. *Физическая акустика. Свойства газов, жидкостей и растворов / Под ред. Мэзона У. Т. 2.* М.: Мир, 1968.