КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2020, том 58, № 4, с. 312–320

УДК 629.78

УНИВЕРСАЛЬНОЕ СВОЙСТВО ИНТЕГРАЛА ЯКОБИ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ МАНЕВРОВ В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

© 2020 г. Ю. Ф. Голубев[1, *], А. В. Грушевский[1], В. В. Корянов[1], А. Г. Тучин[1], Д. А. Тучин[1]

[1]*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва, Россия*

**golubev@keldysh.ru*

Поступила в редакцию 21.05.2019 г.
После доработки 21.05.2019 г.
Принята к публикации 04.07.2019 г.

В работе показано, что стандартный и громоздкий способ традиционного обоснования постоянства асимптотической скорости при гравитационных маневрах в модели круговой ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ), применяемый в современной астродинамике, может быть значительно упрощен. Представлены уточняющие формы интеграла Якоби, которые позволяют, помимо прочего, выявить прозрачную взаимосвязь интеграла Якоби и метода сопряженных конических сечений в ОЗТТ.

DOI: 10.31857/S0023420620040068

ВВЕДЕНИЕ

Проектирование современных космических миссий к телам Солнечной системы предполагает использование гравитационных маневров [2, 3, 9, 15, 19]. Применение гравитационных маневров уменьшает расход характеристической скорости космического аппарата и обеспечивает тем самым возможность решения современных комплексных задач изучения космоса.

Каждый гравитационный маневр (GAM – Gravity Assists Maneuver) можно рассматривать как составной элемент ограниченной задачи трех тел (ОЗТТ), поскольку, по определению, он предполагает прохождение пробной частицей (КА, кометой, астероидом) сферы действия “малого тела” (планеты, спутника планеты, малого тела Солнечной системы). В рамках Метода сопряженных Конических Сечений (МсКС) КА пролетает сферу действия планеты по планетоцентрической гиперболе, а вне ее – движется по гелиоцентрическому коническому сечению (кеплеровой дуге). Время гиперболического прохождения сферы действия планеты считается пренебрежимо малым по сравнению со временем пролета гелиоцентрической дуги. Модули скорости КА относительно малого тела (планеты) при пересечении границ ее сферы действия приблизительно равны величине асимптотической скорости КА V_∞ для планетоцентрической гиперболы.

В дальнейшем полученное с использованием МсКС решение используется в качестве первого приближения для последующего уточнения в соответствии с полной эфемеридной моделью движения небесных тел.

Таким образом, при поиске приближенного решения задачи перелета в рамках модели ОЗТТ с использованием МсКС требуется вычисление “передаточного параметра” V_∞ в условиях проведения GAM – при переключении на границах сфер действия малых тел с гелиоцентрических дуг на планетоцентрические участки и обратно.

В рамках ОЗТТ имеет место сохранение (инвариантность) величины V_∞ асимптотической скорости КА относительно “малого тела” – “планеты” – при неоднократном совершении около нее GAM [16], сохраняющих постоянную интеграла Якоби. В МсКС, являющейся, по сути, аппроксимацией ОЗТТ с помощью последовательной склейки нескольких задач двух тел “текущий центр притяжения – пробная частица” с сингулярным переключением с одной на другую, указанное свойство, вообще говоря, очевидно в силу симметрии пролетной планетоцентрической гиперболы на одиночном гравитационном маневре (GAM). Вместе с тем при активном маневрировании КА вне сферы действия малой планеты постоянная интеграла Якоби может изменяться.

В рамках круговой ОЗТТ, с использованием ее интеграла Якоби J, возможно аналитическое вычисление V_∞ с помощью *универсального свойства* этого интеграла для серии GAM: $\text{const} = J \approx 3 - V_\infty^2$ (в обезразмеренном через орбитальную скорость планеты виде). Вывод этого свойства осуществляется в астродинамике достаточно громоздким способом [7, 9, 16]: от канонической записи интеграла Якоби в синодической системе координат J необходимо совершить переход к сидерической системе координат и его приближенной модификации при его записи через орбитальные оскулирующие элементы, которая становится идентичной параметру Тиссерана T_{Ti}. Далее используются достаточно громоздкие геометрические соображения (которые будут приведены в этой работе в Приложении I), позволяющие, тем не менее, приближенно получить универсальное свойство интеграла Якоби для серии GAM в круговой ОЗТТ через связь интеграла Якоби, параметра Тиссерана и величины асимптотической скорости КА в виде: const $= J \approx T_{\mathrm{Ti}} \approx 3 - V_\infty^2$.

В настоящей работе предлагается более короткий метод получения указанного универсального свойства интеграла Якоби и представлены уточняющие формы интеграла Якоби, которые позволяют, помимо прочего, выявить внятную взаимосвязь интеграла Якоби и МсКС в круговой ОЗТТ.

1. КРУГОВАЯ ОГРАНИЧЕННАЯ ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

В рамках круговой ОЗТТ рассматриваются центральное тело с гравитационным параметром μ_1, малое тело с гравитационным параметром $\mu_2 < \mu_1$ и пробная частица бесконечно малой массы (КА). Предполагается, что центральное и малое тела взаимодействуют по закону Всемирного тяготения и вращаются вокруг барицентра с одинаковыми угловыми скоростями. Вводится вращающаяся (синодическая) барицентрическая система координат $BXYZ$, где ось BX проходит через центральное и малое тело и направлена в сторону малого тела, ось BY перпендикулярна к оси BX и сонаправлена относительной скорости малого тела, ось BZ дополняет их до правоориентированного репера. Пусть a_p – расстояние между центральным и малым телами, $n = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)/a_p^3}$ – угловая скорость вращения системы $BXYZ$, $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$ – расстояния от пробной частицы (КА) до центрального и малого тел соответственно, $\tilde{V}_{sc\_rot}$ – скорость пробной частицы (КА) относительно вращающейся системы координат $BXYZ$. Пробная частица не влияет на движения центрального и малого тел, но сама притягивается к ним по закону Ньютона. При переходе к безразмерному времени $\tau = n\,t$, безразмерным координатам КА X, Y, Z и расстояниям r_1, r_2 от КА до центрального и малого тел, нормированным по a_p, безразмерная скорость V пробной частицы (КА) во вращающейся системе координат $BXYZ$ запишется как $V = \dfrac{\tilde{V}_{\mathrm{sc\_rot}}}{\tilde{V}_p}$, где $\tilde{V}_p$ – средняя орбитальная скорость планеты относительно центрального тела:

$$\tilde{V}_p = \sqrt{(\mu_1 + \mu_2)/a_p} = n a_p.$$

Интеграл Якоби J является обобщенным интегралом энергии [4], учитывающим действие центробежных сил, и единственным интегралом в круговой ОЗТТ [7, 17]. При этом не сохраняются ни энергия системы в обычном понимании, ни ее кинетический момент.

Выпишем выражения интеграла Якоби для ограниченной круговой задачи трех тел (в синодической и сидерической системах координат, в размерной и безразмерной форме).

2. ИНТЕГРАЛ ЯКОБИ

Интеграл **Якоби** $\tilde{J}$ для пробной частицы (КА) *в синодической системе* координат $BXYZ$ можно записать в виде [7, 13, 17]:

$$\tilde{J} = 2\tilde{U} - \tilde{V}_{sc\_rot}^2 = n^2(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) + \\ + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} + 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} - \tilde{V}_{sc\_rot}^2,$$

где $\tilde{J}$ – размерная константа интеграла Якоби, $\tilde{X}, \tilde{Y}$ – координаты частицы.

В сидерической (инерциальной) системе координат $B\xi\eta\zeta$, для которой ось $B\zeta$ сонаправлена с осью BZ, с учетом того, что по теореме сложения скоростей [4]

$$\tilde{V}^2 = \dot{\tilde{X}}^2 + \dot{\tilde{Y}}^2 + \dot{\tilde{Z}}^2 = \tilde{v}^2 + n^2(\tilde{\xi}^2 + \tilde{\eta}^2) - \\ - 2n(\tilde{\xi}\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\dot{\tilde{\xi}}), \quad \bar{X}^2 + \bar{Y}^2 = \bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2, \tag{1}$$

где $\tilde{v}$ – абсолютная скорость КА, тот же интеграл можно представить в виде

$$\tilde{J} = 2n(\tilde{\xi}\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\dot{\tilde{\xi}}) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} - 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} - \tilde{v}^2.$$

В безразмерном виде обе формы интеграла Якоби соответственно примут вид

$$J = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - V^2, \tag{2}$$

$$J = 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - v^2, \tag{3}$$

где $\mu = \mu_2/(\mu_1 + \mu_2) \le 1$. В том случае, когда μ_2 – гравитационный параметр какой-нибудь планеты и μ_1 – гравитационный параметр Солнца, будем иметь $\mu \ll 1$. Обе формулы (2) и (3) эквивалентны. При анализе свойств движения КА глубоко в сфере действия малого тела удобно пользоваться формулой (2), а при анализе движения глубоко в сфере действия центрального тела полезные результаты поможет получить формула (3).

3. ДВИЖЕНИЕ В СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ МАЛОГО ТЕЛА

Обозначим $\chi = X - (1-\mu)$ и предположим, что $r_2 = \sqrt{\chi^2 + Y^2 + Z^2} \le \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$X^2 + Y^2 = (1-\mu)^2 + 2(1-\mu)\chi + \chi^2 + Y^2,$$

$$2\frac{1-\mu}{r_1} = 2\frac{1-\mu}{\sqrt{(1+\chi)^2 + Y^2 + Z^2}} \approx$$

$$\approx 2(1-\mu)\left(1 - \chi - \frac{\chi^2 + Y^2 + Z^2}{2} + \frac{3}{2}\chi^2\right).$$

Здесь приближение выполнено с точностью до членов третьего порядка малости по χ, Y, Z. С помощью приведенных соотношений формулу (2) можно приближенно представить в виде

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + (3-2\mu)\chi^2 + \mu Y^2 - \\ - (1-\mu)Z^2 - 2h_2, \quad h_2 = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r_2}. \tag{4}$$

Величина h_2 представляет собой полную энергию системы двух тел, одно из которых КА, а другое есть малое тело ОЗТТ. Если принять, что величина $\mu \le \varepsilon$ есть малая первого прядка, то формула (4) упрощается:

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - 2h_2, \tag{5}$$

откуда

$$2h_2 \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - J. \tag{6}$$

Видим, что h_2 меняется, в основном, из-за χ^2 и Z^2, а если движение происходит в плоскости BXY, то, с точностью до величин третьего порядка малости, энергия h_2 будет зависеть только от χ^2.

Энергия h_2 соответствует оскулирующей орбите КА относительно малого тела. Если из формулы (6) получится, что $h_2 < 0$, то указанная оскулирующая орбита будет эллипсом с большой полуосью $a_2 = -\mu/(2h_2)$. Известно [2], что безразмерный радиус ρ_2 сферы действия планеты выражается формулой $\rho_2 = \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{2}{5}}$, а сама сфера действия для планет Солнечной системы лежит внутри сферы Хилла. Таким образом, если окажется, что $a_2 \le \rho_2 - 4\varepsilon^2$, то пассивный КА навсегда останется спутником малого тела – планеты.

В том случае, когда из формулы (5) следует, что $h_2 \ge 0$, оскулирующая траектория КА в окрестности планеты представляет собой параболу или гиперболу, и КА гарантированно покидает сферу действия планеты через конечное время. Тогда величина $2h_2 = V_\infty^2 \ge 0$ есть квадрат асимптотической скорости на бесконечности, которую в задаче двух тел приобретет КА при неограниченном удалении от планеты. Формулу (6) можно тогда переписать в виде

$$V_\infty^2 \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - J, \tag{7}$$

а приближенное выражение для интеграла Якоби – следующим образом

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\chi^2 - Z^2 - V_\infty^2. \tag{8}$$

Следовательно, для того чтобы в окрестности планеты получить гиперболическую траекторию, лежащую в плоскости эклиптики, достаточно обеспечить значение постоянной интеграла Якоби, удовлетворяющее неравенству

$$J \le (1-\mu)(3-\mu) - \varepsilon^2. \tag{9}$$

Если траектория пересекает плоскость BXY, то в точке пересечения координата Z пропадает, а если эта точка служит перицентром орбиты КА, то для нее $\chi = \rho_\pi$. Тогда формула (8) принимает вид:

$$J \approx (1-\mu)(3-\mu) + 3\rho_\pi^2 - V_\infty^2. \tag{10}$$

4. ДВИЖЕНИЕ В СФЕРЕ ДЕЙСТВИЯ ЦЕНТРАЛЬНОГО ТЕЛА

Обозначим $\sigma = X + \mu$. Будем считать, что $r_1 = \sqrt{\sigma^2 + Y^2 + Z^2} \le \varepsilon \ll 1$. Тогда

$$X^2 + Y^2 = \mu^2 - 2\mu\sigma + \sigma^2 + Y^2,$$

$$2\frac{\mu}{r_2} = \frac{2\mu}{\sqrt{(1-\sigma)^2 + Y^2 + Z^2}} \approx$$

$$\approx 2\mu\left(1 + \sigma - \frac{\sigma^2 + Y^2 + Z^2}{2} + \frac{3}{2}\sigma^2\right).$$

Здесь приближение выполнено с точностью до членов третьего порядка малости по σ, Y, Z. С помощью приведенных соотношений формулу (2) можно приближенно представить в виде

$$J \approx \mu(\mu+2) + (1+2\mu)\sigma^2 + (1-\mu)Y^2 - \\ - \mu Z^2 - 2h_1, \quad h_1 = \frac{V^2}{2} - \frac{1-\mu}{r_1}. \tag{11}$$

Здесь величина h_1 представляет собой полную энергию системы двух тел, одно из которых КА, а другое есть центральное тело ОЗТТ. Если принять, что величина $\mu \le \varepsilon$ есть малая первого порядка, то формула (11) упрощается:

$$J \approx \mu(\mu+2) + \sigma^2 + Y^2 - 2h_1. \tag{12}$$

Видим, что с точностью до величин третьего порядка малости, в выражении интеграла Якоби влияние тяготения малого тела (планеты) сказывается лишь как постоянная добавка 2μ, а величина $(\sigma^2 + Y^2)$ отражает влияние центробежной силы, как если бы начало вращающейся системы координат было смещено в середину C центрального тела, причем точка C остается неподвижной. Слагаемое μ^2 вносит постоянную поправку на перенос начала синодической системы координат. При этом сидерическая (инерциальная) система координат превращается в неинерциальную систему координат Кенига $Cxyz$ [4] из-за того, что центральное тело испытывает центробежное ускорение, при вращении вокруг барицентра. Ось Cz параллельна оси BZ. При вращении системы $BXYZ$ вокруг неподвижной оси Cz справедливы формулы, аналогичные (1):

$$V^2 = v^2 + (x^2 + y^2) - 2(x\dot{y} - y\dot{x}),$$
$$\sigma^2 + Y^2 = x^2 + y^2,$$

где v — безразмерная скорость КА относительно системы $Cxyz$. Таким образом, в кениговой системе координат с началом C в центральном теле интеграл Якоби можно представить в виде

$$J \approx \mu(\mu + 2) + 2c_p - 2h_1, \quad c_p = x\dot{y} - y\dot{x}. \qquad (13)$$

По смыслу величина c_p есть проекция на плоскость вращения планет (плоскость эклиптики) удвоенной площади, заметаемой радиус-вектором КА с началом в центральном теле.

Из сказанного следует, что ОЗТТ в системе координат $Cxyz$ интерпретируется с точностью до малых третьего порядка, как задача движения КА под действием единственной ньютоновой силы притяжения космического аппарата к центральному телу. Для такой задачи величина h_1 остается постоянной, орбита будет плоской и в общем случае она будет наклонена к плоскости Cxy под углом i. Будет справедлив также интеграл площадей $c = |\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}|$, где $\mathbf{r}_1$ — радиус-вектор КА, а $\mathbf{v}$ — его скорость в системе координат $Cxyz$. Следовательно, в правой части формулы (13) стоит комбинация постоянных задачи двух тел, которая и определяет приближенное значение константы интеграла Якоби в ОЗТТ:

$$J \approx \mu(\mu + 2) + T_{\mathrm{Ti}}, \qquad (14)$$

где

$$T_{\mathrm{Ti}} = 2c\cos i - 2h_1 \qquad (15)$$

есть параметр Тиссерана [20].

В том случае, когда $h_1 < 0$, орбита КА в сфере действия центрального тела будет представлять собой эллипс с большой полуосью $a_1 = -(1-\mu)/(2h_2)$. Параметр Тиссерана для эллиптических орбит в окрестности центрального тела принимает вид [20]

$$T_{\mathrm{Ti}} = 2c\cos i - 2h_1 = \frac{1-\mu}{a_1} + 2\sqrt{(1-\mu)a_1(1-e_1^2)}\cos i, \qquad (16а)$$

где e_1 — эксцентриситет орбиты КА в окрестности центрального тела.

Параметр T_{Ti} используется при идентификации разнесенных по времени астрономических наблюдений “пробных частиц” — комет, поскольку сами элементы орбиты комет могут неоднократно меняться при прохождении ими сферы действия планеты Юпитер. Критерий Тиссерана $T_{\mathrm{Ti}} \approx \mathrm{const}$ опубликовал французский астроном Франсуа Тиссеран в 1896 г. Подчеркнем, что критерий выполняется только на удалении от сферы действия малого тела (планеты).

5. КРИТЕРИЙ ТИССЕРАНА И НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ЗАХВАТА В СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ В РАМКАХ МсКС

В рамках МсКС принимается, что в сфере действия центрального тела орбита перелета представляет собой оскулирующий эллипс с расстоянием $\overline{r}_\alpha$ от центрального тела до апоцентра: $\overline{r}_\alpha \geq r_1 a_p$, где r_1 — безразмерное расстояние от пробной частицы до центрального тела в момент максимального сближения пробной частицы с малым телом. Из формулы $2h_1 = -(1-\mu)/a_1$ получим для скорости v_m пробной частицы в момент ее наибольшего сближения с малым телом

$$v_m^2 = 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2h_1 = (1-\mu)\left[2\frac{1}{r_1} - \frac{(1+e_1)}{r_\alpha}\right].$$

Видим, что при фиксированном эксцентриситете с увеличением r_α скорость v_m возрастает. Она достигает минимума лишь если $r_\alpha = r_1$. Поэтому, если при $r_\alpha = r_1$ баллистический захват не происходит, то он не может произойти при $r_\alpha > r_1$. Рассмотрим с точки зрения возможности баллистического захвата случай $r_\alpha = r_1$. Тогда в безразмерном виде большая полуось оскулирующей орбиты КА запишется следующим образом: $a_1 = (1+\rho_\pi)/(1+e_1)$. Из формулы (16а) найдем

$$T_{\mathrm{Ti}} = \frac{(1-\mu)(1+e_1)}{r_\alpha} + 2\sqrt{(1-\mu)r_\alpha(1-e_1)}\cos i,$$
$$r_\alpha = 1 + \rho_\pi, \quad 0 \leq e_1 < 1. \qquad (16б)$$

Таким образом, для определения постоянной интеграла Якоби осталось задать лишь эксцентриситет e_1 требуемой орбиты перелета.

Сопоставив формулы (6) и (14), получим значение энергии КА в окрестности малого тела в зависимости от параметра Тиссерана орбиты в сфере действия центрального тела

$$2h_2 \approx 6(1-\mu) + 3(\rho_\pi^2 - 1) - T_{\text{Ti}}, \tag{17}$$

или

$$2h_2 \approx \left(6 - \frac{(1+e_1)}{r_\alpha}\right)(1-\mu) + 3r_\alpha(r_\alpha - 2) + \\ + 2\sqrt{(1-\mu)r_\alpha(1-e_1)}\cos i. \tag{18}$$

Коэффициент при $(1-\mu)$ в формуле (18) заведомо положителен. Поэтому захват КА малым телом может произойти, если будет выполнено неравенство

$$\delta^2 + 2b_1\delta - b_2 < 0, \tag{19}$$

где

$$0 \le \delta = \sqrt{1-\mu} < 1, \quad b_1 = \frac{r_\alpha\sqrt{r_\alpha(1-e_1)}\cos i}{6r_\alpha - (1+e_1)},$$

$$b_2 = \frac{3r_\alpha^2(2-r_\alpha)}{6r_\alpha - (1+e_1)} > 0.$$

Квадратный трехчлен в (19) имеет положительный и отрицательный корни и, следовательно,

$$0 < \delta < \delta_0 = \left(\sqrt{b_1^2 + b_2} - b_1\right) = \frac{b_2}{\sqrt{b_1^2 + b_2} + b_1} \tag{20}$$

удовлетворяет неравенству (19). Видим, что величина δ_0 достигает максимума при $b_1 = 0$. Поэтому $\delta_0^2 \le b_2$. Отметим, что

$$b_2 = \frac{3r_\alpha^2(2-r_\alpha)}{6r_\alpha - (1+e_1)} \le \frac{3}{4}(1+\varepsilon)^2,$$

и если взять $\varepsilon < 1/(2\sqrt{3}+3)$, то будет $b_2 < 1$. Поскольку по предположению $\varepsilon \ll 1$, то можно считать, что неравенство $b_2 < 1$ заведомо выполняется. Более того, если значение δ оказывается в диапазоне $b_2 < \delta < 1$, то пролетная траектория в сфере действия малой планеты окажется гиперболической. Для наиболее массивной планеты Солнечной системы – Юпитера – имеем $\delta \approx 1 - 9\cdot10^{-4} > b_2$ при принятых ограничениях относительно малости величин. Таким образом, в постановке ОЗТТ оказывается, что для всех планет Солнечной системы, когда большим телом служит Солнце, пролетная траектория в сфере действия малой планеты будет гиперболической и баллистический захват в модели МсКС невозможен. Рассмотренная математическая модель удобна для анализа последовательности гравитационных маневров, однако не позволяет проводить описание баллистического захвата [1].

Аналогичный результат вытекает и при анализе ОЗТТ для систем планет и их естественных спутников в Солнечной системе [14, 18] (максимальными в Солнечной системе оказываются отношения гравитационных параметров спутника и планеты–“хозяина” для системы Земля–Луна, $\mu_2/\mu_1 \approx 0.0123$, и системы Плутон–Харон, $\mu_2/\mu_1 \approx 0.0117$). Гигантские галилеевы луны Юпитера – Ио, Европа, Ганимед и Каллисто, так же как и крупнейший естественный спутник Солнечной системы – сатурнианский Титан, имеют еще меньшее значение μ_2/μ_1 в силу значительной величины гравитационной постоянной их планет-хозяев: $\mu_2/\mu_1 \le 0.00008$ для галилеевых лун и $\mu_2/\mu_1 \approx 0.00023$ для системы Сатурн–Титан.

Вместе с тем из формулы (20) видно, что величину V_∞ при пролете малого тела можно менять в ограниченных пределах за счет изменения параметра b_1. Для того чтобы уменьшить величину V_∞, следует уменьшать b_1. Поэтому для экономии рабочего тела предпочтение нужно отдавать траекториям с большим наклонением к плоскости эклиптики и с большим эксцентриситетом e_1.

6. ЭКСПРЕСС-ВЫВОД УНИВЕРСАЛЬНОГО СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛА ЯКОБИ ДЛЯ GAM В КРУГОВОЙ ОЗТТ

Вывод универсального свойства интеграла Якоби в круговой ОЗТТ исполняется в астродинамике достаточно громоздким способом [7, 9, 16]: от канонической записи интеграла Якоби в синодической системе координат необходимо совершить переход к сидерической системе координат и записать его приближенное выражение через орбитальные оскулирующие элементы, которое оказывается идентичным параметру Тиссерана. Далее, с использованием весьма громоздких геометрических соображений (Приложение I), становится возможным получить в приближенном виде универсальное свойство через связь интеграла Якоби, параметра Тиссерана и величины асимптотической скорости КА при совершении гравитационных маневров. Учитывая результат раздела 5, представим более короткий и наглядный вывод этого свойства с использованием модели МсКС, даже не выходя при этом из синодической системы координат.

1. Пусть в качестве центрального тела выбрано Солнце. Тогда для всех небесных тел Солнечной системы сфера действия малого небесного тела аппроксимируется слегка сплюснутым эллипсо-

идом вращения с характерным безразмерным радиусом $\rho_2 \ll 1$. Как следствие, при моделировании GAM, для значений $r_2 \le \rho_2$ расстояние $\tilde{R}_1$ от КА до центрального тела можно в нулевом приближении заменить расстоянием a_p от планеты до центрального тела, поскольку, очевидно, согласно неравенству треугольника, при проходе сферы действия планеты выполнено:

$$a_p - \rho_2 a_p \le \tilde{R}_1 \le a_p + \rho_2 a_p,$$
$$1 - \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2/5} \le r_1 \le 1 + \left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^{2/5}, \qquad (21)$$
$$r_1\big|_{\mathrm{GAM}} \approx 1$$

2. Напомним, что в выражении интеграла Якоби (2) величина V является скоростью пробной частицы относительно синодической системы координат. Однако при сближении с планетой и совершении около нее GAM выполняется (21), и скорость КА относительно синодической системы координат приблизительно равна скорости КА относительно планеты, замороженной в этой системе координат.

3. С учетом (2) приходим к выражению интеграла Якоби при совершении GAM:

$$J\big|_{\mathrm{GAM}} = J = 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1} - V_\infty^2 \approx$$
$$\approx 3 - 2\frac{\mu}{r_1} - V_\infty^2 \approx 3 - V_\infty^2.$$

Более строго: с учетом (2) при совершении GAM верно:

$$J\big|_{\mathrm{GAM}} = J = 1 + 2\frac{1-\mu}{r_1} - 2h_2.$$

В соответствии с разделом 5 для всех гравитационных маневров в Солнечной системе имеем $h_2 > 0$. Тогда $2h_2 = V_\infty^2$ и

$$J \approx 3 - V_\infty^2. \qquad (22)$$

Выражение (22) является хотя и приближенным, но общим для всех планет и планетных систем Солнечной системы. Оно очень удобно для предварительных оценочных расчетов эффективности гравитационных маневров.

4. Из формулы (14) в том же приближении, что и для формулы (22), найдем

$$J \approx T_{\mathrm{Ti}}, \quad T_{\mathrm{Ti}} \approx \frac{1}{a_1} + 2\sqrt{a_1(1-e_1^2)}\cos i,$$

где по-прежнему a_1, e, i – нормированная большая полуось оскулирующей орбиты КА относительно центрального тела, ее эксцентриситет и наклонение.

Выражение (22) означает, что величина V_∞ асимптотической скорости КА относительно малого тела, будучи связанной непосредственно с интегралом Якоби, останется постоянной для всех гравитационных маневров, выполняемых последовательно с этой планетой и сохраняющих константу интеграла Якоби, хотя само направление вектора асимптотической скорости может при этом существенно изменяться.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При поиске решения задач межпланетных перелетов в рамках модели ОЗТТ с использованием метода сопряженных конических сечений регулярно требуется вычисление “передаточного параметра” V_∞ в условиях проведения GAM – при переключении с гелиоцентрических дуг на планетоцентрические участки и обратно. В рамках круговой ОЗТТ поиск V_∞ может производиться с использованием интеграла Якоби J, на основе *универсального свойства* интеграла Якоби для GAM в постановке круговой ОЗТТ: $\mathrm{const} = J \approx T_{\mathrm{Ti}} \approx 3 - V_\infty^2$. Согласно этому свойству величина V_∞ не изменяется при совершении многократных гравитационных маневров, сохраняющих константу интеграла Якоби.

В астродинамике это свойство известно, но выводится достаточно громоздким способом [7, 9, 16]. В настоящей работе предложен более короткий метод получения универсального свойства интеграла Якоби для GAM в постановке ограниченной круговой задачи трех тел и представлены новые, уточненные формы интеграла Якоби.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Резюме классического вывода универсального свойства серии гравитационных маневров: $V_\infty = \mathrm{const}$. Представим основные этапы традиционного получения в астродинамике универсального свойства $V_\infty = \mathrm{const}$ для гравитационных маневров, сохраняющих постоянную интеграла Якоби [9, 16].

1. Выписывается выражение для J во вращающейся (синодической) барицентрической системе координат $BXYZ$:

$$J = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - V^2.$$

2. С использованием теоремы сложения скоростей и интеграла площадей переходят к выражению интеграла Якоби в инерциальной (сидерической) системе координат $B\xi\eta\zeta$:

$$J = 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} - v^2.$$

3. С использованием оскулирующих орбитальных элементов, при допущении верности предельного перехода $\mu/r_2 \to 0$ (то есть μ мало и КА находится за пределами сферы действия планеты), в качестве промежуточного вспомогательного результата выводится классический критерий Тиссерана:

$$J \approx T_{\rm Ti} \approx \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}\cos i. \qquad (\Pi 1)$$

4. На этом, в рамках классической модели круговой ОЗТТ [6, 17], ход традиционных преобразований заканчивается. Для вычисления V_∞ и вывода *универсального свойства* подключается модель GAM, а формула для модуля асимптотической скорости КА относительно планеты V_∞ выводится с помощью следующих геометрических рассуждений. Согласно формулам (16), (19) из [16] либо (A19), (A20) [9], с использованием (3) и (5) при $r_1 \to 1$, $\mu \to 0$ и теоремы косинусов для основного треугольника GAM верно:

$$\tilde{V}_\infty^2 = \tilde{v}^2 + \tilde{V}_p^2 - 2\tilde{v}\tilde{V}_p\cos A,$$

$$V_\infty^2 = v^2 + 1 - 2v\cos\gamma\cos i,$$

$$v^2 = V_\infty^2 - 1 + 2v\cos\gamma\cos i,$$

где $\cos A = \cos\gamma\cos i$, γ – траекторный угол орбиты КА при пересечении сферы действия планеты.

5. Выпишем выражения для $\frac{1}{a}$ и h:

$$\frac{1}{a} = 2 - v^2, \quad v\cos\gamma = h,$$

$$\frac{1}{a} \approx 2 - V_\infty^2 + 1 - 2h\cos i,$$

откуда

$$V_\infty^2 \approx 3 - \frac{1}{a} - 2h\cos i.$$

6. В результате, с использованием (П1) и выражения $h = \sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}$, приходим, наконец, к получению *универсального свойства* круговой ОЗТТ для серии GAM:

$$\begin{gathered}\mathrm{const} = J \approx T_{\rm Ti} \approx \frac{1}{a} + 2h\cos i = \\ = 3 - 2h\cos i - V_\infty^2 + 2h\cos i = 3 - V_\infty^2.\end{gathered} \qquad (\Pi 2)$$

Формула (П2) выражает важнейшее свойство серии GAM в модели круговой ОЗТТ: $V_\infty = \mathrm{const}$, что позволяет, в целях эффективного баллистического проектирования космических миссий с использованием GAM, оперировать в ее рамках с такими геометрически прозрачными объектами, как V_∞-globe (сфера с радиусом V_∞, центр которой находится на конце вектора скорости $\mathbf{V}_p$ планеты) и ее проекциями на плоскость Tour maps [19]. Как при движении КА по гелиоцентрической дуге, так и при совершении им гравитационного маневра конец вектора асимптотической скорости $\mathbf{V}_\infty$ всегда будет оставаться на V_∞-сфере (рис. 1). Отметим, что, в частности, непосредственно при совершении GAM, в рамках задачи двух тел, пополненной понятием сферы действия малого тела, свойство $V_\infty = \mathrm{const}$ следует из того, что КА движется относительно планеты в сфере действия планеты по планетоцентрической гиперболе [4, с. 267].

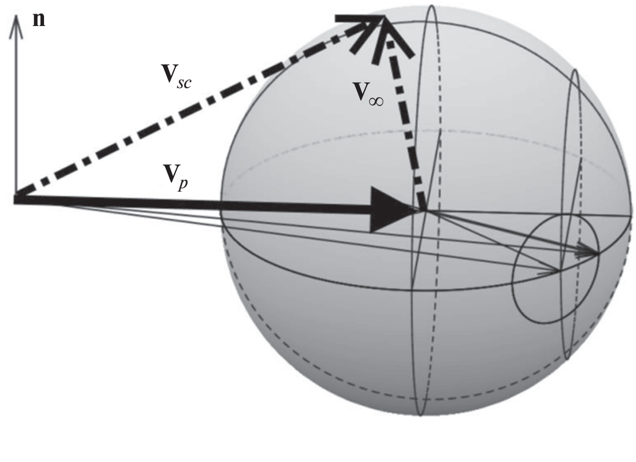

Рис. 1. V_∞-сфера всевозможных положений конца вектора $\mathbf{V}_\infty$ при совершении гравитационного маневра.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Симметричная формула интеграла Якоби и уточнение источников в западной литературе. В астродинамике используется как представленная выше, классическая форма интеграла Якоби [7, 8, 17], так и вторая, симметричная его форма, получающаяся добавлением к $\tilde{U}, U$ констант $\frac{\mu_1\mu_2}{2a_p(\mu_1+\mu_2)}$ и $\mu(1-\mu)/2$ соответственно, которые не меняют уравнений движения [7, 9, 16]. Для симметричных форм $\tilde{U}^*, J^*$ будем иметь $2\tilde{U}^* = 2\tilde{U} + \mu_1\mu_2$, $J^* = J + \mu(1-\mu)$.

Тогда

$$\begin{gathered}\tilde{J}^* = 2\tilde{U}^* - \tilde{V}_{sc\_rot}^2 = n^2(\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2) + \\ + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} + 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} + \frac{\mu_1\mu_2}{(\mu_1+\mu_2)a_p} - \tilde{V}_{sc\_rot}^2,\end{gathered}$$

$$J^* = 2U^* - V^2 = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + \\ + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - V^2.$$

Осуществим переход к сидерической системе координат $B\xi\eta\zeta$, в которой ось $B\zeta$ сонаправлена с осью BZ. После ряда преобразований обе формы интеграла Якоби в размерном и безразмерном виде в сидерической системе координат можно записать как [7, 17]:

$$\tilde{J}^* = 2n(\tilde{\xi}\dot{\tilde{\eta}} - \tilde{\eta}\dot{\tilde{\xi}}) + 2\frac{\mu_1}{\tilde{R}_1} - 2\frac{\mu_2}{\tilde{R}_2} + \mu_1\mu_2 - \tilde{v}^2,$$

$$J^* = 2(\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi}) + 2\frac{1-\mu}{r_1} - 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu) - v^2.$$

Можно записать также интеграл Якоби с использованием оскулирующих орбитальных элементов движения КА по эллиптической орбите относительно центрального тела [5, 17]:

$$J^* = \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)(1-\mu)}\cos i + \\ + 2\frac{\mu}{r_2} + \mu(1-\mu).$$

В приведенной записи оскулирующие элементы a, e, i не постоянны, но меняются на решении круговой ОЗТТ.

Осуществим перевод начала инерциальной системы координат из барицентра в центр масс центрального тела с помощью преобразования $X = x - \mu$, $Y = y$, $Z = z$ [7]:

$$U^* = (X^2 + Y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + (1-\mu)\mu = \\ = (1-\mu)r_1^2 + \mu r_2^2 + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2},$$

$$J^* = ((x-\mu)^2 + y^2) + 2\frac{1-\mu}{r_1} + 2\frac{\mu}{r_2} + \\ + (1-\mu)\mu - v^2 - (x^2 + y^2) + 2h\cos i.$$

Здесь уже $r_1^2 = (x-\mu)^2 + y^2 + z^2$, $r_2^2 = (x-\mu+1)^2 + y^2 + z^2$ (и функция $U^* = U^*(x, y, z)$ в пространственном случае, очевидно, уже будет зависеть от z). Теперь, с использованием оскулирующих орбитальных элементов, выражение для интеграла Якоби будет иметь вид

$$J^* = \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{a(1-e^2)(1-\mu)}\cos i + \\ + 2\frac{\mu}{r_2} - 2x\mu + \mu. \quad (П3)$$

Формула (П3) является нашим исправлением [3] формулы (A17) в обзорной по рассматриваемой тематике работе [10], в которой допущена ошибка. В этой же работе, в формуле (A9), тоже допущены ошибки. Отметим, что эти ошибки не влияют на справедливость последующих выкладок. В работах [11, 12], ссылающихся на [10], также репродуцированы описки (формулы (7) и (3) соответственно): пропущена степень два у скорости в записи интеграла Якоби. Указанная ситуация не нова в рассматриваемой практике записи интеграла Якоби: формулы ограниченной задачи трех тел корректируются со времен Пуанкаре [6, 7].

При предельном переходе $\mu/r_2 \to 0$, $x\mu \to 0$ в (П3) по-прежнему получается *классический* критерий Тиссерана (Ti-критерий) тождественности комет:

$$J \approx T_{\mathrm{Ti}} \equiv \frac{1-\mu}{a} + 2\sqrt{(1-\mu)a(1-e^2)}\cos i.$$

Как уже отмечалось, T_{Ti} может быть использован для идентификации разнесенных по времени астрономических наблюдений “пробных частиц” — комет, поскольку сами элементы орбиты комет могут неоднократно меняться при прохождении ими сферы действия планеты Юпитер. В сфере действия планеты T_{Ti} является оскулирующей величиной, но при выходе из нее снова принимает стационарное значение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белбруно Э.* Динамика захвата и хаотические движения в небесной механике с приложениями к конструированию малоэнергетических перелетов. Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2011.
2. *Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В., Корянов В.В., Тучин А.Г.* Гравитационные маневры космического аппарата в системе Юпитера // Известия РАН. Теория и системы управления. 2014. № 3. С. 149–167.
3. *Голубев Ю.Ф.* Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание, переработанное и дополненное. М.: МГУ, 2019.
4. *Охоцимский Д.Е.* Динамика космических полетов. М.: МГУ, 1968.
5. *Пуанкаре А.* Избранные труды в 3 т. Т. 1. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971.
6. *Себехей В.* Теория орбит. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1982.
7. *Субботин М.Ф.* Введение в теоретическую астрономию. М.: Наука, 1968.
8. *Боровин Г.К., Голубев Ю.Ф., Грушевский А.В. и др.* Баллистико-навигационное обеспечение полетов автоматических космических аппаратов к телам Солнечной системы / Под ред. Тучина А.Г. Химки: “НПО Лавочкина”, 2018.

9. *Campagnola S., Russell R.P.* The Endgame problem part B: the multi-body technique and the T-P graph. Preprint AAS 09-227. 2009.

10. *Campagnola S., Russell R.P.* Endgame Problem. Part 2: Multi-Body Technique and TP Graph // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2010. V. 33. № 2. P. 476–486. https://doi.org/10.2514/1.44290

11. *Campagnola S., Skerritt P., Russell R.P.* Flybys in the planar, circular, restricted, three-body problem // Astrodynamics 2011: Proc. of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Girdwood, Alaska. 2011. AAS Paper 11–425.

12. *Campagnola S., Boutonnet A., Schoenmaekers J., Grebov D.J., Petropoulos A.E., Russell R.P.* Tisserand-Leveraging Transfers // AAS/AIAA Space Flight Mech. Meeting, Charleston, SC, 2012. AAS Paper 12-185.

13. *Jacobi C.G.J.* Sur le Movement d'un Point et sur un cas Particulier du Probleme des Trois Corps // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 1836. V. 3. P. 59–61.

14. *JPL Planetary Satellite Physical Parameters*. URL: https://ssd.jpl.nasa.gov/?sat_phys_par

15. *Labunsky A.V., Papkov O.V., Sukhanov K.G.* Multiple Gravity Assist Interplanetary Trajectories. Earth Space Institute Book Series. L.: Gordon and Breach Publishers, 1998. P. 33–68.

16. *Miller J.K., Weeks C.J.* Application of Tisserand's Criterion to the Design of Gravity Assist Trajectories // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit, Monterey, GA, 2002. AIAA 2002-4717.

17. *Murray C.D., Dermot S.F.* Solar System Dynamics. Cambridge, England: Cambridge University Press. 1999. P. 68–71.

18. *Standish E.M.* 1998. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405.

19. *Strange N.J., Russell R., Buffington B.* Mapping the V_∞ Globe // AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit. Mackinac Island, MI, 2007. AAS Paper 07-277.

20. *Tisserand F.F.* Traité de Méchanique Céleste. V. 4. Paris: Gauthier-Villars et fils. 1896. P. 203–205.