

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА K -СРЕДНИХ ДЛЯ АГРЕГИРОВАНИЯ МАСС ПРОДОЛГОВАТЫХ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

© 2019 г. А. А. Буров^{1,2}, А. Д. Герман³, В. И. Никонов^{1,2,3, *}

¹Исследовательский центр “Информатика и управление” РАН, г. Москва, Россия

²Национальный исследовательский университет “Высшая школа экономики”, г. Москва, Россия

³Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, University of Beira Interior, Covilhã, Portugal

*nikon_v@list.ru

Поступила в редакцию 18.01.2018 г.

После доработки 09.06.2018 г.

Принята к публикации 20.09.2018 г.

В рамках подхода, опирающегося на так называемый метод K -средних, изучаются возможности приближения гравитационного потенциала небесных тел нерегулярной формы в виде потенциала трех гравитирующих шаров. Такие распределения построены для астероидов (2063) Бахус, (216) Клеопатра и (433) Эрос. Выполняется сопоставление предлагаемых моделей с моделями, представленными в рамках других подходов [1–3].

DOI: 10.1134/S0023420619040022

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что многие малые небесные тела отличаются нерегулярностью формы, а потому — и нерегулярностью в распределении масс, что усложняет решение задач механики космического полета в их окрестности. Для приближенного описания их притяжения было предложено использовать их представления в виде совокупности некоторого небольшого числа простейших тел. Так, в [4–7] (см. также [8–12]) такое приближение осуществлялось с помощью пары однородных шаров (“гантель Белецкого”). Также известны случаи приближения астероидов тройками и четверками таких шаров или точек [1–3]. Кроме того, активно изучались возможности использования для нужд оценки притяжения тел неправильной формы тонких однородных стержней (см., например, [13–16]). Удастся исследовать [17–19] некоторые особенности динамики в окрестности таких объектов.

Параметры получаемых таким образом приближенных систем, как правило, определяют из сравнения асимптотик их потенциалов с асимптотиками потенциалов тел, полученных с помощью триангуляции их поверхностей [20] (см. также, например, [21–26]).

Возможны разные подходы для восстановления потенциала сил притяжения с помощью разумного агрегирования компонент тела по точкам

поверхности, доступным для наблюдения. Как правило, они опираются на методы, предложенные в [21, 22]. В настоящей работе обсуждается возможность применения для таких нужд т.н. метод K -средних, известного из теории распознавания образов и опирающегося на идеи выдающегося польского математика Х. Штейнгауза [27].

1. ТЕОРИЯ ШТЕЙНГАУЗА

Пусть A — множество, состоящее из материальных точек одинаковой массы, каким-то образом расположенных в трехмерном евклидовом пространстве. В [27] Х. Штейнгаузом был предложен следующий подход к разбиению этого множества A на N подмножеств, “максимально удаленных друг от друга”¹.

Разобьем множество A на три непересекающихся подмножества A_1, A_2, A_3 . Определим их центры масс (центроиды) — C_1, C_2, C_3 . Вычислим расстояния $\rho_{jk} = |C_j C_k|$, $j \neq k$ и найдем минимальное из этих расстояний:

$$\rho = \min \{\rho_{12}, \rho_{23}, \rho_{31}\}.$$

¹ На протяжении работы рассматривается случай $N = 3$. Случаи других значений N рассматриваются аналогично.

Запомним эту величину и выполним такую же процедуру для всех возможных разбиений множества A на три непересекающихся подмножества. Число таких разбиений конечно, поэтому среди запомненных на каждом шаге величин выберем ту, значение ρ для которой максимально. Отвечающее этому значению разбиение на три непересекающихся подмножества будем считать искомым.

Замечание. Найденному максимальному значению ρ могут отвечать различные разбиения множества A на непересекающиеся подмножества. Например, для любого разбиения тонкой однородной палочки на два связанных подмножества расстояние между центрами масс подмножеств составит половину длины палочки².

Для трех подмножеств можно предложить следующий пример: рассмотрим однородную тонкую проволочку, согнутую в виде окружности. Имеется континуум способов разбиения этой окружности на три равные дуги. Любое такое разбиение будет удовлетворять условию максимизации минимального расстояния между центрами масс подмножеств. При этом означенный максимум из минимальных расстояний составит $\sqrt{3}$ радиусов окружности.

Замечание. Если тело A состоит из частичек разных масс, то из них можно выделить минимальную массу, а остальные массивные геометрически идентичные точки считать как кратные: если в точке P_* сосредоточена масса $m \cdot k$, то считать, что в ней располагается k частичек массы m .

Замечание. Если характерные размеры тела a , b и c таковы, что

$$a > b > c,$$

то приближение шарами вполне осмысленно, если тело сильно вытянуто вдоль a : $a - b \gg b - c$. Если же выполнено неравенство противоположного смысла $a - b \ll b - c$, то вопрос о приближении такого тела шарами требует дальнейших размышлений (см., например, [11, 12, 28]).

2. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА

Пусть масса астероида распределена равномерно. Тогда его плотность постоянна, и вместо масс в дальнейшем можно будет говорить об объемах. Предположим, что выполнена триангуляция поверхности астероида: построен аппроксимирующий ее многогранник, заданный набором вершин и набором треугольных граней. Так, на рис. 1а–3а изображены соответственно триангуляции поверхностей астероидов (2063) Бахус (на основании данных из [29]), (216) Клеопатра (на

основании данных из [30]) и (433) Эрос (на основании данных из [31, 32]).

Так как поверхность небесного тела ориентирована, то на треугольной сетке можно ввести согласованную ориентацию: будем считать, что из конца отвечающей треугольнику *внешней* нормали обход треугольника виден против часовой стрелки. Тогда *объем* триангулированного астероида равен сумме ориентированных объемов тетраэдров T_k с вершиной в, вообще говоря, произвольной фиксированной точке O и с основаниями в треугольниках из триангуляционной сетки. Множество таких тетраэдров обозначим $T = \bigcup_k T_k$.

Центр масс триангулированного астероида можно, например, определить следующим образом: центр масс C_k каждого тетраэдра $T_k \in T$ располагается на отрезке, соединяющем точку пересечения медиан основания с вершиной O , и делит этот отрезок в отношении 3 : 1, считая от вершины (см., например, [33], пункт 223. Тетраэдр). Найденной таким образом точке C_k поставим в соответствие величину V_k — ориентированный объем рассматриваемого тетраэдра. Тогда центр масс триангулированного астероида — точка V — определяется стандартным образом:

$$\overline{OC} = \frac{1}{V} \sum_k V_k \overline{OC_k}, \quad V = \sum_k V_k.$$

Замечание. Для определения положения центров масс небесных тел часто используется подход, опирающийся на результаты [34], касающиеся геометрии масс тетраэдра (см. также [35]). Подход, применяемый в настоящей работе, геометрически идентичен указанному и отличается лишь формой геометрического представления.

Покажем, как с помощью алгоритма, предложенного в [36], можно приближенно определить разбиение множества точек астероида на три непересекающиеся составляющие таким образом, чтобы они были максимально (в смысле Штейнгауза) удалены друг от друга.

Пусть P — совокупность центроидов $\{C_k\}$ с приписанными им ориентированными объемами соответствующих тетраэдров (ср. [37, 38]). В качестве первого шага выделим из множества P пару точек P_1 и P_2 максимально удаленных друг от друга.

Далее, определим точку P_3 максимально удаленную от P_1 и P_2 :

$$\min(|P_1 P_3|, |P_2 P_3|) \geq \max_{P \in P \setminus \{P_1 \cup P_2 \cup P_3\}} \min(|P_1 P|, |P_2 P|).$$

Разобьем множество P на три непересекающихся подмножества P_1 , P_2 и P_3 следующим образом:

² Проф. С.Я. Степанов: частное сообщение.

Таблица 1. Физические характеристики астероида

Название	Масса (в кг)	Плотность, кг м ⁻³	Период вращ.	Размеры (в км)
(2063) Бахус [29]	$3.2 \cdot 10^{11}$	2000	14 ч 54 мин	$1.11 \times 0.57 \times 0.57$
(216) Клеопатра [30]	$2.48 \cdot 10^{18}$	3600	5 ч 23 мин	$217 \times 94 \times 81$
(433) Эрос [31]	$6.69 \cdot 10^{15}$	2670	5 ч 16 мин	$34.4 \times 11.2 \times 11.2$

Таблица 2. Характеристики моделей астероидов. R_1 , R_2 и R_3 – радиусы аппроксимирующих шаров

	Многогранник		Тройка шаров (в метрах)					
	вершины	границы	R_1	R_2	R_3	$ S_1S_2 $	$ S_2S_3 $	$ S_3S_1 $
(2063) Бахус	2048	4092	219	232	211	555	264	300
(216) Клеопатра	2048	4092	41801	40944	30203	133671	59332	74641
(433) Эрос	856	1708	5631	6151	5683	17983	9897	8783

пробную точку из P отнесем к P_i , если эта точка располагается ближе всего к точке P_i , $i = 1, 2, 3$:

$$|PP_i| < |PP_k|, \quad k \in \{1, 2, 3\} \setminus i.$$

Замечание. Подмножества P_1 , P_2 и P_3 будут непересекающимися, если следовать, например, следующим правилам: пусть пробная точка P равноудалена от P_1 и P_2 , располагаясь при этом на строго большем расстоянии от P_3 :

$$|PP_1| = |PP_2| < |PP_3|.$$

Тогда такую точку P поместим в подмножество P_1 . Правило для оставшихся двух случаев, когда пробная точка P равноудалена от точек P_2 и P_3 или P_3 и P_1 получим из предыдущего правила циклической перестановкой индексов. Пробные точки равноудаленные от всех P_i , $i = 1, 2, 3$ для определенности будем помещать в подмножество P_1 .

Далее, вычислим центры масс S_1 , S_2 и S_3 множеств P_1 , P_2 и P_3 соответственно. Если расстояния $|S_iP_i|$ достаточно малы для всех $i = 1, 2, 3$, то приходим к искомому разбиению.

В противном случае, в качестве точек P_1 , P_2 и P_3 принимаем точки S_1 , S_2 и S_3 , соответственно, и повторяем процесс разбиения множества P на подмножества P_1 , P_2 и P_3 .

Замечание. Предложенный алгоритм допускает несложную геометрическую интерпретацию. Для пары точек P_1 и P_2 построим плоскость Π_3 , перпендикулярную отрезку P_1P_2 и проходящую через его середину. Такие же плоскости Π_1 и Π_2 построим для двух оставшихся отрезков. Эти три плоскости пересекаются по прямой ℓ – общему ребру трех двугранных углов, внутри каждого из

которых содержится ровно одна из точек P_i . Вместе с этой точкой внутри указанных двугранных углов содержатся в основном (с точностью до описанного выше правила обработки точек, равноудаленных от двух данных) все точки искомого промежуточных подмножеств.

Замечание. Согласно применяемому алгоритму длина минимальных сторон возникающих треугольников возрастает. Ясно, что эта величина ограничена сверху, чем обеспечивается сходимость алгоритма за конечное число шагов (см. [36, 39], где также показано что в течении работы алгоритма никакое разбиение не повторяется дважды).

Каждому из множеств P_1 , P_2 и P_3 можно поставить в соответствие шар, объем которого равен суммарному объему соответствующего множества, а центр располагается в центре масс S_i , $i = 1, 2, 3$ этого множества. В дальнейшем эти шары будут использованы преимущественно для наглядного представления расположения и размеров подмножеств P_1 , P_2 и P_3 .

3. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА К МОДЕЛЯМ АСТЕРОИДОВ (2063) БАХУС, (216) КЛЕОПАТРА, (433) ЭРОС

Рассмотрим упомянутые выше конечноэлементные модели астероидов (2063) Бахус, (216) Клеопатра и (433) Эрос, в рамках которых астероиды приближаются однородными многогранниками, задаваемыми наборами вершин треугольных граней [29–31] (табл. 1 и 2).

На рис. 16, 26 и 36 с помощью различных тонов представлены получившиеся в результате применения описанного выше алгоритма разбиения соответствующих астероидов на три непере-

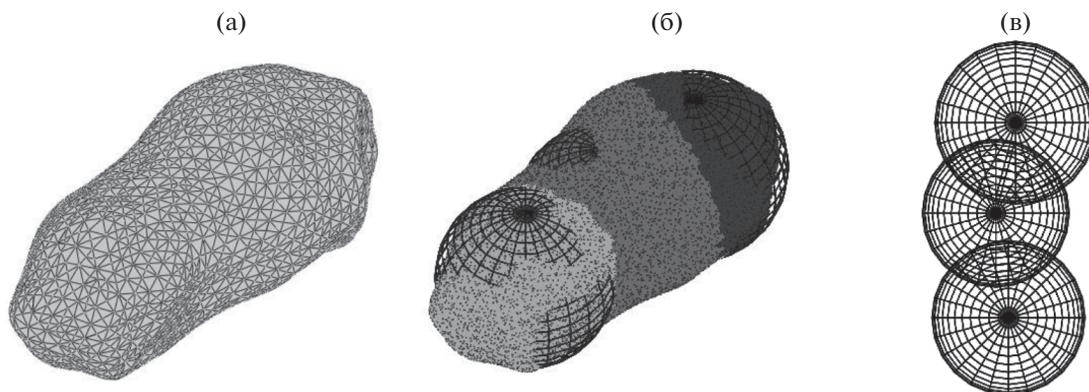


Рис. 1. (2063) Бахус.

секающихся подмножества, а также изображены вычисленные тройки аппроксимирующих шаров.

Замечание. Для ряда астероидов, в том числе — для астероида (216) Клеопатра, представление гравитационного поля как поля притяжения “диполя”³ получено в [10].

Было показано, что параметры приближающей гантели таковы: массы притягивающих точек $m_1' = 1.329580469 \cdot 10^{18}$ и $m_2' = 1.258652532 \cdot 10^{18}$ кг, расстояние между ними $\ell' = 122997$ м. Гантелеобразная модель того же астероида, построенная с помощью метода K — средних была предложена в [40]. Параметры этой модели таковы: массы шаров $m_1 = 1.2454 \cdot 10^{18}$ и $m_2 = 1.3064 \cdot 10^{18}$ кг, радиусы шаров $R_1 = 43549$ и $R_2 = 44249$ м, расстояние между центрами $\ell = 117800$ м.

Интересно, что полученные параметры обеих моделей близки друг к другу:

$$\delta_1 = \frac{|m_1 - m_1'|}{(m_1 + m_1')/2} \approx 0.0654,$$

$$\delta_2 = \frac{|m_2 - m_2'|}{(m_2 + m_2')/2} \approx 0.0372,$$

$$\delta_\ell = \frac{|\ell - \ell'|}{(\ell + \ell')/2} \approx 0.0432.$$

Замечание. Исследования по представлению астероидов в виде композиции трех шаров, вероятно, восходят к работе [3], где такие шары искались “методом скелетонизации” ([3], стр. 120) в предположении о том, что они попарно касаются друг друга. Согласно этой работе, вычисленные для астероида (216) Клеопатра центры тройки ша-

ров располагаются на одной прямой, крайние шары равны, и их радиусы в два раза больше радиуса среднего шара.

В нашем исследовании три точки, в которых оказались сосредоточены массы подмножеств (“центры шаров”) образуют треугольник, стороны d_1, d_2, d_3 которого, удовлетворяют отношению $d_1 : d_2 : d_3 = 1 : 1.258 : 2.253$. Углы этого треугольника, лежащие против сторон с соответствующими номерами, составляют $\alpha_1 \approx 0.05986419570$ рад, $\alpha_2 \approx 0.07533678312$ рад и $\alpha_3 \approx 3.006391676$ рад. Нетрудно видеть, что тупой угол α_3 близок к развернутому. Радиусы шаров, вычисленные по описанной выше методике, относятся как $1.384 : 1 : 1.356$, при этом массы выделенных подмножеств составляют $m_I = 1.1014 \cdot 10^{18}$ кг, $m_{II} = 1.035 \cdot 10^{18}$ кг и $m_{III} = 4.1547 \cdot 10^{17}$ кг (ср. с распределением масс для модели двух шаров, обсуждавшейся выше)⁴.

Для астероида (216) Клеопатра схема расположения центров шаров в рамках изучаемой модели трех шаров и модели двух шаров (см. [40]) представлена на рис. 4.

Замечание. Предложенное в работе [3] представление тела нерегулярной формы в виде совокупности малого числа шаров, будучи удивительно наглядным, тем не менее, требует сопоставления свойств центрального тензора инерции в возникающей модели с реальным тензором инерции, оцениваемым хотя бы приближенно с помощью непосредственных вычислений (см., например, [34]). Все это в полной мере относится и к настоящему исследованию. Именно поэтому представление вычисленных подмножеств шарами без надлежащего сравнительного анализа носит в данной работе преимущественно иллюстративный характер.

³ В русской номенклатуре для таких объектов употребляется понятие “гантель”, в то время как понятие “диполь” имеет совершенно другой смысл, происходящий из физики: диполь образует пара равных по величине зарядов противоположного знака.

⁴ В настоящей работе, как и в [10, 30, 41], масса этого астероида предполагалась равной $2.59 \cdot 10^{18}$ кг.

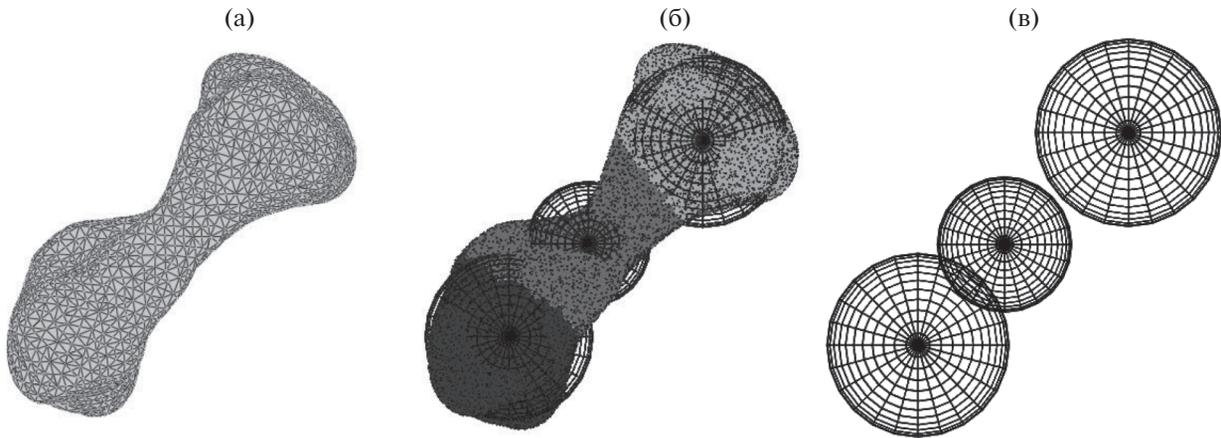


Рис. 2. (216) Клеопатра.

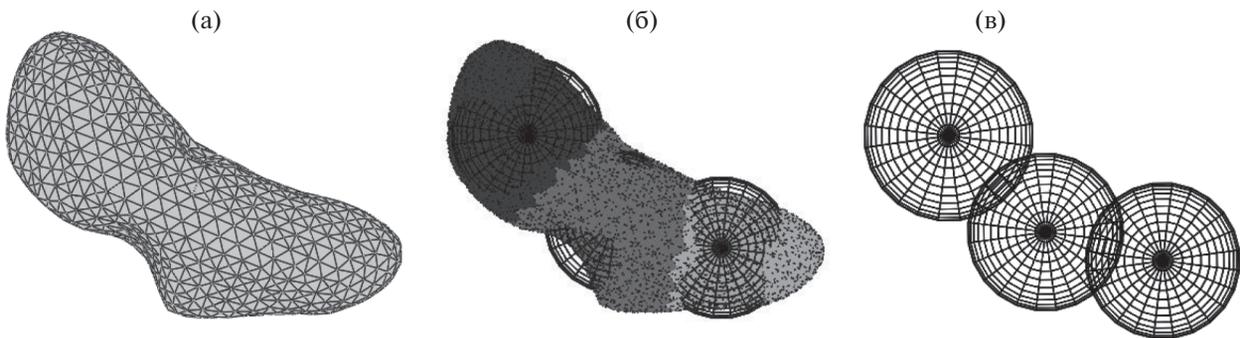


Рис. 3. (433) Эрос.

Замечание. Представления полей притяжения небесных тел с нерегулярным распределением масс в виде совокупности двух или трех притягивающих центров содержат симметрии, не присущие гравитационным полям исходных небесных тел. Так, гравитационное поле двух притягивающих центров динамически симметрично, а гравитационное поле трех притягивающих центров обладает плоскостью симметрии. Понятно, что у реальных тел такие симметрии в общем случае не наблюдаются. В связи с этим возникает естественная потребность представления гравитационного поля притяжения небесных тел с нерегулярным распределением масс с помощью совокупности как минимум четырех притягивающих центров.

Замечание. На рис. 1–3 встречаются ситуации, когда изображающие шары пересекают друг друга, и формально говоря, к ним можно было бы применить подход, развивавшийся в [42]. Однако такое применение, вообще говоря, нецелесообразно, так как шары приближают подмножества, в общем случае не имеющие общих точек. Наличие в некоторых случаях пересечения изображающих шаров, равно как и наличие в других случаях зазоров между изображающими шарами требует дальнейшего осмысления с точки зрения

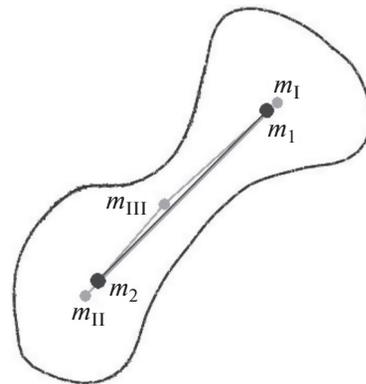


Рис. 4. (216) Клеопатра. Представление в виде гантели из [40] и треугольника, сравнение расположения центров шаров.

выработки подходящей формы наглядного представления результатов.

Замечание. В настоящей работе, как и в цитируемых выше работах других авторов, молчаливо предполагается, что изучаемое тело однородно. Дальнейшие уточнения используемых моделей для однородных тел могут опираться, например, на приближение поверхности с помощью т.н.

лоскутов Безье (см., например, [43]). Однако предположение об однородности тела весьма обременительно и крайне затрудняет верификацию модели в отсутствие натуральных экспериментов. Использование моделей, опирающихся на предположение о линейной зависимости плотности [44], также не дает гарантий относительно качества приближения гравитационных полей конкретных тел. Возможно, такое уточнение может быть реализовано с помощью специальных геофизических методов, что составляет предмет отдельного исследования.

Авторы благодарят анонимного рецензента, мнение которого способствовало существенному улучшению настоящей работы. Они также благодарят С.Я. Степанова за поучительные беседы.

Работа выполнена частично при поддержке РФФИ, грант 16-01-00625а, а также грант EMaDeS (Centro-01-0145-FEDER-000017), the Portuguese Foundation for Science and Technologies via Centre for Mechanical and Aerospace Science and Technologies, C-MAST (POCI-01-0145-FEDER-007718).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Herrera-Sucarrat E., Palmer P.L., Roberts R.M.* Modeling the Gravitational Potential of a Nonspherical Asteroid // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. V. 36. № 3. P. 790–798.
2. *Turconi A., Palmer Ph., Roberts M.* Efficient Modelling of Small Bodies Gravitational Potential for Autonomous Proximity Operations / Ed. Gómez G., Masdemont J.J. // *Astrodynamic Network AstroNet-II, Astrophysics and Space Science Proceedings 44*. Switzerland: Springer. 2016. P. 257–272.
3. *Herrera-Sucarrat E.* The full problem of two and three bodies: application to asteroids and binaries. PhD Thesis. University of Surrey, 2012.
4. *Белецкий В.В., Пономарева О.Н.* Параметрический анализ устойчивости относительного равновесия в гравитационном поле // *Космич. исслед.* 1990. Т. 28. № 5. С. 664–675. (*Cosmic Research*. P. 573).
5. *Белецкий В.В.* Обобщенная ограниченная круговая задача трех тел как модель динамики двойных астероидов // *Космич. исслед.* 2007. Т. 45. № 6. С. 435–442. (*Cosmic Research*. P. 408).
6. *Белецкий В.В., Родников А.В.* Об устойчивости треугольных точек либрации в обобщенной ограниченной круговой задаче трех тел // *Космич. исслед.* 2008. Т. 46. № 1. С. 42–50. (*Cosmic Research*. P. 40).
7. *Родников А.В.* Треугольные точки либрации обобщенной ограниченной круговой задачи трех тел в случае комплексно-сопряженных масс притягивающих центров // *Нелинейная динам.* 2014. Т. 10. Вып. 2. С. 213–222.
8. *Шорников А.Ю., Старинова О.Л.* Моделирование гравитационного поля сложной конфигурации // *Известия Самарского научного центра Российской академии наук.* 2015. Т. 17. № 2. 167–170.
9. *Shornikov A., Starinova O.* Boundary Problem Solution Algorithm for the Task of Controlled Spacecraft Motion in Irregular Gravitational Field of an Asteroid // *Procedia Engineering*. 2017. V. 185. P. 411–417.
10. *Zeng X., Jiang F., Li J. et al.* Study on the connection between the rotating mass dipole and natural elongated bodies // *Astrophys. Space Sci.* 2015. V. 356. № 1. P. 29–42.
11. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 1. Equilibria in the equator and their stability // *Astrophys. Space Sci.* 2016. V. 361. № 1. Art. 14.
12. *Zeng X., Baoyin H., Li J.* Updated rotating mass dipole with oblateness of one primary: 2. Out-of-plane equilibria and their stability // *Astrophys. Space Sci.* 2016. V. 361. № 1. Art. 15.
13. *Дубошин Г.Н.* Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел // *Астроном. журн.* 1959. Т. 36. № 1. С. 153–163.
14. *Bartczak Przemysław, Breiter Sławomir, Jusiel Przemysław.* Ellipsoids, material points and material segments // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2006. V. 96. № 1. P. 31–48.
15. *Pucacco J., Boccaletti D., Belmonte C.* On the orbit structure of the logarithmic potential // *Astrophys. J.* 2007. V. 669. P. 202–217.
16. *Bartczak P., Breiter S.* Double material segment as the model of irregular bodies // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2003. V. 86. № 4. P. 131–141.
17. *Каранетян А.В., Сахокия И.Д.* Бифуркации и устойчивость стационарных движений двух гравитирующих тел // *Прикладная математика и механика.* 1992. Т. 56. Вып. 2. С. 935–938.
18. *Riaguas A., Elipe A., Lara M.* Periodic orbits around a massive straight segment // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1999. V. 73. P. 169–178.
19. *Riaguas A., Elipe A., López-Moratalla T.* Non-linear stability of the equilibria in the gravity field of a finite straight segment // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2001. V. 81. № 3. P. 235–248.
20. *Hudson R.S.* Three-dimensional reconstruction of asteroids from radar observations // *Remote Sensing Reviews*. 1994. V. 8. № 1–3. P. 195–203.
21. *Werner R.A.* The gravitational potential of a homogeneous polyhedron or don't cut corners // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1994. V. 59. № 3. P. 253–278.
22. *Werner R.A., Scheeres D.J.* Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 1996. V. 65. № 3. P. 313–344.
23. *Werner R.A.* Spherical harmonic coefficients for the potential of a constant-density polyhedron // *Computers & Geosciences*. 1997. V. 23. № 10. P. 1071–1077.
24. *Park R.S., Werner R.A., Bhaskaran Sh.* Estimating Small-Body Gravity Field from Shape Model and Navigation Data // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2010. V. 33. № 1. P. 212–221.
25. *Takahashi Yu., Scheeres D.J., Werner R.A.* Surface Gravity Fields for Asteroids and Comets // *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2013. V. 36. № 2. P. 362–374.

26. *Takahashi Yu., Scheeres D.J.* Small body surface gravity fields via spherical harmonic expansions // *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 2014. V. 119. № 2. P. 169–206.
27. *Steinhaus H.* Sur la division des corps matériels en parties // *Bull. Acad. Polon. Sci.* 1956. V. 4. Cl.III. P. 801–804.
28. *Zeng X., Liu X., Li J.* Extension of the rotating dipole model with oblateness of both primaries // *Research in Astronomy and Astrophysics.* 2017. V. 17. № 1. P. 10.
29. *Benner L.A.M., Hudson R.S., Ostro S.J. et al.* Radar observations of asteroid 2063 Bacchus // *Icarus.* 1999. V. 139. P. 309–327.
30. *Ostro S.J., Hudson R.S., Nolan M.C. et al.* Radar observations of asteroid 216 Kleopatra // *Science.* 2000. V. 288 (5467). P. 836–839.
31. *Miller J.K., Konopliv A.S., Antreasian P.G. et al.* Determination of Shape, Gravity, and Rotational State of Asteroid 433 Eros // *Icarus.* 2002. V. 155. № 1. P. 3–17.
32. NEAR Collected Shape and Gravity Models // PDS Asteroid/Dust Archive. URL: <https://sbn.psi.edu/pds/resource/nearmod.html>
33. *Валле-Пуссен Ш.Ж.* Лекции по теоретической механике. Т. 1. М.: ИЛ, 1948.
34. *Dobrovolskis A.R.* Inertia of Any Polyhedron // *Icarus.* 1996. V. 124. № 2. P. 698–704.
35. *Mirtich B.* Fast and Accurate Computation of Polyhedral Mass Properties // *J. Graphics Tools.* 1996. V. 1. № 2. P. 31–50.
36. *Lloyd S.P.* Least squares quantization in pcm // *IEEE Transactions on Information Theory.* 1982. V. 28. № 2. P. 129–136.
37. *Chanut T.G.G., Aljbaae S., Carruba V.* Mascon gravitation model using a shaped polyhedral source // *Monthly Notices of Roy. Astr. Soc.* 2015. 450. P. 3742–3749.
38. Hitt D.L., Pearl J.M. Asteroid Gravitational Models Using Mascons Derived from Polyhedral Sources // SPACE Conferences and Exposition. 13–16 September 2016. Long Beach, California. AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference.
39. *Arthur D., Vassilvitskii S.* On the Worst Case Complexity of the k-means Method. Technical Report. Stanford: Stanford University, 2005.
40. *Буров А.А., Герман А.Д., Распопова Е.А., Никонов В.И.* О применении К-средних для определения распределения масс гантелеобразных небесных тел // *Нелинейная динамика.* 2018. Т. 14. № 1. С. 45–52.
41. Small Body Radar Shape Models V2.0. EAR-A-5-DDR-RADARSHAPE-MODELS-V2.0 / Ed. Neese C. NASA Planetary Data System, 2004. URL: <https://sbn.psi.edu/pds/resource/rshape.html>
42. *Буров А.А., Герман А.Д., Косенко И.И., Никонов В.И.* О притяжении гантелеобразных тел, представленных парой пересекающихся шаров // *Нелинейная динамика.* 2017. Т. 13. № 2. С. 243–256.
43. *Tereshchenko A.A., Zavizion O.V., Zheleznyak O.A.* Refinement of the approximation of celestial bodies' gravitational field using polyhedra // *Astronomical School's Report.* 2013. V. 9. № 2. P. 180–185.
44. *Pohánka V.* Optimum expression for computation of the gravity field of a polyhedral body with linearly increasing density // *Geophysical prospecting.* 1998. V. 46. № 4. P. 391–404.