

УДК 544.03;544.2;544.6;544.7

## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭНЕРГИИ КАПИЛЛЯРНЫХ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

© 2023 г. А. И. Григорьев<sup>1</sup>, \* , Н. Ю. Колбнева<sup>2</sup>, С. О. Ширяева<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, просп. Вернадского, д. 101, к. 1, Москва, 119526 Россия

<sup>2</sup>Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, ул. Советская д. 14, Ярославль, 150000 Россия

\*e-mail: grigorai@mail.ru

Поступила в редакцию 15.03.2023 г.

После доработки 13.04.2023 г.

Принята к публикации 13.04.2023 г.

В теоретических асимптотических расчетах первого порядка малости по безразмерной амплитуде осциллирующей заряженной капле полярной жидкости исследуется влияние эффекта динамического поверхностного натяжения на капиллярные осцилляции капли. Расчеты проводятся на модели идеальной несжимаемой электропроводной жидкости. Показано, что учет эффекта динамического поверхностного натяжения приводит к повышению порядка дисперсионного уравнения, у которого появляется еще один затухающий корень, обязанный разрушению приповерхностного двойного электрического слоя (разрушению упорядоченности молекул в приповерхностном слое). В обнаруженном затухании интересно то, что оно имеет место в идеальной жидкости, а характерное время затухания совпадает с экспериментально измеряемым. Преобразования свободной энергии происходят между механической, тепловой, электромагнитной и снова механической, и все это обязано эффекту динамического поверхностного натяжения. Показано, что на низкочастотные осцилляции капле эффект динамического поверхностного натяжения влияет слабо, а на высокочастотные осцилляции существенно, заставляя такие осцилляции быстро затухать.

*Ключевые слова:* осциллирующая капля, поверхностное натяжение, релаксация поверхностного натяжения

DOI: 10.31857/S0023291223600128, EDN: ZPFCCA

### ВВЕДЕНИЕ

Теоретическое и экспериментальное исследование капиллярных осцилляций сферических и сфероидальных капель, заряженных собственными или индуцированными внешним электростатическим полем зарядами, незаряженных, неподвижных в разного вида подвесах или свободно падающих, начало развиваться с начала 20-го века. Тем не менее, первая строгая теоретическая работа появилась еще в конце 19-го века [1].

Капиллярные осцилляции капель и в настоящее время интенсивно исследуются, поскольку такой физический объект как капля встречается в массе академических, технических и технологических приложений [2–5].

В связи со сказанным представляет интерес посмотреть, какое влияние на осцилляции капель окажет давно известное динамическое поверхностное натяжение, всегда присутствующее в полярных жидкостях [6–9].

Суть эффекта динамического поверхностного натяжения заключается в следующем. Рассмотр-

им, к примеру, молекулу воды, которая представляет собой электрический диполь. Приповерхностные диполи воды ориентированы таким образом, что их отрицательно заряженные концы направлены наружу в окружающую среду, а положительно заряженные направлены внутрь жидкости [10]. Другими словами, поверхность раздела вода–воздух оказывает ориентирующее действие на диполи воды, и это экспериментальный факт [11, с. 46–47]. Следует отметить еще и тот факт, что в упорядочивании диполей в приповерхностном слое существенную роль играют электрические, квадрупольные взаимодействия. Согласно [11, с. 47], “взаимодействие квадрупольного момента молекулы с дипольными моментами соседних молекул может вызвать наблюдаемую параллельную ориентацию дипольных моментов”. “Взаимодействие дипольных моментов друг с другом приводило бы к антипараллельной ориентации соседних молекул”.

Электрическое поле слоя поверхностных диполей будет действовать на ионы примесей и ио-

ны воды таким образом, что отрицательно заряженные ионы будут концентрироваться у положительно заряженных концов приповерхностных диполей и, в свою очередь, вытягивать из объема воды положительно заряженные ионы. В итоге у поверхности образуется двойной электрический слой, у которого верхнюю неподвижную обкладку будут составлять отрицательно заряженные концы диполей с сильно связанными с ними положительно заряженными ионами. Нижняя подвижная (диффузная) обкладка двойного слоя сформируется из слабо связанных подвижных ионов.

Двойной электрический слой образуется самопроизвольно, поскольку при возникновении упорядоченности диполей на поверхности воды система переходит в состояние с меньшей потенциальной энергией. Этот переход осуществляется за весьма малое время, называемое временем релаксации. При этом уменьшается и коэффициент поверхностного натяжения, ибо поверхностное натяжение жидкости измеряется свободной энергией поверхности жидкости, приходящейся на единицу площади поверхности [12, с. 351]. Это будет стационарное состояние.

Предположим теперь, что на поверхность жидкости оказывается кратковременное силовое воздействие вследствие процессов столкновений капель, их дробления, коагуляции или трения о воздух и т.п. Разрушению упорядоченности способуют и капиллярные волны большой амплитуды, которые также разрушают упорядоченность диполей, т.к. известно, что при волновом движении частицы воды движутся по окружностям. В итоге разрушится существующая в равновесном состоянии упорядоченность диполей и двойной электрический слой расплывется. Свободная энергия поверхности жидкости увеличится, а с ней и коэффициент поверхностного натяжения. Затем упорядоченность диполей восстановится, поверхностная энергия уменьшится, и коэффициент поверхностного натяжения понизится.

Таким образом, величина коэффициента поверхностного натяжения будет колебаться между равновесным значением (при упорядоченности приповерхностных диполей) и максимальным (при полной разупорядоченности диполей).

Представляется интересным и целесообразным рассмотреть на качественном уровне вопрос того, какие последствия будет иметь периодическое изменение величины коэффициента поверхностного натяжения. Интересно, в частности, посмотреть, какие взаимопереходы энергии имеют место при реализации эффекта динамического поверхностного натяжения.

Ориентироваться для конкретности будем на капли воды естественного происхождения: облачные и дождевые [13–15]. Их счетные характеристики: концентрация, функция распределения

по размерам и зарядам, скорость падения в зависимости от размеров хорошо изучены.

## 1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть имеется неподвижная сферическая капля радиуса  $R$  идеальной несжимаемой электропроводной жидкости с массовой плотностью  $\rho_1$ , несущая электрический заряд  $Q$ . Коэффициент поверхностного натяжения жидкости обозначим  $\sigma$ . В качестве внешней среды примем идеальную несжимаемую диэлектрическую среду с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{ex}$  и массовой плотностью  $\rho_2$ .

Вследствие теплового движения молекул жидкости на поверхности капли создается капиллярное волновое движение весьма малой амплитуды, не превышающей  $1 \text{ \AA}$ . Однако из-за внешних силовых воздействий (коагуляция, дробление, столкновение, трение о воздух и т.д.) амплитуда может быть порядка десятков процентов от радиуса капли [16].

Рассмотрение задачи естественно провести в сферической системе координат  $(r, \theta, \varphi)$  с началом в центре масс сферы. Чтобы упростить следующие ниже математические выкладки, примем осевую симметрию задачи, т.е. зависимостью всех физических величин от азимутального угла  $\varphi$  будем пренебрегать и будем решать упрощенную задачу в пренебрежении аксиально асимметричными модами.

Движение жидкости в капле и движение внешней среды будем считать потенциальными, выражая поле скоростей  $\mathbf{V}_j(r, \theta, t)$  через градиент гидродинамических потенциалов  $\psi_j(r, \theta, t)$  [17]:

$$\mathbf{V}_j(r, \theta, t) = \nabla \psi_j(r, \theta, t); \quad (j = 1, 2). \quad (1)$$

Здесь величины с индексом  $j = 1$  характеризуют каплю, а с  $j = 2$  – среду.

Искажение равновесной сферической формы  $\xi(\theta, t)$ , вызванное капиллярным тепловым движением, будем считать малым вместе с величинами  $\mathbf{V}_j(r, \theta, t)$ ,  $\psi_j(r, \theta, t)$ .

Уравнение границы раздела сред в любой момент времени  $t$  запишем в виде:

$$r(\theta, t) = R + \xi(\theta, t),$$

где амплитуда волнового движения поверхности капли много меньше ее равновесного радиуса:  $\max |\xi| / R \ll 1$ .

Моделируя каплю проводником, получим, что скорость перераспределения поверхностного заряда превосходит гидродинамические скорости течений жидкости в капле (в реальности вода в капле является электролитом). Тогда электрическое поле в окрестности капли, создаваемое ее равномерно распределенным зарядом, будем полагать квазистационарным, описываемым электрическим по-

тенциалом  $\Phi(r, \theta, t)$ , связанным с напряженностью поля  $\mathbf{E}(r, \theta, t)$  соотношением:

$$\mathbf{E}(r, \theta, t) = -\nabla\Phi(r, \theta, t). \quad (2)$$

Потенциал вдоль возмущенной поверхности обозначим  $\Phi_s$ .

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическая формулировка задачи о капиллярных осцилляциях заряженной капли состоит из уравнений движения внутренней и внешней сред капли (уравнения Эйлера):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_j(r, \theta, t)}{\partial t} + (\mathbf{V}_j(r, \theta, t) \nabla) \mathbf{V}_j(r, \theta, t) = \\ = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(r, \theta, t); \quad (j = 1, 2); \end{aligned} \quad (3)$$

уравнения непрерывности:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}_j(r, \theta, t) = 0; \quad j = 1, 2; \quad (4)$$

и уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(r, \theta, t) = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(r, \theta, t) = 0. \quad (5)$$

Использование уравнения (1) позволяет привести равенство (4) к уравнениям Лапласа для гидродинамических потенциалов  $\psi_j(r, \theta, t)$ :

$$\Delta \psi_j(r, \theta, t) = 0; \quad (j = 1, 2); \quad (6)$$

Подставляя (2) в (5), находим, что первое из уравнений системы (5) удовлетворяется тождественно, а второе уравнение сводится к уравнению Лапласа для потенциала электростатического поля  $\Phi(r, \theta, t)$ :

$$\Delta \Phi(r, \theta, t) = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (3) с учетом (1) получим соотношения для давлений в капле  $P_1(r, \theta, t)$  и во внешней среде  $P_2(r, \theta, t)$ :

$$\begin{aligned} P_j(r, \theta, t) = P_{0j} - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t} - \\ - \frac{1}{2} \rho_j (\nabla \psi_j)^2; \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

где  $P_{0j}$  – постоянные давления внутри ( $j = 1$ ) и вне капли ( $j = 2$ ).

Кроме того, необходимо, чтобы искомые потенциалы  $\psi_j(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$  удовлетворяли условиям ограниченности (естественным граничным условиям) в начале координат и на бесконечном удалении от капли:

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_j(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (8)$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad \Phi(r, \theta, t) \rightarrow 0. \quad (9)$$

На границе раздела сред  $r = R + \xi(\theta, t)$  должны выполняться гидродинамические и электростатические граничные условия: равенства нормальных компонент скоростей движения внутренней и внешней сред:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \nabla \psi_1(r, \theta, t) = \mathbf{n}_2 \nabla \psi_2(r, \theta, t) \equiv \\ \equiv \mathbf{n} \nabla \psi_j(r, \theta, t); \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2; \end{aligned} \quad (10)$$

кинематическое:

$$\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} = \mathbf{n}(\theta, t) \nabla \psi_j(r, \theta, t); \quad (11)$$

динамическое условие для нормальной компоненты тензора напряжений:

$$\begin{aligned} P_1(r, \theta, t) - P_2(r, \theta, t) + P_q(r, \theta, t) - P_\sigma(r, \theta, t) = 0; \\ P_q(r, \theta, t) = \frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi} (\nabla \Phi(r, \theta, t))^2; \\ P_\sigma(r, \theta, t) = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}(\theta, t); \end{aligned} \quad (12)$$

и условие постоянства электрического потенциала поверхности капли:

$$\Phi(r, \theta, t) = \Phi_s. \quad (13)$$

Зададим дополнительные интегральные условия сохранения объема капли, отсутствия движения ее центра масс:

$$\begin{aligned} \int_V r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi = 0; \\ V = [0 \leq r \leq R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]; \end{aligned} \quad (14)$$

и постоянства полного заряда капли:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{4\pi} \int_S \mathbf{n}(\theta, t) \nabla \Phi(r, \theta, t) dS = Q; \\ S = [r = R + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \end{aligned} \quad (15)$$

В выписанных выражениях  $\mathbf{n}_1(\theta, t)$  – внешний орт нормали по отношению к капле,  $\mathbf{n}_2(\theta, t)$  – внешний орт нормали по отношению к внешней среде,  $P_q(r, \theta, t)$  – давление электрических сил,  $P_\sigma(r, \theta, t)$  – давление сил поверхностного натяжения.

Решение сформулированной задачи (6)–(11) будем искать классическими методами теории возмущений [18] в линейном приближении по малому параметру  $\varepsilon$ , в качестве которого выберем отношение амплитуды капиллярных осцилляций капли к ее радиусу  $\varepsilon \equiv |\xi(\theta, t)|/R \ll 1$ . В рамках метода прямого разложения возмущение равновесной формы  $\xi(\theta, t)$ , потенциалы  $\psi_j(r, \theta, t)$ ,  $\Phi(r, \theta, t)$  и давления  $P_j(r, \theta, t)$ ,  $P_q(r, \theta, t)$ ,  $P_\sigma(r, \theta, t)$  представим в виде асимптотических разложений:

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &= \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ \psi_j(r, \theta, t) &= \psi_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \quad (j = 1, 2); \\ \Phi(r, \theta, t) &= \Phi^{(0)}(r, \theta) + \Phi^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_j(r, \theta, t) &= P_j^{(0)}(r, \theta, t) + P_j^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_q(r, \theta, t) &= P_q^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2); \\ P_\sigma(r, \theta, t) &= P_\sigma^{(0)}(r, \theta) + P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (16)$$

где верхний индекс обозначает порядок малости по  $\varepsilon$  соответствующих компонент.

### 3. ПРОЦЕДУРА ОТЫСКАНИЯ РЕШЕНИЯ. ВЫВОД ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ БЕЗ УЧЕТА РЕЛАКСАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Используя данные разложения, исходную систему уравнений (6), (7), (8), (9), (10) разделим по порядкам малости по  $\varepsilon$ .

В нулевом приближении по  $\varepsilon$  имеем задачу для расчета равновесного состояния системы:

$$\Delta\Phi^{(0)}(r, \theta) = 0; \quad (17)$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi^{(0)}(r, \theta) \rightarrow 0; \quad (18)$$

$$r = R: P_1^{(0)}(r, \theta) - P_2^{(0)}(r, \theta) + P_q^{(0)}(r, \theta) - P_\sigma^{(0)}(r, \theta) = 0; \quad (19)$$

$$P_1^{(0)} = P_{01}; \quad P_2^{(0)} = P_{02}; \quad P_q^{(0)} = \frac{\varepsilon_{\text{ex}} (\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}; \quad (20)$$

$$P_\sigma^{(0)} = \sigma \text{div} \mathbf{n}_0(\theta); \quad \mathbf{n}_0(\theta) = \mathbf{e}_r; \quad \Phi^{(0)}(r, \theta) = \Phi_s^{(0)};$$

$$\int_V r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3; \quad \int_V \mathbf{r} r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi = 0; \quad (21)$$

$$V = [0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi];$$

$$-\frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{4\pi} \oint_S \mathbf{n}_0(\theta) \nabla\Phi^{(0)}(r, \theta) dS = Q; \quad (22)$$

$$S = [r = R, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

где  $\mathbf{n}_0(\theta)$  – единичный вектор нормали к невозмущенной поверхности капли.

В результате решения уравнения Лапласа (17) при удовлетворении граничным и дополнительным условиям (18), (20), (22) получим электрический потенциал в окрестности равновесной сферы:

$$\Phi^{(0)} = \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} r}. \quad (23)$$

Используя (23), из баланса давлений на границе раздела сред  $r = R$  найдем перепад постоянных давлений  $\Delta P$  в капле и во внешней среде:

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_{\text{ex}} R^4}.$$

Сформулируем отдельно электрогидродинамическую задачу первого порядка малости по  $\varepsilon$ :

$$\Delta\psi_j(r, \theta, t) = 0; \quad (j = 1, 2); \quad \Delta\Phi^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad (24)$$

$$r \rightarrow 0: \psi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (25)$$

$$r \rightarrow \infty: \psi_2(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad \Phi^{(1)}(r, \theta, t) \rightarrow 0; \quad (26)$$

$$r = R: \frac{\partial\xi(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\partial\psi_j(r, \theta, t)}{\partial r}; \quad (j = 1, 2); \quad (27)$$

$$P_1^{(1)}(r, \theta, t) - P_2^{(1)}(r, \theta, t) + P_q^{(1)}(r, \theta) - P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t) = 0; \quad (28)$$

$$\Phi^{(1)}(r, \theta, t) - \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2} \xi(\theta, t) = \Phi_s^{(1)}; \quad (29)$$

$$3R^2 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \sin\theta d\theta = 0; \quad (30)$$

$$4R^3 \int_0^\pi \xi(\theta, t) \cos\theta \sin\theta d\theta = 0;$$

$$\int_0^\pi \frac{\partial\Phi^{(1)}(r, \theta, t)}{\partial r} \sin\theta d\theta = 0. \quad (31)$$

Возмущение сферической формы капли  $\xi(\theta, t)$ , связанное с капиллярным волновым движением в ней, запишем в виде ряда по осесимметричным полиномам Лежандра, принимая следующую зависимость от времени амплитудных коэффициентов  $M_n(t) \sim \exp(i\omega_n t)$ :

$$\xi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu); \quad \mu \equiv \cos\theta. \quad (32)$$

Здесь суммирование начинается с индекса  $n = 2$ , так как условия неизменности объема капли и отсутствия движения ее центра масс (30) накладывают запрет на возбуждение в первом порядке по  $\varepsilon$  центрально-симметричной моды  $n = 0$ , связанной с радиальными пульсациями капли, и трансляционной моды  $n = 1$ , отвечающей за поступательное движение капли [17].

Из (32) следует, что осесимметричные капиллярные осцилляции капли  $n$ -ой колебательной моды аналитически описываются полиномами Лежандра  $P_n(\mu)$   $n$ -ого порядка.

В силу осевой симметрии решения уравнений Лапласа (24) для потенциалов скоростей  $\psi_j(r, \theta, t)$  при выполнении условий ограниченности (25), (26) представим в виде разложений с учетом гармонической временной зависимости амплитуд  $A_n(t), B_n(t) \sim \exp(i\omega_n t)$ :

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} A_n \exp(i\omega_n t) r^n P_n(\mu); \\ \psi_2(r, \theta, t) &= \sum_{n=2}^{\infty} B_n \exp(i\omega_n t) r^{-(n+1)} P_n(\mu); \end{aligned}$$

При помощи кинематического граничного условия (27) свяжем постоянные коэффициенты  $A_n, B_n$  с амплитудами капиллярных осцилляций  $M_n$  соотношениями:

$$A_n = R^{-n+1} \frac{i\omega_n}{n} M_n; \quad B_n = -R^{n+2} \frac{i\omega_n}{n+1} M_n; \quad n \geq 2.$$

Используя эти выражения, выпишем окончательный вид гидродинамических потенциалов:

$$\psi_1(r, \theta, t) = R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{i\omega_n}{n} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu); \quad (33)$$

$$\psi_2(r, \theta, t) = -R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^{n+1} \frac{i\omega_n}{(n+1)} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (34)$$

Чтобы воспользоваться динамическим граничным условием (28), необходимо найти в явном виде добавки к давлениям  $P_j^{(1)}(r, \theta, t), P_q^{(1)}(r, \theta, t), P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t)$ , связанные с искажением равновесной сферы.

В первом порядке малости давления внутренней и внешней сред капли  $P_j^{(1)}(r, \theta, t)$  определяются выражениями:

$$r = R: \quad P_j^{(1)}(r, \theta, t) = -\rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}; \quad (j = 1, 2).$$

После подстановки в них решений (33), (34) найдем:

$$P_1^{(1)} = \rho_1 R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{n} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu); \quad (35)$$

$$P_2^{(1)} = -\rho_2 R \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega_n^2}{(n+1)} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (36)$$

Для нахождения поправки к давлению сил поверхностного натяжения  $P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t)$  выпишем с учетом осевой симметрии задачи орт нормали  $\mathbf{n}(\theta, t)$  к свободной поверхности капли  $F(r, \theta, t) = r - R - r(\theta, t) = 0$ , вычисляемый в первом порядке малости по общей формуле  $\mathbf{n}(\theta, t) = \nabla F / |\nabla F|$ , в виде:

$$\mathbf{n}(\theta, t) = \mathbf{e}_r(\theta) - \frac{1}{R + \xi(\theta, t)} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta(\theta),$$

где  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  – орты сферической системы координат.

Тогда в первом же порядке малости давление  $P_\sigma^{(1)}(r, \theta, t)$  определится выражением:

$$\begin{aligned} r = R: \quad P_\sigma^{(1)} &= \frac{\sigma}{R} \left[ -(2 + \hat{L}) \frac{\xi(\theta, t)}{R} \right]; \\ \hat{L} &\equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \end{aligned}$$

подставляя в которое разложение (32), несложно получить:

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)(n+2) M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (37)$$

Пользуясь асимптотическим разложением (16) электрического потенциала, будем искать поправку к давлению сил электрического поля  $P_q^{(1)}(r, \theta, t)$ , выписанную в первом порядке по амплитуде  $\varepsilon$ , в виде:

$$\begin{aligned} r = R: \quad P_q^{(1)} &= \\ &= \frac{\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \Phi^{(0)})^2 \xi(\theta, t) + 2 \nabla \Phi^{(0)} \nabla \Phi^{(1)} \right)^2, \end{aligned} \quad (38)$$

где  $\Phi^{(0)}$  выражается (37).

Для отыскания явного вида давления (38) необходимо найти компоненту потенциала  $\Phi^{(1)}$ , связанную с возмущением капли  $\xi(\theta, t)$ , из решения электрической задачи (24), (26), (29), (31).

Решение уравнения (24), удовлетворяющее условию убывания потенциала  $\Phi^{(1)}$  на бесконечности ( $r \rightarrow \infty$ ), может быть представлено в виде:

$$\Phi^{(1)}(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n r^{-(n+1)} P_n(\mu),$$

где численные коэффициенты  $C_n^{(1)}$  находятся из интегрального условия (31):

$$F_n = 0; \quad F_n = R^{n-1} \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}}} M_n \exp(i\omega_n t); \quad (n \geq 1).$$

При этом поправка к поверхностному потенциалу равна  $\Phi_s^{(1)} = 0$ .

Для возмущенного электрического потенциала несложно записать:

$$\Phi^{(1)}(r, \theta) = \frac{Q}{\varepsilon_{\text{ex}} R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (39)$$

В итоге, пользуясь решениями (37), (32), (39), равенство (38) преобразуем к виду:

$$P_q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi \varepsilon_{\text{ex}} R^5} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) M_n \exp(i\omega_n t) P_n(\mu). \quad (40)$$

Подставляя в баланс давлений (28) линейные по  $\varepsilon$  поправки к давлениям (35), (36), (37), (40) и используя ортогональность полиномов Лежандра, придем к дисперсионному уравнению, определяющему связь

частоты капиллярных осцилляций  $\omega_n$  заряженной капли с номером колебательной моды  $n$ :

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(\rho_1(n+1) + \rho_2 n)} \left[ 1 - \frac{W}{(n+2)} \right]; \quad (41)$$

$$(n \geq 2); \quad W = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_{\text{ex}}\sigma R^3}.$$

Из уравнения (41) можно видеть, что для положительных значений выражения в квадратных скобках поверхность капли устойчива по отношению к величине ее нескомпенсированного заряда:  $W < (n+2)$  [1].

#### 4. УЧЕТ РЕЛАКСАЦИИ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ

Экспериментально обнаружено, что характерное время релаксации  $\tau_r$  поверхностного натяжения различных жидкостей, включая воду, составляет  $10^{-5}$ – $10^{-3}$  с [6–8], а максимальное значение динамического поверхностного натяжения  $\sigma_\infty$  на 25% выше его равновесного значения  $\sigma_0$  [9]. В связи с этим для численных оценок водяных капель (при  $\sigma_0 = 73$  дин/см) приняты средние характеристики:  $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$  с,  $\sigma_\infty = 91$  дин/см,  $\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0 = 18$  дин/см.

Принимая во внимание, что в результате разрушения двойного электрического слоя коэффициент поверхностного натяжения изменяется от максимального до равновесного значений, динамический коэффициент  $\sigma(t)$  естественно представить в виде суперпозиции коэффициента поверхностного натяжения равновесной структуры капли и добавки, связанной с разрушением упорядоченности полярных молекул в приповерхностном слое жидкости:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_* \exp\left(-\frac{t}{\tau_r}\right). \quad (42)$$

Здесь временная экспоненциальная зависимость (с характерным временем релаксации  $\tau_r$ ) показывает, что в момент времени  $t = 0$  при полной упорядоченности приповерхностных диполей максимальное значение коэффициента поверхностного натяжения составляет  $\sigma_\infty = \sigma_0 + \sigma_*$ . Однако с течением времени упорядоченное расположение диполей восстанавливается и поверхностное натяжение снижается.

Следует отметить, что в общем случае релаксация поверхностного натяжения характеризуется отклонением структуры мгновенно деформированной поверхности от ее равновесной структуры. Известно, что лапласовское давление определяет связь между изменением давления под искривленным капиллярным волновым движением поверхности капли (что аналогично нормальному напряжению) с кривизной поверхности. Иначе говоря, эффект релаксации приповерхностной структуры капли можно связать с положением вязкоупругости, при котором нормальное напряжение зависит от истории деформации. В этом случае имеет место соотношение (аналогичное принципу суперпозиции Больцмана), выражающее мгновенное изменение давления на поверхности капли  $\Delta P_1(t)$  через историю изменения кривизны ее поверхности  $u(t)$  [20, 21]:

$$\Delta P_1(t) = \int_{-\infty}^t \sigma(t-\tau) \frac{du(\tau)}{d\tau} d\tau. \quad (43)$$

Аналогично тому, как в случае твердотельного поведения жидкости его напряжение связывается с деформацией, согласно принципу суперпозиции Больцмана определим мгновенное изменение давления на поверхности капли  $\Delta P_1(t)$  через историю изменения кривизны ее поверхности  $u(t)$  [20, 21].

Подстановка (42) в (43) и применение прямого преобразования Фурье к (43) позволяет перейти от временной зависимости величины  $\sigma$  к частотной. В результате комплексный коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  запишем в соответствии с известной формулой Максвелла [20]:

$$\sigma = \sigma_\infty - \frac{\sigma_*}{1 - i\omega_n \tau_r} = \sigma_0 - \frac{i\omega_n \sigma_* \tau_r}{1 - i\omega_n \tau_r}; \quad (44)$$

$$\sigma_* = \sigma_\infty - \sigma_0.$$

В (42), (44) введены обозначения:  $i$  – мнимая единица,  $\tau_r$  – характерное время релаксации (время, за которое мгновенно деформированный приповерхностный слой жидкой капли возвращается в равновесное состояние),  $\sigma_0$  – значение коэффициента поверхностного натяжения равновесной структуры капли (для нулевой частоты),  $\sigma_\infty$  – максимальное значение коэффициента поверхностного натяжения капли для весьма высоких частот (при разрушенной упорядоченной структуре двойного электрического слоя), отвечающих неравенству  $\omega_n \tau_r \gg 1$ ,  $\sigma_*$  – поправка к величине  $\sigma_0$ , связанная с отклонением приповерх-

ностного слоя капли от равновесного состояния в результате эффекта релаксации.

Подставляя (44) в (41), легко выпишем окончательное дисперсионное уравнение для капиллярных осцилляций заряженной капли, порождаемых релаксацией поверхностного натяжения:

$$\omega_n^3 + i \frac{\omega_n^2}{\tau_r} - \omega_n \left( \omega_{n0}^2 + \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \omega_{n0}'^2 \right) - i \frac{\omega_{n0}^2}{\tau_r} = 0; \quad (n \geq 2);$$

$$\omega_{n0}'^2 = \frac{\sigma_0}{R^3} \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(\rho_1(n+1) + \rho_2 n)};$$

$$\omega_{n0}^2 = \frac{\sigma_0}{R^3} \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{(\rho_1(n+1) + \rho_2 n)} \left[ 1 - \frac{W_0}{(n+2)} \right]; \quad (45)$$

$$W_0 = \frac{Q^2}{4\pi\sigma_0 R^3},$$

где величины, отмеченные нижним индексом 0, относятся к равновесному состоянию поверхности капли.

Несложно видеть, что второй и четвертый коэффициенты дисперсионного уравнения являются мнимыми, и что включение механизма релаксации сказывается на увеличении порядка дисперсионного уравнения по сравнению с уравнением (41), выписанным без учета релаксации. Это происходит за счет появления затухания капиллярных осцилляций капли, связанных с релаксацией поверхностной энергии (коэффициента поверхностного натяжения) к их равновесным значениям в процессе восстановления двойного электрического слоя.

Решениями дисперсионного кубического уравнения (формула (45)), имеющего комплексные коэффициенты, являются три комплексных корня: первый корень содержит только мнимую часть, а два других имеют одинаковую комплексную часть и отличающуюся знаком реальную часть. При этом положительная вещественная компонента комплексной частоты интерпретируется как собственная частота осцилляций капли, а отрицательная вещественная часть не имеет физического смысла.

Решения уравнения (45), полученные в пакете аналитических вычислений MATHEMATICA, с использованием средних по облаку характеристик водяной капли и внешней среды (воздуха), принимают окончательный вид трех комплексных решений: одно – чисто мнимое и два других – с одинаковой мнимой частью и противоположной по знаку реальной частью:

$$\omega_n^{(1)} = -i \left( \frac{l_1}{3} + \alpha_0 + \alpha_1 \right);$$

$$\omega_n^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_1 - i \left( \frac{l_1}{3} + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \right);$$

$$\omega_n^{(3)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_0' - \frac{\sqrt{3}}{2} \alpha_1' - i \left( \frac{l_1}{3} + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2} \right).$$

$$\text{Im} \omega_n^{(2)} = \eta_n^{(2)} = - \left( \frac{l_1}{3} + \frac{\alpha_0'}{2} + \frac{\alpha_1'}{2} \right); \quad \alpha_0 = \frac{\sqrt[3]{2\beta_0}}{3(\beta_1 + \beta_3)^{\frac{1}{3}}}; \quad (46)$$

$$\alpha_1 \equiv \frac{(\beta_1 + \beta_2)^{\frac{1}{3}}}{3\sqrt[3]{2}}; \quad l_1 = \frac{1}{\tau_r}; \quad l_2 = \omega_{n0}^2 + \frac{\sigma_*}{\sigma_0} \omega_{n0}'^2;$$

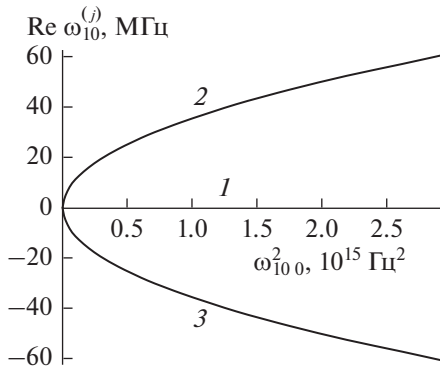
$$l_3 = \frac{\omega_{n0}^2}{\tau_r}; \quad \beta_0 = l_1^2 - 3l_2; \quad \beta_1 = 2l_1^3 - 9l_1 l_2 + 27l_3;$$

$$\beta_2 = 3\sqrt{3} \left[ l_1^2 l_2^2 - 4l_2^3 - 4l_1^3 l_3 + 18l_1 l_2 l_3 - 27l_3^2 \right].$$

Аналитические выражения (46) являются окончательным решением дисперсионного уравнения (45). При этом вещественная часть  $\text{Re} \omega_n^{(j)}$  комплексной величины  $\omega_n^{(j)}$  определяет собственную частоту осцилляций капли, а мнимая – декремент затухания  $\eta_n^{(j)} \equiv \text{Im} \omega_n^{(j)}$ , связанный с релаксацией поверхностного натяжения,  $\omega_n$  – частота осцилляций  $n$ -ой моды,  $\omega_{n0}$ ,  $\omega_{n0}'$  – частоты осцилляций  $n$ -ой моды заряженной и незаряженной каплей, имеющих равновесную структуру приповерхностного слоя жидкости.

Согласно данным натурных измерений [15], характерные размеры внутриоблачных каплей, составляющих кучево-дождевые облака, приходятся на диапазон от 3 до 30 мкм с максимальной концентрацией при  $R = 3-7$  мкм. На стадии развития конвективных облаков в результате коагуляции облачных каплей образуются мелкие дождевые капли радиусами  $0.01 \leq R \leq 0.025$  см, называемые морсью, и укрупненные дождевые капли с типичными размерами  $0.025 \leq R \leq 0.35$  см. Более крупные капли радиусами от 0.35 см разбиваются при падении в воздухе из-за аэродинамического сопротивления [13].

Появление нескомпенсированных зарядов на отдельных осциллирующих каплях вызывается процессами электризации при захвате каплями воздушных ионов, перераспределения зарядов из-за разрушения, слияния с другими каплями [14]. В соответствии со справочными данными [15], при характерных средних зарядах рассматриваемых каплей величина параметра Релея, определяющая электрогидродинамическую устойчивость капли по отношению к ее собственному заряду, много меньше критического значения  $W_{кр}/4 = 1$  [1], при котором наблюдается распад капли.



**Рис. 1.** Зависимость вещественной компоненты  $\text{Re}\omega_{10}^{(j)}$  комплексных частот осцилляций заряженной облачной капли от величины квадрата частоты  $\omega_{10,0}^2$  для равновесной структуры капли (при изменении радиуса от  $R = 3$  мкм до  $R = 30$  мкм), рассчитанная при  $n = 10$ ,  $\epsilon_{\text{ex}} = 1$ ,  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $\sigma_0 = 73$  дин/см,  $\sigma_{\infty} = 91$  дин/см,  $\sigma_* = 18$  дин/см,  $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$  с. Кривая 1 соответствует  $\text{Re}\omega_{10}^{(1)}$ , кривая 2 –  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$ , кривая 3 –  $\text{Re}\omega_{10}^{(3)}$ .

Расчеты показывают, что эффект релаксации поверхностного натяжения слабо влияет на параметры низкочастотных осцилляций капли (на основной моде и на соседних модах), он существенно проявляется, когда период осцилляций становится примерно равным характерному времени релаксации поверхностного натяжения. Для капли воды это происходит, когда номер моды осцилляций примерно на порядок величины превышает номер основной моды, поэтому ниже следующие вычисления проведем для  $n = 10$ .

Для отыскания численных решений примем, что осцилляции каплей связаны с модой  $n = 10$ . Примем средние характеристики водяных каплей:  $\sigma_0 = 73$  дин/см,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ ( $\sim 0.04Q_{\text{кр}}$  при  $R = 3$  мкм и  $\sim 0.001Q_{\text{кр}}$  при  $R = 30$  мкм), где  $Q_{\text{кр}}$  – критическое для реализации электростатической неустойчивости значение заряда. Кроме того, примем  $\epsilon_{\text{ex}} = 1$ ,  $\sigma_{\infty} = 91$  дин/см,  $\sigma_* = 18$  дин/см,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$  с.

Анализируя численные решения, получаем, что первый корень  $\omega_{10}^{(1)}$  определяет чисто апериодическое затухание, а второй и третий корни  $\omega_{10}^{(2)}$ ,  $\omega_{10}^{(3)}$  соответствуют медленно затухающим осцилляциям облачных каплей (в этом случае декремент затухания на четыре порядка ниже частоты собственных осцилляций) и весьма быстрым затухающим осцилляциям мелких дождевых каплей ( $\eta_{10}^{(j)}$  на

один-два порядка меньше  $\text{Re}\omega_{10}^{(j)}$ ). Одновременно с этим увеличение размера капли приводит к увеличению отношения  $|\eta_{10}^{(j)}|/\text{Re}\omega_{10}^{(j)}$  так, что осцилляции крупных дождевых каплей имеют апериодический характер. Из полученных численных решений выясняется, что при снижении размеров каплей включение эффекта динамического поверхностного натяжения приводит к возрастанию собственных частот осцилляций по сравнению с частотами, определяемыми уравнением (41) без учета релаксации [13]. Отсюда можно сделать вывод, что вызванные релаксацией поверхностного натяжения затухающие осцилляции облачных каплей соответствуют высоким частотам  $\text{Re}\omega_{10}\tau_r \gg 1$ .

Для того чтобы иметь возможность проиллюстрировать зависимости характеристик затухающих осцилляций капли, выделим в аналитических выражениях (46) вещественную  $\text{Re}\omega_n^{(j)}$  и мнимую  $\text{Im}\omega_n^{(j)}$  компоненты:

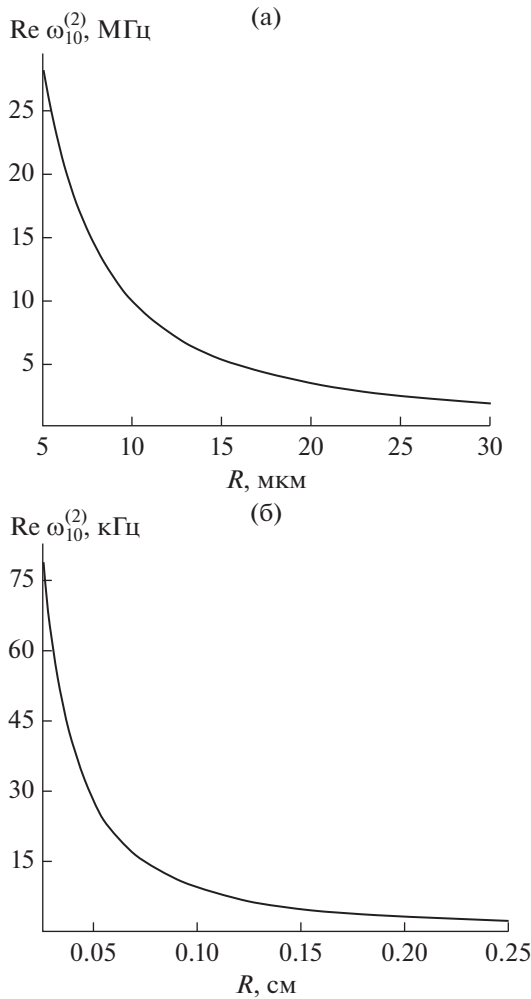
$$\begin{aligned} \text{Re}\omega_n^{(1)} &= 0; \quad \text{Re}\omega_n^{(2)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'_1; \\ \text{Re}\omega_n^{(3)} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha'_1; \quad \text{Im}\omega_n^{(1)} = \\ &= -\left(\frac{l_1}{3} + \alpha'_0 + \alpha'_1\right); \quad \text{Im}\omega_n^{(2)} = \text{Im}\omega_n^{(3)} = \\ &= -\left(\frac{l_1}{3} + \frac{\alpha'_0}{2} + \frac{\alpha'_1}{2}\right). \end{aligned} \quad (47)$$

На рис. 1 представлены зависимости вещественной части комплексных частот  $\text{Re}\omega_{10}^{(j)}$ , описываемых соотношениями (4.9), от величины квадрата частоты  $\omega_{10,0}^2$  для равновесной структуры капли. В анализируемом случае радиус внутриоблачной капли  $R$  меняется от 3 до 30 мкм, поэтому  $\omega_{10,0}^2$  изменяется в диапазоне от  $2.9 \times 10^{12}$  рад до  $2.9 \times 10^{15}$  рад<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>. Кривая 1 соответствует  $\text{Re}\omega_{10}^{(1)} = 0$ , кривая 2 построена для положительной частоты  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$ , кривая 3 определяет отрицательную  $\text{Re}\omega_{10}^{(3)}$ . Как показывают графики, с ростом параметра  $\omega_{10,0}^2$  частоты  $\text{Re}\omega_{10}^{(j)}$ , связанные с релаксационным процессом, быстро увеличиваются по абсолютной величине.

На рис. 2 и 3 приведены зависимости положительной вещественной компоненты комплексной частоты  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$  от размеров  $R$  и зарядов  $Q$  (вплоть до критических значений  $Q_{\text{кр}}$  для указанного  $R$ ) внутриоблачных и дождевых каплей.

Из рис. 2а, 2б несложно видеть, что с ростом размера исследуемых каплей собственная частота осцилляций снижается по примерно гиперболи-



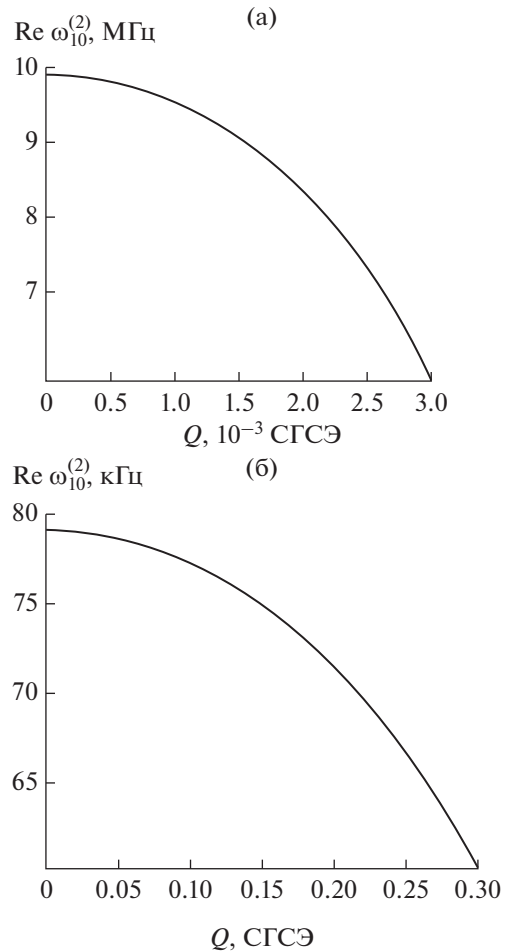


**Рис. 2.** Зависимость положительной вещественной компоненты  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$  комплексной частоты осцилляций заряженной капли от ее радиуса  $R$ , построенная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1: а – внутриоблачная капля, имеющая заряд  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ ( $\sim 0.02Q_{\text{кр}}$  при  $R = 5$  мкм и  $\sim 0.001Q_{\text{кр}}$  при  $R = 30$  мкм), б – дождевая капля, имеющая заряд  $Q = 7 \times 10^{-4}$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-3}Q_{\text{кр}}$  при  $R = 0.025$  см и  $\sim 5 \times 10^{-5}Q_{\text{кр}}$  при  $R = 0.25$  см).

ческому закону: при увеличении радиуса  $R$  в три раза, частота  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$  возрастает в пять раз.

Согласно рис. 3а и 3б возрастание величины собственного заряда капли  $Q$  приводит к уменьшению частоты  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$ . Такая зависимость наиболее заметно сказывается при приближении  $Q$  к критическому значению  $Q_{\text{кр}}$ .

Следует отметить, что затухающие капиллярные осцилляции капли, вызванные эффектом релаксации поверхностного натяжения, приводят к



**Рис. 3.** Зависимость положительной вещественной компоненты  $\text{Re}\omega_{10}^{(2)}$  комплексной частоты осцилляций заряженной капли от величины ее собственного заряда  $Q$ , построенная при тех же значениях физических величин, что на рис. 1: а – внутриоблачная капля радиусом  $R = 10$  мкм, б – дождевая капля радиусом  $R = 250$  см.

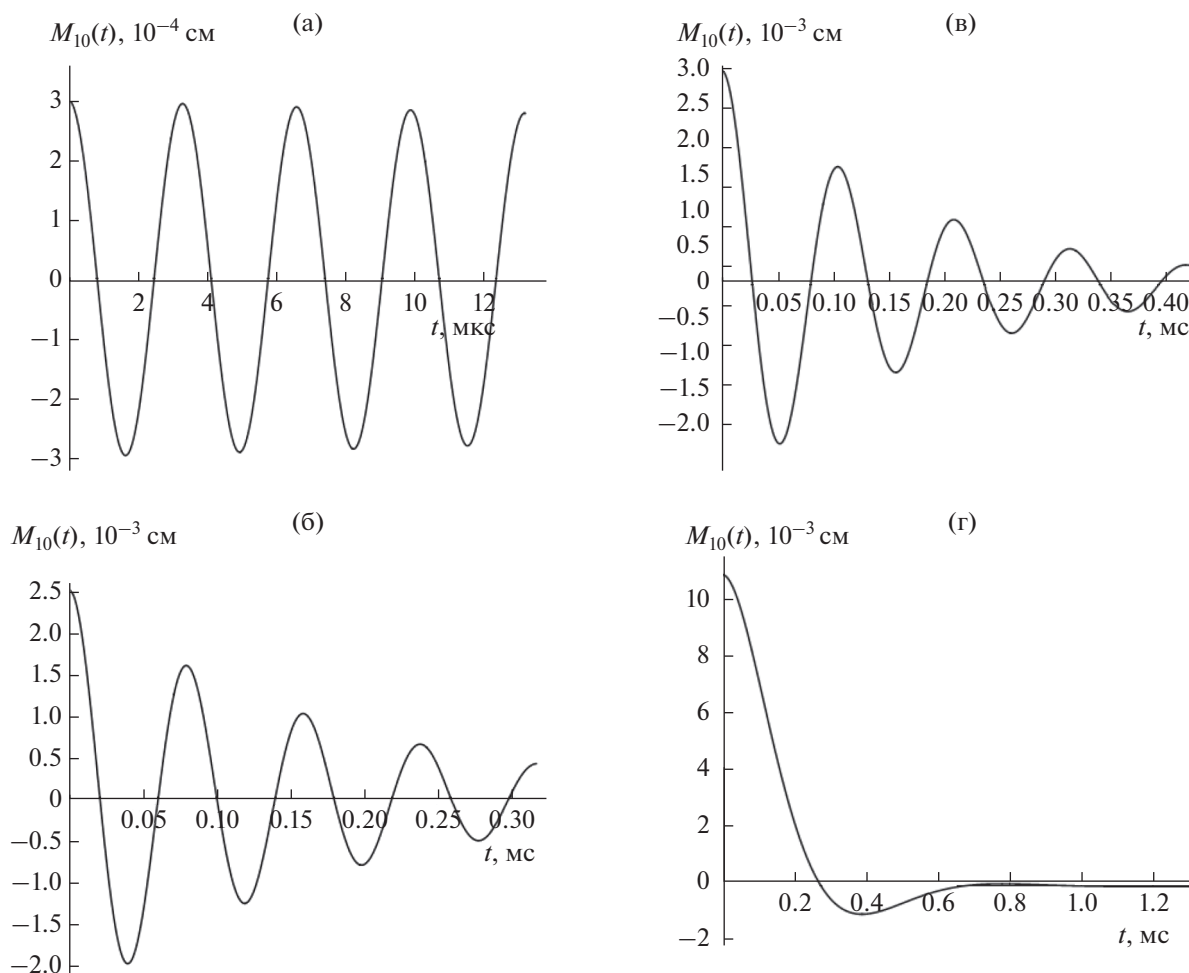
тому, что периодически изменяющаяся амплитуда возмущения  $\xi(\theta, t)$  сферической формы поверхности капли экспоненциально убывает со временем:

$$M_{10}(t) = \varepsilon R \cos(\text{Re}\omega_{10}^{(2)}t + \varphi) \exp(-|\eta_{10}^{(2)}|t),$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{1 + \left(\frac{|\eta_{10}^{(2)}|}{\text{Re}\omega_{10}^{(2)}}\right)^2}; \quad \varphi = \arctg\left(-\frac{|\eta_{10}^{(2)}|}{\text{Re}\omega_{10}^{(2)}}\right), \quad (48)$$

где безразмерная амплитуда осцилляций  $\varepsilon_0 = 0.1$ .

На рис. 4 изображены рассчитанные по (48) графики зависимости от времени  $t$  амплитуды  $M_{10}(t)$  возмущения равновесной формы капли. Рис. 4а, 4б иллюстрируют весьма медленно затухающие капиллярные осцилляции облачных капель, периоды которых  $T = 0.1$  мкс при  $R = 3$  мкм и  $T = 3.3$  мкс

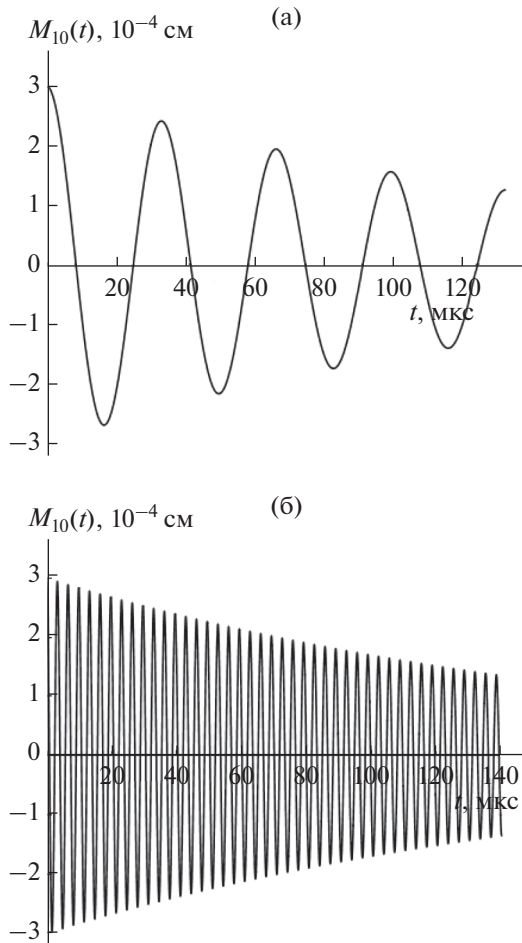


**Рис. 4.** Зависимость от времени  $t$  амплитуды  $M_{10}(t)$  возмущения равновесной формы заряженной капли, совершающей затухающие капиллярные осцилляции. Расчеты проведены при тех же физических величинах, что на рис. 1: а – внутриоблачная капля радиуса  $R = 30$  мкм с зарядом  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ ( $\sim 0.001 Q_{кр}$ ), б – дождевая капля радиуса  $R = 0.025$  см с зарядом  $Q = 7 \times 10^{-4}$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-3} Q_{кр}$ ), в – дождевая капля радиуса  $R = 0.05$  см с зарядом  $Q = 7 \times 10^{-4}$  СГСЭ ( $\sim 6 \times 10^{-4} Q_{кр}$ ); г – дождевая капля радиуса  $R = 0.11$  см с зарядом  $Q = 7 \times 10^{-4}$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-4} Q_{кр}$ ).

при  $R = 30$  мкм приблизительно совпадают с периодами собственных осцилляций. В этом случае в силу малости величины  $|\eta_{10}^{(2)}| / \text{Re}\omega_{10}^{(2)} \ll 1$  амплитуда  $M_{10}(t)$  будет иметь экспоненциально затухающий характер только при рассмотрении весьма больших времен. Из рис. 4 в можно видеть, что период затухающих осцилляций наименьшей дождевой капли  $R = 250$  мкм составляет  $T = 79.6$  мкс. На рис. 4г показаны затухающие капиллярные осцилляции дождевой капли размером  $R = 0.05$  см с периодом  $T = 0.23$  мс. Выясняется, что с увеличением размера капли возрастает период затухающих осцилляций, так как увеличивается величина отношения  $|\eta_{10}^{(2)}| / \text{Re}\omega_{10}^{(2)}$  и, как следствие, снижается частота затухающих осцилляций.

Из рис. 4г видно, что быстрое затухание осцилляций имеет место, когда период осцилляций сравним с характерным временем релаксации поверхностного натяжения.

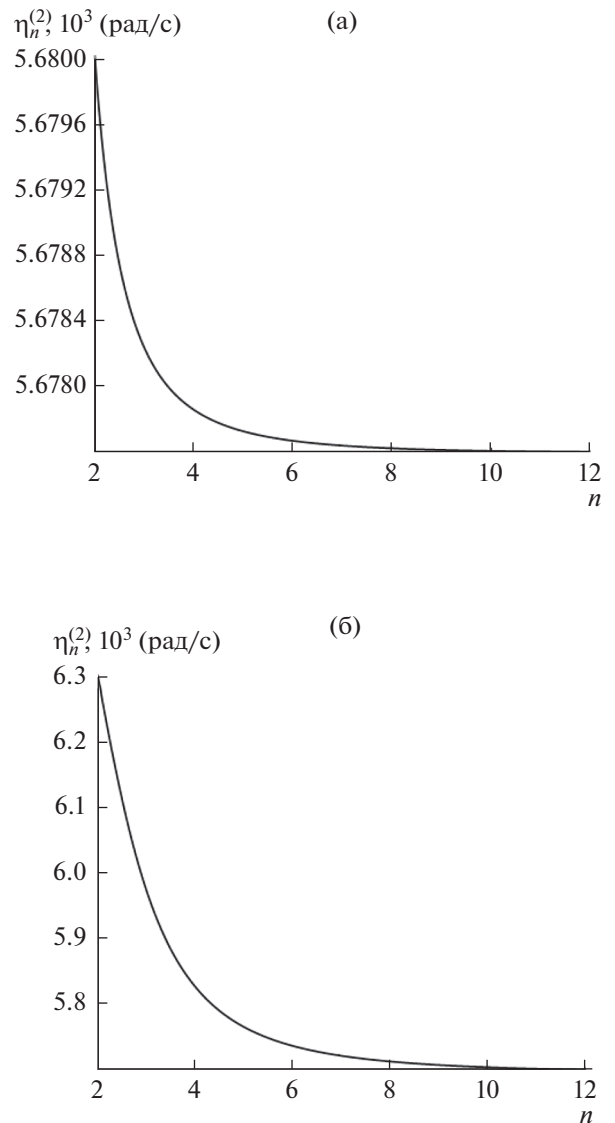
Интересно сравнить между собой графики затухающих волн на поверхности капель, различающихся лишь номерами мод возбужденных волн на одном и том же временном интервале, при прочих равных условиях. На рис. 5а, 5б приведены графики, аналогичные изображенному на рис. 4а, но рассчитанные для разных мод на большем временном интервале: для основной моды при  $n = 2$  и для  $n = 10$ . Несложно видеть, что, несмотря на внешние различия, качественно графики выглядят одинаково, различаясь лишь периодами осцилляций. Удивление вызывает то обстоятельство, что к концу использованного при расчетах к



**Рис. 5.** Зависимость от времени  $t$  амплитуд различных мод возмущения равновесной формы заряженной капли радиуса  $R = 30$  мкм и зарядом  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ ( $\sim 2 \times 10^{-3} Q_{кр}$ ). Расчеты проведены при:  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $\sigma_0 = 73$  дин/см,  $\sigma_\infty = 91$  дин/см,  $\sigma^* = 18$  дин/см,  $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$  с: (а)  $n = 2$ ; (б)  $n = 10$ .

рис. 5а и 5б периода времени амплитуды и второй, и десятой мод визуально одинаковы. В этой связи рассчитаны по (46) графики зависимости декремента затухания от номера моды. Они приведены на рис. 6а, 6б. Оказалось, что искомая зависимость весьма слаба.

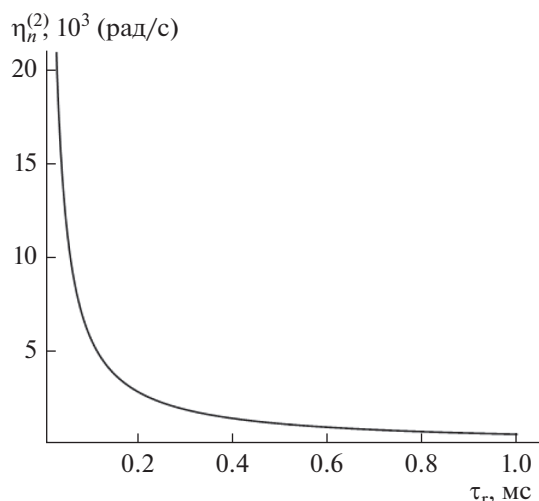
На рис. 7 приведена зависимость инкремента затухания от характерного времени релаксации поверхностного натяжения  $\tau_r$ , рассчитанная по (46). Видно, что декремент затухания тем больше, чем меньше величина  $\tau_r$  по примерно гиперболическому закону.



**Рис. 6.** Зависимость от номера моды  $n$  декремента затухания  $\eta_{10}^{(2)}$  капиллярных осцилляций капли. Расчеты проведены при  $\epsilon_{ex} = 1$ ,  $\rho_1 = 1$  г/м<sup>3</sup>,  $\rho_2 = 1.3 \times 10^{-3}$  г/м<sup>3</sup>,  $\sigma_0 = 73$  дин/см,  $\sigma_\infty = 91$  дин/см,  $\sigma^* = 18$  дин/см,  $\tau_r = 1 \times 10^{-4}$  с: (а) внутриоблачной капли радиуса  $R = 30$  мкм и зарядом  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ; (б) дождевой капли с радиусом  $R = 0.025$  см и зарядом  $Q = 7 \times 10^{-4}$  СГСЭ.

### 5. ОБСУЖДЕНИЕ ПОЛУЧЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Естественно задаться вопросом, к каким последствиям приведет описанная выше картина быстрого затухания осцилляций (рис. 4г) при  $|\eta_{10}^{(2)}| / \text{Re } \omega_{10}^{(2)} \sim 1$ .



**Рис. 7.** Зависимость декремента затухания  $\eta_{10}^{(2)}$  капиллярных осцилляций капли радиуса  $R = 10$  мкм с зарядом  $Q = 2 \times 10^{-5}$  СГСЭ ( $\sim 6 \times 10^{-3} Q_{кр}$ ) от характерного времени релаксации  $\tau_r$ , построенная при тех же значениях физических величин, что и на рис. 1.

Очевидно, что картина затухания волны в течение одного периода объясняется ростом декремента затухания. Согласно (45) декремент затухания  $\eta \equiv \omega_n'$  увеличивается с ростом номера моды осцилляций  $n$  примерно пропорционально  $n$  и убывает с увеличением радиуса капли  $R$  пропорционально  $R^{3/2}$ .

Примем, что на поверхности капли существует высокочастотная капиллярная волна большой (нетепловой) амплитуды, возникающая из-за столкновения с другой каплей, которая может разрушить упорядоченность приповерхностных диполей. За характерное время релаксации поверхностного натяжения упорядоченность восстановится. Пройдет время, много большее, чем время релаксации, когда амплитуда новой капиллярной волны вырастет до необходимой величины, чтобы разрушить упорядоченность диполей (или произойдет новое столкновение с другой каплей). При этом поверхностная энергия жидкости возрастет, а потом снова упорядоченность восстановится и т.д. Таким образом, образуется серия в общем случае нерегулярных снижений и повышений величины коэффициента поверхностного натяжения, иными словами, включается эффективный источник затухания амплитуд капиллярных осцилляций, связанный с разрушением упорядоченности полярных молекул жидкости в приповерхностном слое.

Как отмечалось во введении, упорядочение диполей приповерхностных молекул происходит из-за взаимодействий молекулярных квадрупо-

лей с диполями молекул. При разупорядочивании диполей за время порядка характерного времени межмолекулярных взаимодействий исчезает энергия электрического взаимодействия квадруполей с диполями, фактически в результате перемешивания молекул исчезает квадрупольный момент капли. Значит, электромагнитное излучение, связанное с разрушением упорядоченности, будет квадрупольным, которое существенно ниже дипольного [23, 24].

Интересно, что любое столкновение выделенной капли с другой или появление высокочастотной волны значительной амплитуды сразу же вызывает разрушение упорядоченности диполей на поверхности капли и появление электромагнитного импульса. Для появления еще одного подобного события нужно следующее столкновение или появление высокочастотной волны значительной амплитуды, причем эта волна должна иметь период  $T$ , удовлетворяющий условию  $T \leq \tau_r$ , тогда упорядоченность будет гарантированно разрушена (рис. 4г).

А теперь можно ответить на вопрос, сформулированный в заголовке этой работы: как происходит превращение энергии при наличии динамического поверхностного натяжения. Начнем с соударения капель, в котором механическая энергия соударения переходит в механическую энергию капиллярной волны на поверхности капли, разрушающую, в свою очередь, упорядоченное расположение молекулярных диполей на поверхности капли. При этом механическая энергия волны и энергия вандерваальсова взаимодействия соседних молекул воды идут на создание электромагнитного импульса (за счет электрической энергии взаимодействия квадруполей с диполями, высвобождающейся при разрушении электрического квадруполя капли) и на выработку тепла (за счет вязкости жидкости, не учитываемой в проведенном рассмотрении). Затем за малое время, порядка характерного времени межмолекулярного взаимодействия, упорядоченность молекулярных диполей самопроизвольно восстанавливается, поскольку этот процесс сопровождается переходом системы в положение с меньшей потенциальной энергией, в котором капля остается до следующего столкновения с другой каплей или частицей.

Встает простой, но закономерный вопрос: а почему капиллярное движение на поверхности капли идеальной жидкости вообще затухает? Если взять коэффициент поверхностного натяжения не динамическим, а обычным, то затухания (в использованной модели идеальной жидкости) не будет. Напрашивается вывод, что проблема в том, что мы выбрали коэффициент поверхностного натяжения в виде (42), где выражение (42) учитывает возможность перестройки приповерх-

ностного слоя жидкости, которая сопровождается преобразованием энергии.

Возникает еще один вопрос: будет ли выполняться постоянство электрического потенциала при осцилляциях капли?

Сравним между собой характерное время электрической релаксации и характерное время гидродинамической релаксации.

Характерное время электрической релаксации  $\tau_\chi$  — время, за которое амплитудное значение флуктуации электрического потенциала или заряда уменьшится за счет электропроводности в  $e$  раз, имеет вид [25, с. 27]:

$$\tau_\chi \equiv \varepsilon/\chi, \quad (49)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость жидкости,  $\chi$  — удельная электропроводность жидкости.

Оценим  $\tau_\chi$  для дождевой воды количественно. Для оценки диэлектрическую проницаемость воды примем  $\varepsilon = 81$ , а удельную электропроводность согласно данным Интернета  $\chi \sim 100\text{--}1300$  мкСм/см. Впрочем, верхний предел электропроводности воды в зависимости от ее минерализации может быть еще на порядок больше. Это согласуется с [25, с. 531]. В связи со сказанным, примем для оценки  $\chi \sim 10^3$  мкСм/см или  $\chi = 9 \times 10^9$  с<sup>-1</sup> и получим по (49)  $\tau_\chi \sim 10^{-8}$  с.

Характерное время выравнивания давления в капле  $\tau_g$  (характерное время гидродинамической релаксации) оценим как отношение радиуса капли  $R$  к скорости звука в воде. Принимая  $R \sim 1$  мм, а скорость звука в воде  $c \sim 1000$  м/с получим  $\tau_g \sim 10^{-7}$  с.

Таким образом, потенциал поверхности капли будет успевать выравниваться при ее осцилляциях и его можно принимать постоянным.

Если взять удельную электропроводность на порядок больше:  $\chi \sim 10^4$  мкСм/см, то получим  $\tau_\chi \sim 10^{-9}$  с.

Следовательно, можно снизить радиус капли, у которой электрический потенциал выравнивается быстрее гидродинамического давления, до  $R \sim 30$  мкм.

Из проведенных оценок вытекает, что предлагаемый в работе механизм разрушения и восстановления упорядоченности диполей в приповерхностном слое работает тем лучше, чем больше размер капли. Для дождевых капель он будет работать.

Следует отметить, что особенности релаксационного затухания осцилляций мелких капель с  $R \leq 1$  мкм требуют отдельного рассмотрения, поскольку для капель столь малых размеров включается “масштабный” эффект [22]. Безразмерная вязкость (если уйти от идеальной жидкости) капли зависит не только от величины коэффициента кинематической вязкости, но и от ее

размера, величины коэффициента поверхностного натяжения и массовой плотности в безразмерных переменных, в которых  $\rho = \sigma = R = 1$ . Осцилляции имеют место, когда безразмерная комбинация:

$\mu \equiv v \sqrt{\frac{\rho}{\sigma R}}$  (безразмерный коэффициент кинематической вязкости) удовлетворяет неравенству  $\mu \ll 1$ , а сами осцилляции подавляются вязкостью уже при  $\mu \sim 1$  [22].

В заключение скажем несколько слов о принятой при расчетах модели идеальной жидкости. Такую модель мы приняли, чтобы выделить вклад в затухание капиллярных волн именно перестройки приповерхностного двойного электрического слоя, чтобы он не затухал затуханием из-за вязкости в объеме вязкой жидкости. Идея такого подхода была высказана в [26], где впервые была оценена интенсивность электромагнитного излучения от осциллирующей заряженной капли: декремент затухания осцилляций капли идеальной жидкости целиком определялся ее энергопотерями на излучение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для заряженной проводящей капли учет механизма релаксации поверхностного натяжения приводит к появлению затухающих капиллярных осцилляций так, что с увеличением размера капли возрастает декремент затухания. Затухание связано с непериодическим изменением упорядоченности полярных молекул в приповерхностном слое жидкости, причем характерное время затухания по порядку величины совпадает с экспериментально измеряемым [9]. Эффект динамического поверхностного натяжения оказывает заметное влияние на спектр капиллярных осцилляций облачных капель. Высокочастотные высокоэнергичные капиллярные волны большой амплитуды гасятся динамическим поверхностным натяжением, точнее их энергия превращается в другие виды энергии: тепловую, энергию электромагнитного излучения и т.п. Таким образом, динамическое поверхностное натяжение обеспечивает превращение механической энергии капиллярных волн в другие ее формы.

## ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 19-19-00598 “Гидродинамика и энергетика капли и капельных струй: формирование, движение, распад, взаимодействие с контактной поверхностью”, <https://rscf.ru/project/19-19-00598/>).

## КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы заявляют, у них нет конфликта интересов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rayleigh Lord*. On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* 1882. V. 14. № 87. P. 184–186.  
<https://doi.org/10.1080/14786448208628425>
2. *Kim O.V., Dunn P.F.* Controlled production of droplets by in-flight electrospraying // *Langmuir*. 2010. V. 26. P. 15807–15813.  
<https://doi.org/10.1021/la102793j>
3. *Karyappa R.B., Deshmukh S.D., Thakkar R.M.* Breakup of a conducting drop in a uniform electric field // *J. Fluid Mech.* 2014. V. 754. P. 550–589.  
<https://doi.org/10.1017/jfm.2014.402>
4. *Кустович А.В., Чашечкин Ю.Д.* Поверхностные колебания свободно падающей капли идеальной жидкости // *Известия РАН. ФАО*. 2018. Т. 54. № 2. С. 1–7.  
<https://doi.org/10.7868/S0003351518020095>
5. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* Нелинейные монополярное и дипольное акустические излучения слабо заряженной капли, осциллирующей в однородном электростатическом поле // *ПММ*. 2022. № 6. С. 936–955.  
<https://doi.org/10.31857/S003282352260066>
6. *Owens D.K.* The dynamic surface tension of sodium dodecyl sulfate solutions // *J. Colloid Interface Sci.* 1969. V. 29. № 3. P. 496–501.
7. *Kochurova N.N., Rusanov A.I.* Dynamic surface properties of water: Surface tension and surface potential // *J. Colloid Interface Sci.* 1981. V. 81. № 2. P. 297–303.
8. *Кочурова Н.Н., Русанов А.И.* Релаксация поверхностных свойств водных растворов поверхностно-активных веществ и механизм адсорбции // *Успехи химии*. 1993. Т. 62. № 12. С. 1150–1163.
9. *Hauner I.M., Deblais A., Beattie J.K., Kellay H., Bonn D.* The dynamic surface tension of water // *Phys. Chem. Lett.* 2017. V. 8. P. 1599–1603.
10. *Гирс С.П.* Влияние границы раздела вода-воздух на зарядение облачных капель // *Сб. Поверхностные явления в жидкостях и жидких растворах*. Л.: Изд. ЛГУ, 1972. С. 181–183.
11. *Френкель Я.И.* Теория явлений атмосферного электричества. Л.-М.: ГОСТЕХТЕОРИЗДАТ, 1949.
12. *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкостей. Л.: Наука, 1975.
13. *Тверской П.Н.* Курс метеорологии. Физика атмосфер. Л.: Гидрометеиздат, 1962.
14. *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983.
15. *Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М.* Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1989.
16. *Стерлядкин В.В.* Натурные измерения колебаний капель осадков // *Изв. АН СССР. Сер. ФАО*. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
17. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. М.: Наука, 1986.
18. *Найфе А.Х.* Методы возмущений. М.: Мир, 1976.
19. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
20. *Быковский Ю.А., Маныкин Э.А., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г.* Спектр поверхностных колебаний жидкости с учетом релаксационных эффектов // *ЖТФ*. 1976. Т. 46. № 10. С. 2211–2216.
21. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974.
22. *Григорьев А.И.* О некоторых закономерностях реализации неустойчивости сильно заряженной вязкой капли // *ЖТФ*. 2001. Т. 71. № 10. С. 1–7.
23. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1973.
24. *Григорьев А.И., Колбнева Н.Ю., Ширяева С.О.* Квадрупольное электромагнитное излучение заряженной капли, осциллирующей в суперпозиции коллинеарных гравитационного и электростатического полей // *Изв. РАН. МЖГ*. 2019. № 5. С. 70–82.
25. *Стреттон Дж. А.* Теория электромагнетизма. ОГИЗ-Гостехиздат, 1948.
26. *Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П.* О возможном механизме радиоизлучения конвективных облаков // *ДАН СССР*. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.