

УДК 629.78

МНОГОВИТКОВЫЕ ПЕРЕЛЕТЫ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ОБНУЛЕНИЕМ МАЛОЙ ТЯГИ В ОБЛАСТИ ТЕНИ

© 2020 г. Р. З. Ахметшин*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия

*axmetro@yandex.ru

Поступила в редакцию 20.05.2019 г.

После доработки 17.06.2019 г.

Принята к публикации 19.09.2019 г.

Перелеты в центральном ньютоновском поле рассматриваются в предположении, что постоянная по величине малая тяга обнуляется при попадании в тень Земли. С помощью принципа максимума формируется двухточечная краевая задача, в которой, однако, не учитываются условия оптимального пересечения границ тени, которые существенно усложняют задачу. По этой причине краевая задача оказывается “неполной”, а ее решения — неоптимальными. Тем не менее, для перелетов на геостационарную орбиту с высокоэллиптических орбит она позволяет получать “хорошие” траектории, с затратами рабочего вещества меньшими, чем на траекториях без обнуления тяги, или несильно их превышающими. Это показано на примере перелетов с начальной орбиты с наклоном 13° и с расстоянием в перигее ≈ 15.6 и в апогее ≈ 83.2 тыс. км.

DOI: 10.31857/S0023420620040019

Вопрос учета влияния тени при проектировании многовитковых перелетов с малой тягой так или иначе затрагивался в различных публикациях. Одной из самых ранних работ, по-видимому, является [1], из более поздних — работы [2–7]. С целью получить хорошие по затратам рабочего вещества траектории используются как прямые методы — с параметрическим заданием функций управления и градиентным спуском в пространстве параметров [7], так и не прямые — с решением краевых задач. Из-за сложности последних обычно применяются какие-либо упрощения — используются локально-оптимальные или “квази-оптимальные” законы управления [4], численное осреднение уравнений движения [1, 4, 5]. В работе [4] предлагается управление с обратной связью, которое способно нивелировать различные возмущения, в том числе влияние тени.

“НЕПОЛНАЯ” КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

В данной работе, в отличие от вышеупомянутых, краевая задача решается в исходной постановке, без осреднения уравнений движения, как и в [8]. В работе [8] задача рассматривалась без учета влияния тени (и других возмущающих факторов) в двух постановках: (А) с возможностью многократного включения и выключения тяги, и (Б) с постоянно работающей, постоянной по величине малой тягой. А именно, рассматривалась задача оптимального многовиткового перелета

космического аппарата в центральном ньютоновском поле Земли с электроракетными двигателями малой тяги, с питанием от солнечных батарей. Управление КА осуществлялось с помощью вектора малой тяги. На направление тяги не накладывалось никаких ограничений. С использованием принципа максимума Понтрягина задача сводилась к двухточечной краевой задаче. Для этого вводились сопряженные переменные, формировался гамильтониан задачи, с его помощью находились выражения для оптимального направления вектора тяги, как функции фазовых и сопряженных переменных, и дифференциальные уравнения для фазовых и сопряженных переменных

$$dx/dt = F(x, \lambda, P), \quad d\lambda/dt = \Phi(x, \lambda, P),$$

где t — время, P — величина тяги, $x = \langle \varphi, m, h, y, z, v, w \rangle$ — вектор фазовых переменных, $\lambda = \langle \lambda_\varphi, \lambda_m, \lambda_h, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_v, \lambda_w \rangle$ — вектор сопряженных переменных. Здесь m — масса КА, а φ, h, y, z, v, w — равноденственные переменные, которые определяются через гравитационную постоянную Земли μ_E и оскулирующие переменные $p, e, \theta, \omega, \Omega, i$ формулами:

$$h = (\mu_E/p)^{1/2}, \quad y = e \cdot \cos(w + \Omega), \\ v = \cos \Omega \cdot \operatorname{tg}(i/2),$$

$$\varphi = \theta + \omega + \Omega, \quad z = e \cdot \sin(w + \Omega), \\ w = \sin \Omega \cdot \operatorname{tg}(i/2).$$

Задача сводилась к поиску начальных значений сопряженных переменных, которые обеспечили бы выполнение краевых условий в конечный момент времени. Таким образом получалась краевая задача в случае (Б). В случае (А), вдобавок к выражениям для оптимального направления тяги, была получена, также с помощью принципа максимума, т.н. функция переключения Sw , которая дает критерий для оптимальных моментов включения и выключения тяги: при $Sw < 0$ тяга нулевая, при $Sw > 0$ тяга максимальная (особые случаи не рассматривались).

В данной работе используется постановка (Б), но добавляется условие обнуления тяги в области тени: есть функция тени Sh , при $Sh < 0$ тяга нулевая, при $Sh > 0$ тяга максимальная (случаи движения по границе тени рассматривать не будем). Для модели “цилиндрической” тени функция Sh конкретизирована в [9]:

$$\begin{aligned} &\text{при } R_E + h_{\min} < r, \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) < 0 : \\ &Sh = 1 - (R_E^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2) / r^2, \\ &\text{при } R_E + h_{\min} < r, \quad (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) \geq 0 : \\ &Sh = 1 - R_E^2 / r^2, \\ &\text{при } R_E + h_{\min} \geq r : \\ &Sh = 1 - R_E^2 / (R_E + h_{\min})^2, \end{aligned}$$

где \mathbf{r} – радиус-вектор КА, \mathbf{R}_S – радиус-вектор Солнца, $r = |\mathbf{r}|$, $R_S = |\mathbf{R}_S|$, R_E – радиус Земли, h_{\min} – заданная константа (например, высота атмосферы).

Получающаяся задача очень похожа на задачу (А), но вместо функции переключения Sw величина тяги “задается” функцией Sh . Может возникнуть впечатление, что простой заменой одной функции на другую мы получим новую краевую задачу, решая которую сможем получать искомые траектории. Такая “краевая” действительно дает возможность находить траектории перелета на конечную орбиту с обнулением тяги в области тени, но эти траектории не оптимальны, ибо не учитываются условия оптимального пересечения границ тени. Это т.н. условия скачка в сопряженных переменных [10]:

$$\lambda^+ = \lambda^- + \mu \partial G / \partial x,$$

где $G = Sh$, λ^- и λ^+ – значения сопряженных переменных слева и справа от границы тени, а μ – параметр, для определения которого необходимо численно решать уравнение, в явном виде относительно μ неразрешимое.

Без условий скачка краевая задача оказывается “неполной”. Тем не менее, имеет смысл такую задачу исследовать, если поставить цель выяснить, при каких значениях параметров задачи ее реше-

ния оказываются “хорошими” по функционалу (в сравнении не с оптимальными, которые нам неизвестны, а с “номинальными”, т.е. перелетами без обнуления тяги), и рассматривая ее как предварительный (или промежуточный) этап на пути к решению “полноценной” краевой задачи.

Основные причины, по которым было решено использовать для поиска траекторий “неполную” краевую задачу, следующие. Во-первых, такая задача существенно проще “полноценной” краевой задачи. На многовитковых траекториях могут быть десятки и сотни участков с тенью [9], и соответственно раза в два больше условий скачка. Во-вторых, предполагалось, что, как и в случае учета влияния других возмущений (гравитационного притяжения Луны, Солнца и вариаций геопотенциала [11–13]), ее решения будут не сильно отличаться от номинальных. А если получаемые решения по функционалу (расходу рабочего вещества) окажутся близки к номинальным траекториям – их можно будет рассматривать как приближенно-оптимальные и, возможно, использовать вместо оптимальных решений.

НАЧАЛЬНЫЕ ОРБИТЫ

Уточним постановку задачи. В качестве конечной орбиты рассматривается геостационарная орбита (ГСО), а в качестве начальной – орбита с наклоном $i_0 = 13^\circ$, высотой перигея $H_\pi = 9.2$ и апогея $H_\alpha = 76.8$ тыс. км. Эти три параметра задают конфигурацию орбиты. А ее положение в пространстве определяют параметры ω_0, Ω_0 . Как указано в [14], в случае оптимальных по быстродействию перелетов между некомпланарными начальной эллиптической и конечной круговой орбитами со свободной линией апсид начальной орбиты, из условий трансверсальности следует, что линия апсид должна совпадать с линией пересечения плоскостей начальной и конечной орбит. В [4] также отмечено, что задача перелета между такими орбитами типична при выведении КА на высокие круговые орбиты. Поэтому зафиксируем угловое расстояние перигея от узла $\omega_0 = 0^\circ$. Другие характеристики орбиты приведены в табл. 1. Дополнительно полагается, что КА стартует из перигея начальной орбиты, т.е. истинная аномалия $\theta_0 = 0^\circ$ (следовательно, $\varphi_0 = \Omega_0$), а конечный момент времени определяется заданной угловой дальностью перелета, а именно, целым количеством витков N в переменной φ ($\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi N$). Как правило, значение N подбирается оптимальным, для чего приходится решать несколько краевых задач. В результате у нас остается два свободных параметра: долгота восходящего узла Ω_0 и время (дата) старта t_0 (измеряется в сутках от 00.00 1.1.2018).

НОМИНАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Анализ влияния тени будем проводить сравнением многovitковых (с наилучшим количеством витков N) траекторий перелета на геостационарную орбиту с тенью и траекторий номинальных, т.е. оптимальных траекторий перелета без выключения тяги в тени (со своим наилучшим N). Для последних, в силу центральности ньютоновского поля и отсутствия возмущений, имеется симметрия по отношению к параметру Ω_0 : изменение Ω_0 приводит к повороту начальной орбиты и траектории перелета как целого вокруг оси вращения Земли. Параметр t_0 также не влияет на траекторию перелета, поскольку от него не зависят ни положение начальной орбиты в пространстве, ни положение КА на орбите в начальный момент времени (в силу принятых выше допущений). Поэтому характеристики номинальных траекторий одинаковы для всех значений параметров Ω_0, t_0 . Они приведены в табл. 2.

ПОЛОЖЕНИЕ УЧАСТКОВ С ТЕНЬЮ НА ТРАЕКТОРИЯХ

В отличие от номинальных, перелеты с нулевой тягой в области тени зависят от положения теневых участков на траектории, а значит, зависят от положения Солнца относительно Земли в небесной системе координат (и, следовательно, от t_0), и от положения траектории относительно Солнца (а следовательно, и от Ω_0).

Некоторое общее представление о том, как с изменением параметров меняется количество участков с тенью и на каких витках они расположены, можно получить из т.н. “портретов” номинальных траекторий с тенью (рис. 1, 2). По оси ординат отсчитываются номера витков, по оси абсцисс – либо параметр t_0 (при заданном значении Ω_0), либо параметр Ω_0 (при заданном значении t_0), и черными квадратиками отмечены витки с тенью.

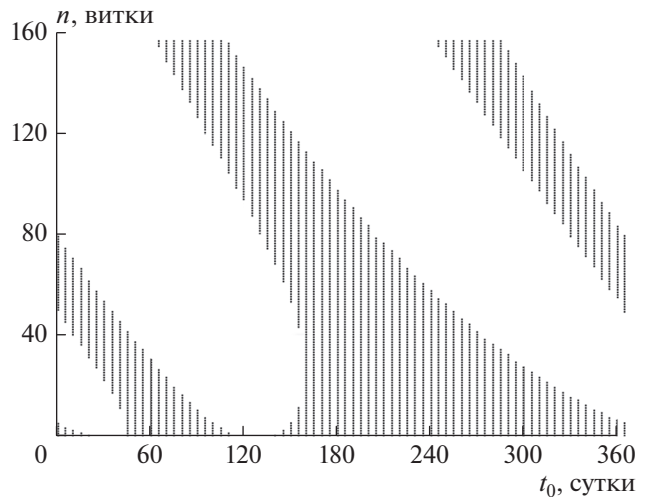


Рис. 1. t_0 -портрет номинальной траектории с тенью, $\Omega_0 = 0^\circ$ (шаг по t_0 5 суток).

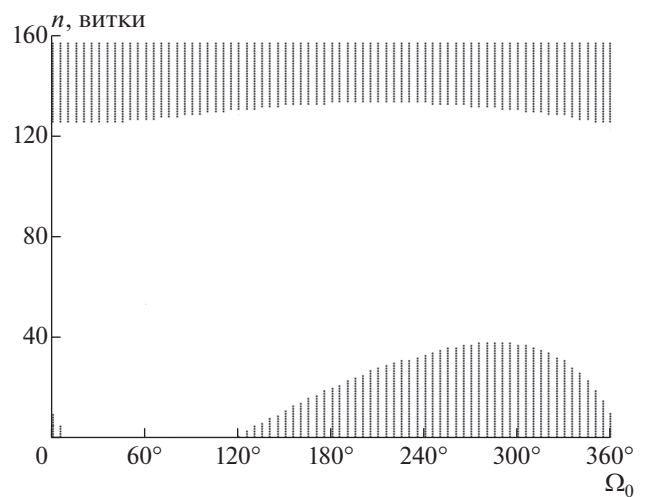


Рис. 2. Ω_0 -портрет номинальной траектории с тенью, $t_0 = 91$ (шаг по Ω_0 5°).

Таблица 1. Начальная орбита, с которой осуществляется перелет на ГСО

H_{π} , тыс. км	H_{α} , тыс. км	R_{π} , тыс. км	R_{α} , тыс. км	e	i , град	ω , град	T , сутки
9.2	76.8	15.571	83.171	0.6846	13°	0°	1.264

H_{π}, R_{π} – высота и радиус перигея, H_{α}, R_{α} – высота и радиус апогея, e – эксцентриситет, T – период.

Таблица 2. Номинальная траектория перелета на ГСО (в отсутствие возмущений)

N , витки	T , сутки	m_0 , кг	m_K , кг	$M_{РВ}$, кг	$P_{уд}$, с	$V_{СТР}$, км/с	P , Н	a , мм/с ²
157	180	5548	5062.7	485.3	1790	17.56	0.548	≈ 0.1

T – продолжительность перелета, m_0 и m_K – начальная и конечная массы КА, $M_{РВ}$ – затраты рабочего вещества, $P_{уд}, V_{СТР}$ – соответственно удельная тяга, скорость истечения струи и тяга двигательной установки, a – ускорение, которое с уменьшением массы КА изменяется от 0.0988 до 0.108 мм/с².

Таблица 3. Изменение ΔM_{PB} массы рабочего вещества M_{PB} из-за влияния тени

t_0	0	46	91	137	183	228	274	320
Ω_0	ΔM_{PB} в % от $M_{PB} = 485.3$ кг (2% – 9.7 кг)							
0°	0.2	0.5	0.6	1.7	3.5	0.9	0.5	0.1
10°	1.4	0.8	0.5	8.8	6.9	0.3	0.2	0.5
20°	2.4	0.8	0.7	20.4	10.6	1.0	0.0	1.2
30°	1.1	0.5	0.8	27.2	13.3	2.4	–0.1	1.1
40°	0.1	–0.0	0.8	29.7	14.7	3.4	–0.2	0.4
50°	–0.2	–0.2	0.8	30.3	15.0	3.7	–0.2	–0.1
60°	0.1	–0.3	0.7	30.0	14.7	3.4	–0.3	–0.2
70°	0.9	–0.2	0.4	28.9	13.0	2.7	–0.1	0.3
80°	1.9	–0.0	0.1	27.5	5.5	1.8	0.2	1.5
90°	2.9	0.2	–0.1	4.9	1.6	0.1	0.6	3.0
100°	3.8	0.4	–0.2	1.3	0.0	–0.3	0.9	4.5
110°	4.5	0.6	–0.2	–0.2	0.3	–0.2	1.1	5.8
120°	4.9	0.8	–0.2	1.2	2.9	0.2	1.0	6.5
130°	4.8	1.0	–0.2	5.9	8.2	0.5	0.8	6.4
140°	4.2	1.0	–0.1	5.0	5.9	0.6	0.7	5.4
150°	3.2	0.9	–0.1	2.8	3.4	0.5	0.5	3.6
160°	1.9	0.8	–0.1	1.2	1.6	0.4	0.5	1.8
170°	0.8	0.5	–0.1	0.3	0.5	0.3	0.5	0.7
180°	0.4	0.2	–0.1	0.1	0.2	0.2	0.5	0.6
190°	1.7	0.1	–0.1	0.3	0.4	0.3	0.6	1.7
200°	5.1	0.7	–0.1	0.7	1.0	0.5	0.7	5.2
210°	8.8	2.1	–0.1	0.9	1.3	0.8	0.8	10.9
220°	11.9	3.7	–0.1	0.7	1.2	1.0	0.9	16.2
230°	14.5	5.2	–0.1	0.2	0.7	0.8	0.8	20.0
240°	16.4	6.6	0.0	–0.1	0.2	0.4	0.7	22.8
250°	18.0	7.8	0.4	–0.2	–0.2	–0.0	0.5	24.8
260°	19.0	8.7	0.9	0.1	–0.1	–0.2	0.1	26.2
270°	12.3	9.2	1.4	0.8	0.4	–0.1	–0.3	27.0
280°	5.9	9.4	1.8	2.0	1.5	0.4	–0.5	4.1
290°	1.9	4.4	2.0	3.4	3.0	1.3	–0.4	0.7
300°	–0.1	0.9	1.8	4.8	5.0	2.2	–0.2	–0.2
310°	0.7	–0.2	1.0	5.7	6.0	3.0	0.1	1.7
320°	4.8	1.4	0.2	5.5	6.0	3.5	0.4	5.7
330°	10.4	4.6	0.2	4.0	4.8	3.6	0.7	4.0
340°	5.0	3.1	0.4	1.9	2.8	3.1	0.7	2.0
350°	1.5	1.3	0.5	0.6	1.8	2.0	0.6	0.5

Однако, хотя часто с увеличением количества витков с тенью (на номинальных траекториях) растут дополнительные затраты на перелет (на траекториях с обнулением тяги), последние напрямую никак не связаны ни с количеством теневых участков, ни с их общей продолжительностью. Количество витков с тенью на траекториях с обнулением тяги может сильно отличаться от количества витков с тенью на номинальных траекториях. Поэтому спрогнозировать заранее, в какой области параметров дополнительные затраты будут боль-

шими, а тем более – насколько большими, проблематично, особенно с учетом того факта, что могут существовать разные ветви решений.

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

В табл. 3 приведены результаты решения “неполной” краевой задачи для отдельных значений параметра t_0 . Дата старта изменяется в интервале года с шагом 1.5 мес., угол Ω_0 – в диапазоне $[0^\circ - 350^\circ]$ с шагом 10° . Приведены величины “допол-

нительных” затрат рабочего вещества ΔM_{PB} на перелет по сравнению с номинальными траекториями в процентах от номинальных затрат M_{PB} (485.3 кг). Если считать, что дополнительные затраты, не превышающие 2% – это “хороший” результат, то, судя по данным табл. 3, высказанные выше ожидания оправдались на 2/3. В 45 вариантах ($\approx 1/6$ часть) затраты на перелет с тенью оказались меньше, чем на номинальной траектории. Но треть результатов превышает 2% (они выделены жирным), причем есть $\Delta M_{PB} > 30\%$.

СЛАБОЕ ВЛИЯНИЕ ТЕНИ НА ВИТКАХ В КОНЦЕ ТРАЕКТОРИИ

В табл. 3 особо выделяются два столбца, с $t_0 = 91$ и 274 суток, в которых все варианты “хорошие”. На первый взгляд, то, что ΔM_{PB} слабо меняется с изменением Ω_0 во всем диапазоне значений, выглядит странно, особенно в сравнении с другими столбцами, в которых изменения большие. Но это частично, а именно в отношении того, почему группа витков в конце траектории с изменением параметра Ω_0 почти не влияет на функционал, объясняется просто.

Даты $t_0 = 91$ и 274 суток (от начала года) дней на 10 позже весеннего и осеннего равноденствия. Продолжительность номинального перелета 180 суток – около полугода, поэтому завершение перелетов – лишь на неделю позже осеннего и весеннего равноденствия, когда Солнце находится вблизи экватора. Поэтому витки в конце траектории, имеющие малое наклонение, пересекают цилиндр тени. И это хорошо видно для $t_0 = 91$ на рис. 2: группа витков с тенью в конце траектории состоит из 23–32 витков, в зависимости от Ω_0 (для $t_0 = 274$ картина похожая).

Но эти витки имеют и малый эксцентриситет. Изменение параметра Ω_0 означает поворот номинальной траектории как целого вокруг оси вращения Земли. На это можно посмотреть по-другому: что Солнце вращается в плоскости экватора вокруг траектории, так что участки тени смещаются по кругу вдоль почти круговых витков. Угловые размеры теневых участков $\approx 16^\circ$. Насколько ситуация близка к симметричной, видно из рис. 3, где показаны “цилиндр” тени и каждый седьмой виток из группы последних витков с тенью со 129-го по 157-й на номинальной траектории с $t_0 = 274$ суток, $\Omega_0 = 0^\circ$.

Отметим, что в данном случае группа витков с тенью состоит из 29 витков – это 18.5%, или почти пятая часть от всей угловой дальности перелета, а по продолжительности – 32.4 суток, или 17.7%. На траектории, реализующей такой перелет (с нулевой тягой в области тени), количество витков с тенью увеличивается до 31

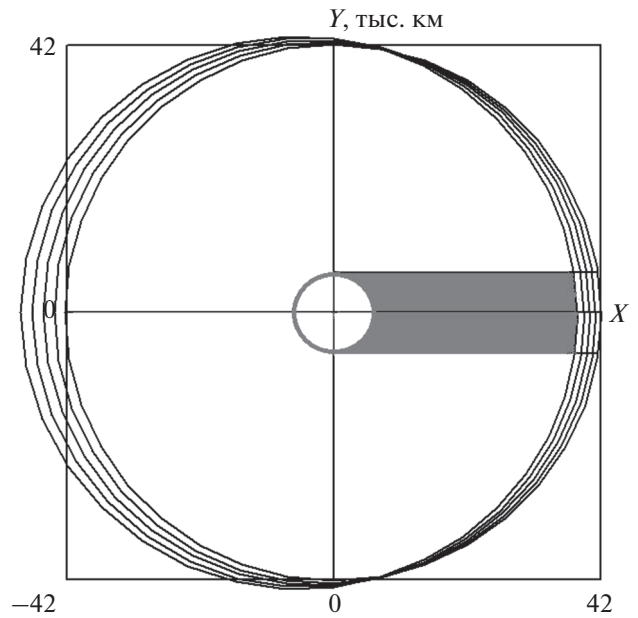


Рис. 3. Витки 129, 136, 143, 150, 157 с тенью на номинальной траектории, наклонение уменьшается с 1° до 0° , эксцентриситет с 0.122 до 0.

(127-й–157-й витки), $\Delta M_{PB} = 0.45\%$ (2.19 кг). А, например, на траектории с $\Omega_0 = 50^\circ$ группа витков с тенью состоит из 34 витков (124-й–157-й витки), $\Delta M_{PB} = -0.24\%$ (–1.15 кг). По угловой дальности это 21.7%, по продолжительности перелета 19.4%.

Из рис. 2 также видно, что почти на трети диапазона изменения Ω_0 других витков с тенью, кроме группы конечных, нет. В этом диапазоне $\Delta M_{PB} < 0.85\%$. За пределами этого диапазона количество витков с тенью в начале траектории возрастает до 38 при $\Omega_0 = 275^\circ$ – 295° , причем ΔM_{PB} достигает максимума 2% при $\Omega_0 \approx 290^\circ$. Были проведены расчеты, в которых влияние тени из первой группы витков было полностью “отключено”, т.е. на этих участках тяга не обнулялась. Они показали, что в таком случае ΔM_{PB} изменяется в диапазоне -0.146% – 0.842% . Т.е. вклад в ΔM_{PB} участков тени на витках в конце траектории действительно невелик, и он не сильно зависит от Ω_0 .

ОСОБОЕ ПОЛОЖЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ОРБИТЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ОРБИТЫ СОЛНЦА

Из табл. 3 видно, что наряду с “хорошими” столбцами есть несколько строк, в которых также все или почти все варианты “хорошие”. Это строки с Ω_0 , равным 160° – 190° , 350° и 0° . Среди них особо выделяется строка с $\Omega_0 = 180^\circ$, в которой значения ΔM_{PB} не превышают 0.56% (2.7 кг). Яс-

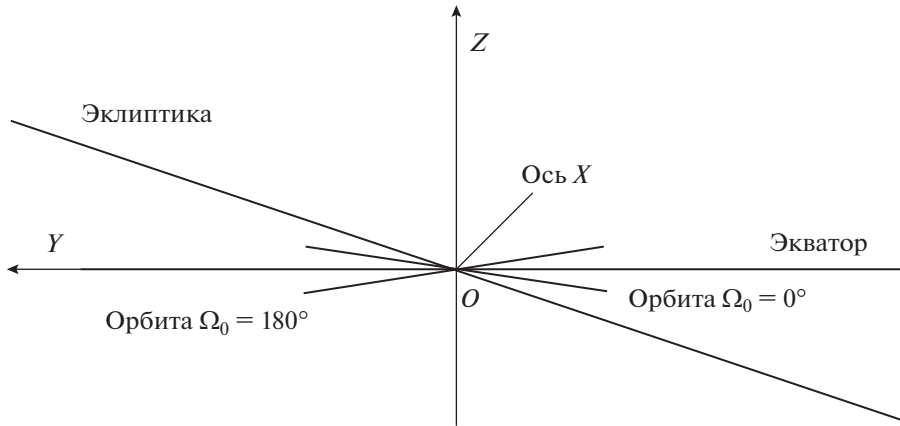


Рис. 4. Проекция плоскостей эклиптики, экватора и начальных орбит на плоскость $\langle Y, Z \rangle$ небесной системы координат.

но, что дело, скорей всего, именно в начальной орбите, представляющей собой сильно вытянутый эллипс с эксцентриситетом $e = 0.685$ (радиус перигея 15.6, апогея 83.2 тыс. км). К тому же наибольшее наклонение на многовитковой траектории перелета на ГСО именно в начальный момент времени, в данном случае $i = 13^\circ$.

Еще один аргумент в пользу высказанного предположения — то, что возмущения в начале траектории обычно сильнее влияют на конечные значения, чем возмущения в середине траектории, и тем более в конце. Из общих соображений также можно предположить, что дело не только в параметрах самой начальной орбиты и ее положении относительно орбиты ГСО, но и в ее положении относительно орбиты Солнца.

В чем особенность положения начальной орбиты с $\Omega_0 = 180^\circ$, хорошо видно на рис. 4. На нем, в проекции на плоскость $\langle Y, Z \rangle$ небесной системы координат, показаны: плоскость эклиптики, в которой находится орбита Солнца, плоскость экватора, в которой находится ГСО, плоскость начальной орбиты для $\Omega_0 = 180^\circ$ и плоскость начальной орбиты для $\Omega_0 = 0^\circ$. Все эти плоскости проходят через ось X (на рисунке в проекции дает точку O на пересечении осей Y, Z , направлена в сторону от зрителя).

Плоскости начальных орбит с $\Omega_0 = 0^\circ$ и 180° расположены симметрично относительно плоскости экватора. Большие оси орбит — линии апсид — совпадают с осью X , но направлены противоположно друг другу. При движении Солнца по орбите цилиндр тени замечает окрестность плоскости эклиптики, пересекая начальные орбиты вблизи оси X , т.е. вблизи их линий апсид, в окрестности перигея и апогея. Линии апсид являются осями симметрии эллипса, и именно это является главной особенностью орбит с $\Omega_0 = 0^\circ$ и 180° , т.к. возмущения от участков тени, расположенных вблизи оси симметрии, по-видимому, легче нивелировать.

Но между двумя этими орбитами есть различия. Во-первых, это противоположные направления больших осей. Во-вторых — разное положение плоскостей орбит по отношению к плоскости эклиптики. Для орбиты с $\Omega_0 = 180^\circ$ угол между плоскостью орбиты и плоскостью эклиптики равен $23.5^\circ + 13^\circ = 36.5^\circ$, для орбиты с $\Omega_0 = 0^\circ$ он равен $23.5^\circ - 13^\circ = 10.5^\circ$. А чем меньше этот угол, тем больший отрезок орбиты замечается цилиндром тени. Например, при наклонении орбиты $i = 23.5^\circ$ угол будет равен 0° , т.е. начальная орбита с $\Omega_0 = 0^\circ$ будет лежать в плоскости эклиптики, и цилиндр тени будет замечать всю орбиту. В результате по затратам ΔM_{PB} строка с $\Omega_0 = 0^\circ$ в табл. 3 оказывается хуже, чем с $\Omega_0 = 180^\circ$.

ВОЗМОЖНОСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕСКОЛЬКИХ РЕШЕНИЙ

Еще одной особенностью задачи является возможность существования разных ветвей решений и, как следствие, нескольких решений для одних и тех же значений параметров.

На рис. 5, 6 представлены графики зависимости ΔM_{PB} и ΔN от Ω_0 для двух ветвей решений с $t_0 = 183$. Основная ветвь, решения которой существуют во всем диапазоне изменения параметра Ω_0 , помечена квадратиками: белыми — на большей части ветви, черными — где функционал больше, чем на второй ветви. Решения второй ветви существуют в небольшом диапазоне углов и дают лучшие решения для Ω_0 в диапазоне $70^\circ - 130^\circ$ (помечены крестиками).

Особенностью первой ветви является то, что она не замкнута, хотя ее решения существуют для всех значений Ω_0 : при приближении Ω_0 к 90° слева мы получаем одно решение, при приближении Ω_0 к 90° справа — другое решение. В результате для $\Omega_0 = 90^\circ$ имеем три решения. Они приведены в табл. 4. Причем в данном случае все три реше-

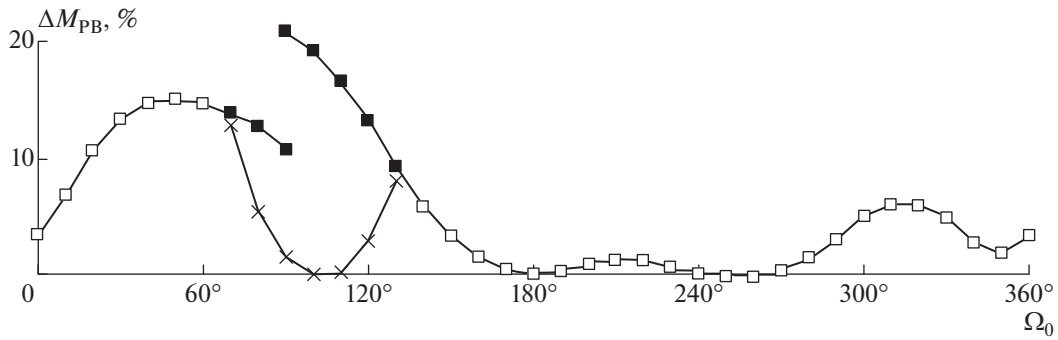


Рис. 5. Две ветви решений “неполной” краевой задачи для $t_0 = 183$. Зависимость ΔM_{PB} от Ω_0 .

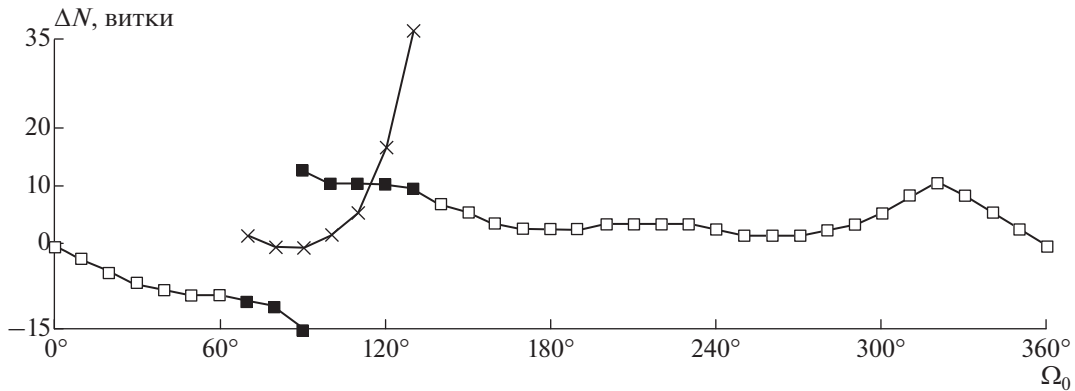


Рис. 6. Две ветви решений “неполной” краевой задачи для $t_0 = 183$. Зависимость ΔN от Ω_0 .

ния существуют не только для оптимальных N (помечены звездочкой), но и для $N = 157$ (как на номинальной траектории).

**ПРОБЛЕМА
НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ**

При решении краевых задач возникает проблема выбора хорошего начального приближения. В рассматриваемой задаче это могут быть решения с близкими значениями даты старта t_0 или долготы восходящего узла Ω_0 . Однако, как следует

из рис. 5, 6, близость параметров не всегда означает близость решений: имея решение с $\Omega_0 < 90^\circ$, принадлежащее левой части первой ветви, получить решение с $\Omega_0 > 90^\circ$, принадлежащее правой части этой же ветви, не удастся. Тем более, не удастся получить решение, принадлежащее другой ветви (разве что случайно).

В отсутствие каких-либо решений, либо с целью попытаться найти альтернативное решение, естественно рассмотреть в качестве начального приближения номинальную траекторию. К сожалению

Таблица 4. Три решения “неполной” краевой задачи для $t_0 = 183$ суток, $\Omega_0 = 90^\circ$

	N , витки	ΔN	T , сутки	ΔT , сутки	T_{Sh} , сутки	n_{Sh} , витки	k_{Sh}	M_{PB} , кг	ΔM_{PB} , кг	ΔM_{PB} , %
1	157	0	184.67	4.68	1.73	37–79	43	493.3	7.97	1.64
	156*	-1	184.61	4.62	1.70	37–78	42	493.2	7.87	1.62
2	157	0	205.07	25.08	1.29	30–58	29	549.4	64.14	13.22
	142*	-15	200.54	20.55	1.18	31–56	26	537.5	52.23	10.76
3	157	0	221.08	41.09	1.40	36–68	33	592.3	107.03	22.05
	169*	+12	219.30	39.31	1.68	37–77	41	586.8	101.47	20.91

ΔN , ΔT , ΔM_{PB} – разница в количестве витков N , продолжительности перелета T и затратах рабочего вещества M_{PB} (в кг и % от 485.31 кг) на траектории с нулевой тягой в тени и на номинальной траектории; T_{Sh} – суммарная продолжительность участков с нулевой тягой; n_{Sh} , k_{Sh} – номера витков с тенью и их количество.

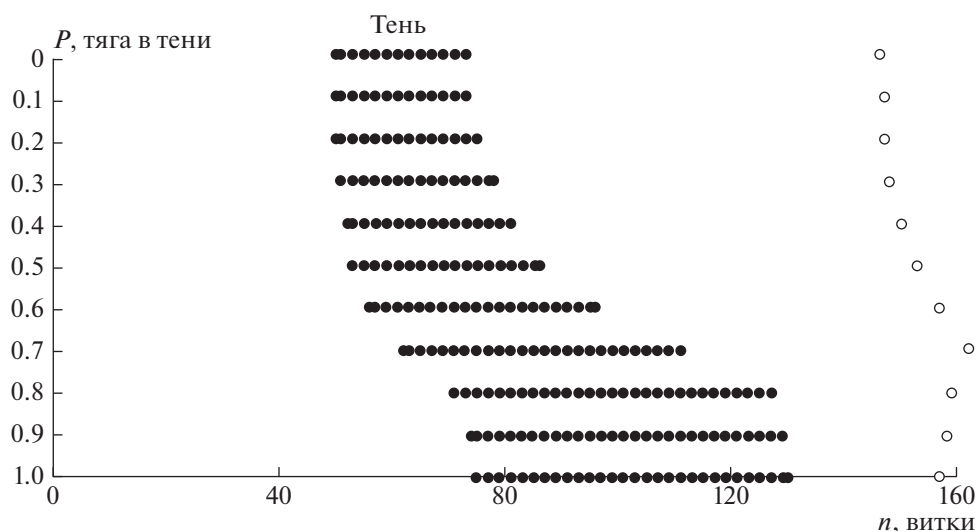


Рис. 7. Серия краевых задач с постепенным уменьшением тяги в области тени.

нию, траектории с одинаковыми начальными значениями фазовых и сопряженных переменных, но разными значениями тяги в области тени — номинальной и нулевой, могут отличаться очень сильно, если участков с тенью много. Невязки в перигее и апогее могут достигать десятков тыс. км.

Если бы изменение тяги в области тени было в несколько раз меньше, с номинального (максимального) не до нуля, а, например до 0.9 номинального значения, то и невязки уменьшились бы на порядок, и краевую задачу, возможно, удалось бы решить. Полученное решение затем можно было бы использовать, чтобы получить решение с тягой в 0.8 от номинального значения, и т.д. Т.е. решить серию краевых задач, “выключая” тягу на теневых участках постепенно, пока не получим искомое решение.

На рис. 7 приведен пример серии из 10 краевых задач, с постепенным уменьшением тяги в области тени до нуля с шагом 0.1 (от максимального значения). Учитывая, что решения с количеством витков как у номинальной траектории может не существовать для перелета с нулевой тягой в области тени, в процессе решения каждой краевой задачи оптимизировалось количество витков. Оптимальное количество витков выявлялось прямым перебором, т.е. фактически пришлось решить более трех десятков краевых задач.

На рисунке представлены данные по траекториям с оптимальным количеством витков, последние витки отмечены белыми кружками. Черными кружками отмечены витки с участками тени (при данном масштабе — каждый второй и крайние в группе). В этом примере “эволюция” решения краевой задачи довольно существенна. На траектории с максимальной тягой в области тени количество витков с участками тени — 54

(это витки с 76-го по 129-й), при общем количестве витков 157. На траектории с нулевой тягой в области тени количество витков с тенью — 24 (это витки с 50-го по 73-й), при общем количестве витков 146. То есть общее количество витков уменьшилось на 11 (с 157 до 146), количество витков с тенью — на 30 (с 54 до 24).

Но надо отметить, что это очень “плохой” вариант — различие в затратах рабочего вещества 30.3%, или 147 кг (см. табл. 3 для $t_0 = 137$ и $\Omega_0 = 50^\circ$). Если решение краевой задачи очень сильно отличается от номинального, не всегда удается получить решение таким образом. В “хороших” случаях различие невелико и по функционалу — затратам рабочего вещества, и по другим характеристикам траекторий.

ТЕНЬ КАК БАРЬЕР

В отличие от других возмущающих факторов — гравитационного влияния Луны, Солнца, вариаций геопотенциала, которые представляют собой поле сил, рассматриваемое влияние тени таковым не является. Тень ведет себя, скорее, как барьер. А проявляется это, в частности, в незамкнутости ветви решений и сильном изменении количества витков, как на рис. 5, 6. Каков механизм такого воздействия?

В [8], где рассматривались перелеты без тени, было показано, что существует много решений краевой задачи, различающихся количеством витков. Причем в большом диапазоне изменения количества витков (он тем больше, чем больше наилучшая угловая дальность перелета на ГСО, или, в терминах данной статьи — чем больше угловая дальность номинальной траектории) функционал меняется не сильно. В случае постоянно

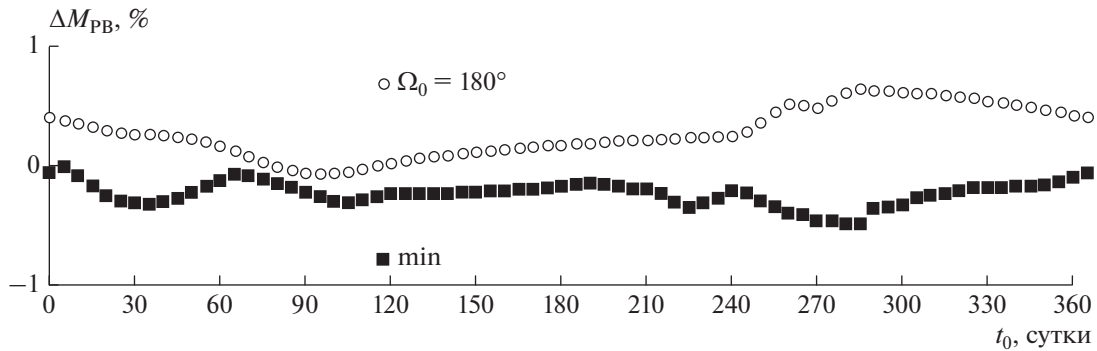


Рис. 8. Минимальные по параметру Ω_0 значения ΔM_{PB} и ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^\circ$.

работающей и постоянной по величине тяги это эквивалентно тому, что в этом диапазоне витков почти постоянна продолжительность перелета. Например, для траекторий перелета на ГСО с рассматриваемой здесь начальной орбиты (табл. 1), с количеством витков N в диапазоне от 151 до 166 (16 траекторий), отличие функционала от номинального (табл. 2) не превышает 1%. Для N из диапазона [149–171] (23 траектории) – менее 2%, из диапазона [144–183] (40 траекторий) – менее 5%, из диапазона [141–201] (61 траектория) – менее 10%.

И здесь напрашивается аналогия со спирально закрученной пружиной будильника. Только в случае с пружиной постоянна ее длина. При скручивании пружины увеличивается количество витков, а так как общая длина не изменяется – уменьшаются длина каждого витка и его размеры. Аналогично и с многовитковой траекторией: с увеличением количества витков при почти постоянной общей продолжительности перелета продолжительность каждого витка и его размеры уменьшаются. С уменьшением количества витков их размеры, наоборот, увеличиваются. Частично за счет этого можно “обогнуть” препятствие в виде цилиндра тени. А в зависимости от того, с наружной или внутренней стороны витков находится большая часть цилиндра тени, количество витков будет уменьшаться или увеличиваться. Именно этим, по-видимому, можно объяснить эффекты, проявляющиеся на рис. 5, 6. Хотя в реальности все сложнее, поскольку витков с тенью много, цилиндр тени от витка к витку смещается в пространстве, и продолжительность перелета может изменяться очень сильно.

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ ПО ПАРАМЕТРУ Ω_0

Определим для каждого t_0 наилучшее значение Ω_0 и соответствующее ΔM_{PB} .

Изменяя время старта t_C ракетносителя в интервале одних суток, можно получить весь спектр

значений параметра Ω_0 . Подобрать t_C можно так, чтобы момент $t(\Omega_0)$ выхода КА на нужную начальную орбиту лежал в диапазоне $t_0 \pm 0.5$. После чего может потребоваться пауза Δt продолжительностью от 0 до 1.264 суток, чтобы старт с начальной орбиты был в перигее. В зависимости от значений $t(\Omega_0)$ и Δt можно скорректировать время t_C так, чтобы время старта с орбиты отличалось от t_0 не более чем на 0.5 суток. Например, если $t(\Omega_0) = 0.5$, а $\Delta t = 0.25, 0.5, 0.75, 1.0$ или 1.25 – можно уменьшить t_C на сутки или двое, и время старта с орбиты будет соответственно $t_0 - 0.25, t_0, t_0 + 0.25, t_0 \pm 0.5, t_0 - 0.25$. Из-за таких изменений времени старта значения ΔM_{PB} будут отличаться от табличных не сильно, и совсем немного – для хороших вариантов.

На рис. 8 приведен график минимальных по параметру Ω_0 значений ΔM_{PB} . Расчеты проводились для t_0 с шагом 5 суток и Ω_0 с шагом 10° . Как видно, во всем диапазоне изменения даты старта t_0 затраты $\Delta M_{PB} < 0$, т.е. затраты на перелет с обнулением тяги в области тени меньше, чем на номинальной траектории. Однако выигрыш в затратах небольшой – менее 0.5%. Для сравнения приведен также график ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^\circ$: для большинства значений t_0 затраты $\Delta M_{PB} > 0$, но не превышают 0.62%.

Т.о., для перелетов на ГСО с рассмотренных здесь начальных орбит “неполная” краевая задача позволила получить траектории с нулевой тягой в области тени с затратами рабочего вещества меньшими, чем на траекториях номинальных – с постоянно работающей малой тягой. При этом перелеты с начальной орбиты с фиксированным значением параметра $\Omega_0 = 180^\circ$ лишь ненамного хуже номинальных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sackett L.L., Malchow H.L., Edelbaum T.N. Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints. 1975 Analysis, NASA CR 134927, Washington, DC.

2. *Салмин В.В.* Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987.
3. *Lundberg B.N.* An Adjoint Jump Shooting Method for Parametric Low Thrust Orbit Transfer Problems with Eclipsing // Proceedings of the Fourth International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (WPP-308), ESAC, Madrid, Spain. 2010.
4. *Петухов В.Г.* Квазиоптимальное управление с обратной связью для многовиткового перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Космич. исслед. 2011. Т. 49. № 2. С. 128–137. (Cosmic Research. P. 121).
5. *Tarzi Z., Speyer J., Wirz R.* Fuel Optimum Low-Thrust Elliptic Transfer Using Numerical Averaging // Acta Astronautica. 2013. V. 86. P. 95–118.
6. *Mazzini L.* Finite Thrust Orbital Transfers // Acta Astronautica. 2014 V. 100. P. 107–128.
7. *Graham K.F., Rao A.V.* Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing // J. Spacecraft and Rockets. 2016. V. 53. P. 289–303.
8. *Ахметшин Р.З.* Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космич. исслед. 2004. Т. 42. № 3. С. 248–259. (Cosmic Research. P. 238).
9. *Ахметшин Р.З.* Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 266.
10. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
11. *Ахметшин Р.З.* Возмущения от Луны при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 107.
12. *Ахметшин Р.З.* Возмущения от Солнца при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 77.
13. *Ахметшин Р.З.* Влияние вариаций геопотенциала при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 111.
14. *Петухов В.Г.* Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космич. исслед. 2004. Т. 42. № 3. С. 260–279. (Cosmic Research. P. 250).