

УДК 629.198

РЕКОНСТРУКЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ КОРАБЛЕЙ ПРОГРЕСС В РЕЖИМЕ ОДНООСНОЙ СОЛНЕЧНОЙ ОРИЕНТАЦИИ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ ТОКА СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ

© 2021 г. М. Ю. Беляев¹, Т. В. Матвеева¹, М. И. Монахов¹, Д. Н. Рулев¹, В. В. Сазонов², *

¹Ракетно-космическая корпорация “Энергия” им. С.П. Королева, Королев, Россия

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

*sazonov@keldysh.ru

Поступила в редакцию 04.07.2019 г.

После доработки 24.11.2019 г.

Принята к публикации 19.12.2019 г.

Реконструировано неуправляемое вращательное движение транспортных грузовых кораблей *Прогресс М-24М* и *М-25М* в режиме одноосной солнечной ориентации (так называемая закрутка на Солнце). Начальные условия движения в этом режиме – закрутка корабля с угловой скоростью 2.2–2.4 град/с вокруг нормали к плоскости солнечных батарей, направленной на Солнце. Продолжительность режима – несколько орбитальных витков. Реконструкция выполнена с помощью интегральной статистической методики по телеметрическим значениям тока, снимаемого с его солнечных батарей. В результате определяется вращательное движение корабля относительно направления Земля–Солнце. Проведено исследование спектра колебаний тока во время закрутки, поясняющее возможность реконструкции на основании таких, на первый взгляд, малоинформативных данных.

DOI: 10.31857/S0023420621020011

ОДНООСНАЯ СОЛНЕЧНАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ТГК ПРОГРЕСС

Одноосная солнечная ориентация (закрутка на Солнце) – один из штатных режимов автономного полета транспортный грузовых кораблей (ТГК) *Прогресс*. Начальные условия движения в этом режиме – закрутка корабля с угловой скоростью 2.2–2.4 град/с вокруг направленной на Солнце нормали к плоскости солнечных батарей (СБ). Нормаль образует малый угол с главной центральной осью максимального момента инерции ТГК, поэтому ориентированное движение близко стационарному вращению корабля вокруг этой оси. По своим амплитудно-частотным характеристикам микроускорения на борту ТГК в этом режиме очень удачно подходят для экспериментов с датчиком конвекции ДАКОН [1, 2]. С одной стороны, они достаточно велики в области низких частот, а с другой стороны, имеют чисто дискретный спектр с небольшим числом гармоник. Это упростит анализ показаний датчика.

Для такого анализа необходимо знать реальные квазистатические микроускорения, имевшие место во время проведения экспериментов. Микроускорения можно найти расчетным путем,

реконструировав вращательное движение ТГК. Реконструкция движения, происходившего во время закруток, выполняется по телеметрическим значениям компонент угловой скорости корабля в его строительной системе координат и тока, вырабатываемого солнечными батареями [3–5]. Данные измерений, собранные на некотором интервале времени, обрабатываются совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения ТГК относительно центра масс. В результате обработки оцениваются начальные условия движения корабля относительно направления Земля–Солнце и параметры используемых математических моделей.

Если измерения угловой скорости отсутствуют, то движение корабля в режиме солнечной закрутки можно реконструировать только по измерениям тока СБ. Точность при этом будет ниже, чем при использовании двух видов измерений, но микроускорения найти удастся. Ниже проведено исследование, поясняющее возможность реконструкции по таким малоинформативным, на первый взгляд, данным. Приведены примеры реконструкции неуправляемого вращательного движения ТГК *Прогресс М-24М* (№ 423) и *М-25М* (№ 424).

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТГК
И ДАННЫЕ ИЗМЕРЕНИЙ ТОКА
СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ**

ТГК считается твердым телом. Для записи уравнений движения корабля относительно центра масс и соотношений, используемых при обработке данных измерений введем две правые декартовые системы координат. Строительная система $Oy_1y_2y_3$ жестко связана с корпусом ТГК. Точка O — центр масс корабля, ось Oy_1 параллельна его продольной оси и направлена от стыковочного узла к агрегатному отсеку, ось Oy_2 перпендикулярна плоскости солнечных батарей (СБ). Светочувствительная сторона СБ обращена к полупространству $y_2 > 0$. Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции ТГК. Оси Ox_i составляют малые углы с осями Oy_i ($i = 1, 2, 3$).

Положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oy_1y_2y_3$ будем задавать углами γ , α и β , которые введем посредством следующего условия. Система $Oy_1y_2y_3$ может быть переведена в систему $Ox_1x_2x_3$ тремя последовательными поворотами. Первый поворот совершается вокруг оси Oy_2 на угол α . Второй поворот совершается на угол β вокруг оси Oy_3 , полученной после первого поворота. Третий поворот совершается на угол γ вокруг оси Oy_1 , полученной после первых двух поворотов. Такая ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1 . Матрицу перехода от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $Oy_1y_2y_3$ обозначим $\|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$, a_{ij} — косинус угла между осями Oy_i и Ox_j . Элементы этой матрицы выражаются через введенные углы по известным формулам (см., например, [5]). Ниже используются только направляющие косинусы оси Oy_2 в системе $Ox_1x_2x_3$: $a_{21} = \sin \beta$, $a_{22} = \cos \beta \cos \gamma$, $a_{23} = -\cos \beta \sin \gamma$.

Введем обозначения: s_i — компоненты орта S направления Земля—Солнце, ω_i — компоненты абсолютной угловой скорости ТГК ($i = 1, 2, 3$). Оба набора компонент относятся к системе координат $Ox_1x_2x_3$. Уравнения движения ТГК относительно центра масс образованы динамическими уравнениями Эйлера

$$\dot{\omega}_1 = \mu \omega_2 \omega_3, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{\mu' - \mu}{1 - \mu\mu'} \omega_1 \omega_3, \quad (1)$$

$$\dot{\omega}_3 = -\mu' \omega_1 \omega_2$$

и кинематическими уравнениями Пуассона

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 &= s_2 \omega_3 - s_3 \omega_2, & \dot{s}_2 &= s_3 \omega_1 - s_1 \omega_3, \\ \dot{s}_3 &= s_1 \omega_2 - s_2 \omega_1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь точка над символом означает дифференцирование по времени t ,

$$\mu = \frac{J_2 - J_3}{J_1}, \quad \mu' = \frac{J_2 - J_1}{J_3}.$$

J_i — моменты инерции ТГК относительно осей Ox_i . Уравнения (1), (2) являются упрощенными: в (1) не учитываются действующие на ТГК внешние механические моменты, в (2) предполагается, что направление Земля—Солнце неизменно в инерциальном пространстве. Согласно результатам [3] точность этих уравнений достаточна для описания закруток ТГК на интервалах времени несколько часов.

Если считать, что на СБ вырабатывает ток только под действием солнечных лучей, падающих на их светочувствительную поверхность, то расчетный аналог тока СБ выражается формулой

$$I = I_0(a_{21}s_1 + a_{22}s_2 + a_{23}s_3). \quad (3)$$

Здесь I_0 — ток СБ при нулевом угле падения на них солнечных лучей. Соотношения (1)–(3) не содержат угла α . Этот параметр по измерениям тока оценить нельзя.

Углы γ , α , β и параметры μ , μ' оцениваются по измерениям угловой скорости, выполненным в режиме закрутки на Солнце. В табл. 1, взятой из [4], приведены оценки этих величин для ТГК № 423 вместе с их стандартными отклонениями. Как будет показано ниже, при обработке измерений тока СБ в принципе можно уточнить μ , μ' , γ , и β .

Данные измерений тока СБ представляют собой три ряда значений, получаемые от трех датчиков:

$$t_n, I_1^{(n)}, I_2^{(n)}, I_3^{(n)} \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

Здесь $I_j^{(n)}$ — приближенное значение тока, фиксируемое в момент времени t_n датчиком с номером j ($j = 1, 2, 3$), $t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Показания датчиков почти одинаковы, поэтому измерением тока в момент t_n считается величина $I_n = [I_1^{(n)} + I_2^{(n)} + I_3^{(n)}]/3$. На отрезках времени более 15 мин величины I_n не удается аппроксимировать выражением (3), рассчитываемым вдоль решений системы (1), (2). На таких отрезках в данных I_n проявляется низкочастотная составляющая, не связанная с вращательным движением ТГК [4, 5]. Перед реконструкцией движения она исключается (см. ниже).

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ
РЕКОНСТРУКЦИИ ДВИЖЕНИЯ ТГК
ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТОКА
СОЛНЕЧНЫХ БАТАРЕЙ**

Движение ТГК в режиме солнечной закрутки происходит с большой угловой скоростью в окрест-

Таблица 1. Оценки параметров тензора инерции ТГК № 423 (ноябрь 2014)

μ	$\sigma_\mu \cdot 10^4$	μ'	$\sigma_{\mu'} \cdot 10^3$	γ	$\sigma_\gamma \cdot 10^5$	α	$\sigma_\alpha \cdot 10^3$	β	$\sigma_\beta \cdot 10^4$
0.193	7.7	0.867	3.5	-0.0711	8.5	0.0059	2.4	-0.0033	1.8
0.182	51	0.899	25	-0.0716	56	0.0137	15	-0.0033	13
0.196	28	0.859	12	-0.0718	24	-0.0046	8.8	-0.0019	6.7
0.196	22	0.867	11	-0.0705	21	0.0072	6.9	-0.0034	5.9
0.197	27	0.863	12	-0.0727	20	0.0072	8.3	-0.0031	6.4
0.194	15	0.877	6.6	-0.0698	10	0.0100	4.6	-0.0026	3.3
0.196	46	0.863	20	-0.0729	26	-0.0026	14	-0.0026	11
0.196	54	0.834	23	-0.0725	28	0.0149	17	-0.0035	13

ности стационарного решения уравнений (1), принадлежащего семейству

$$\omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \Omega. \quad (4)$$

Здесь Ω – произвольная постоянная, которую считаем положительной (таковы рассматриваемые ниже закрутки). Решения этого семейства описывают стационарные вращения ТГК вокруг его главной центральной оси максимального момента инерции. Общее решение уравнений (1), лежащих в окрестности стационарного решения (4) можно описать приближенными формулами

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_1 &= \lambda(A \sin vt + B \cos vt), \quad \hat{\omega}_2 = \Omega + \Delta \hat{\omega}_2, \\ \Delta \hat{\omega}_2 &= \frac{\mu' - \mu}{4\Omega\mu'(1 - \mu\mu')} \cdot \\ &\cdot [2AB \sin 2vt - (A^2 - B^2) \cos 2vt], \\ \hat{\omega}_3 &= A \cos vt - B \sin vt, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\mu}{\mu'}}, \quad v = \Omega\sqrt{\mu\mu'}. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь A , B и Ω – произвольные постоянные, $A^2 + B^2 \ll \Omega^2$. На ограниченном отрезке времени погрешность этих формул составляет $O(|A|^3 + |B|^3)$ для ω_1 , ω_3 и $O(A^4 + B^4)$ для ω_2 .

Уравнения (2) системы (1), (2) имеют точное решение

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1 - \mu'}{G} \omega_1, \quad s_2 = \frac{1 - \mu\mu'}{G} \omega_2, \quad s_3 = \frac{1 - \mu}{G} \omega_3, \\ G^2 &= (1 - \mu')^2 \omega_1^2 + (1 - \mu\mu')^2 \omega_2^2 + (1 - \mu)^2 \omega_3^2, \end{aligned} \quad (6)$$

где G^2 – первый интеграл уравнений (1). Это решение описывает движение орта кинетического момента вращательного движения ТГК в системе координат $Ox_1x_2x_3$. В начале движения ТГК в режиме закрутки на Солнце орт его кинетического момента направлен почти по орту S Земля–Солнце. В решении (6) и решении уравнений (2), опи-

сывающем движение орта S , выполнены соотношения $s_2 \approx 1$, $|s_1| \ll 1$, $|s_3| \ll 1$. Положим $s_2 = 1 + \Delta s_2$, где вследствие соотношения

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \quad (7)$$

имеем $\Delta s_2 \approx -(s_1^2 + s_3^2)/2$. Переменные s_1 , s_3 и Δs_2 определяются приближенными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{s}_1 + \Omega s_3 &= \hat{\omega}_3, \quad \dot{s}_3 - \Omega s_1 = -\hat{\omega}_1, \\ \Delta \dot{s}_2 + s_3 \hat{\omega}_1 - s_1 \hat{\omega}_3 &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

которые получены подстановкой формул (5) в уравнения (2) и выделением главных членов.

Соотношения (6) позволяют выписать частное решение неоднородной системы (8) и найти согласованное с условием (7) постоянное слагаемое в Δs_2 :

$$\begin{aligned} s_1^* &= \frac{(1 - \mu')\hat{\omega}_1}{(1 - \mu\mu')\Omega}, \quad s_3^* = \frac{(1 - \mu)\hat{\omega}_3}{(1 - \mu\mu')\Omega}, \\ \Delta s_2^* &= \frac{\Delta \hat{\omega}_2}{\Omega} - \frac{\lambda(1 - \mu')^2 + (1 - \mu)^2}{4\Omega^2(1 - \mu\mu')^2} (A^2 + B^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Общее ненормированное решение однородной системы (8) имеет вид

$$\begin{aligned} s_1^\circ &= c_1 \cos \Omega t - c_2 \sin \Omega t, \\ s_3^\circ &= c_1 \sin \Omega t + c_2 \cos \Omega t, \\ \Delta s_2^\circ &= \frac{\lambda - 1}{2(\Omega - v)} [(Ac_1 + Bc_2) \sin(\Omega - v)t + \\ &+ (Ac_2 - Bc_1) \cos(\Omega - v)t] - \\ &- \frac{\lambda + 1}{2(\Omega + v)} [(Ac_1 - Bc_2) \sin(\Omega + v)t + \\ &+ (Ac_2 + Bc_1) \cos(\Omega + v)t] + c_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь c_1 , c_2 и c_3 – произвольные постоянные. Решение уравнений (2), описывающее движение орта S в системе координат $Ox_1x_2x_3$ в начале ориентированного движения, приближенно выража-

ется линейной комбинацией решений (9), (10), причем вклад решения (9) доминирует.

Согласно формуле (3) телеметрические значения тока СБ содержат гармоники с частотами Ω , $\Omega \pm \nu$, ν и 2ν . Частоты Ω и ν входят в (3) через s_1 и s_3 . Им отвечают амплитуды:

$$\sqrt{c_1^2 + c_2^2} \text{ в } s_1 \text{ и } s_3, \frac{\lambda(1-\mu')\sqrt{A^2 + B^2}}{(1-\mu\mu')\Omega} \text{ в } s_1, \\ \frac{(1-\mu)\sqrt{A^2 + B^2}}{(1-\mu\mu')\Omega} \text{ в } s_3.$$

Частоты $\Omega - \nu$ и $\Omega + \nu$ входят в выражение (3) через s_2 с амплитудами

$$\frac{1-\lambda}{2(\Omega-\nu)}\sqrt{(A^2+B^2)(c_1^2+c_2^2)} \\ \text{и } \frac{1+\lambda}{2(\Omega+\nu)}\sqrt{(A^2+B^2)(c_1^2+c_2^2)}.$$

Частота 2ν также входит через s_2 , но ей отвечает малая амплитуда. Из сказанного следует, что, выполнив спектральный анализ телеметрических значений тока СБ, можно найти частоты Ω , ν и величину $\sqrt{\mu\mu'} = \nu/\Omega$. Отношение R амплитуд с частотами $\Omega - \nu$ и $\Omega + \nu$ имеет вид

$$R = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{\Omega+\nu}{\Omega-\nu}.$$

Найдя это отношение из периодограмм, можно оценить

$$\lambda = \frac{1-R'}{1+R'}, \quad R' = R \frac{\Omega-\nu}{\Omega+\nu},$$

и найти $\mu = \lambda\sqrt{\mu\mu'}$ и $\mu' = \sqrt{\mu\mu'}/\lambda$. Далее, анализируя гармоники с частотами Ω и ν , можно найти отношения $\Omega\sqrt{c_1^2 + c_2^2}/\sqrt{A^2 + B^2}$, c_1/c_2 и A/B и т.д. Таким образом, телеметрические значения тока СБ содержат достаточно богатую информацию о движении ТГК в режиме закрутки на Солнце, причем даже сравнительно простой анализ позволяет получить некоторые оценки, связанные с таким движением. Применение спектрального анализа этим не ограничивается: он позволяет устранить низкочастотную составляющую в значениях тока.

Приведем основные соотношения используемого спектрального анализа [6]. Пусть I_n ($n = 1, 2, \dots, N$) – исследуемые данные измерений. Значение I_n отвечает моменту времени (точке) t_n , причем $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N$. Для большинства соседних точек $t_{n+1} - t_n \approx 1$ с, но иногда в данных

встречаются пропуски. Сначала из исследуемых данных выделяются отдельные гармонические составляющие (гармоники). С этой целью данные аппроксимируются функцией

$$I(t) = a_0 + a \cos 2\pi ft + b \sin 2\pi ft, \quad (11)$$

где a_0 , a , b и f – параметры. Значения параметров разыскиваются методом наименьших квадратов. Составим выражение

$$\Psi = \sum_{n=1}^N [I_n - I(t_n)]^2. \quad (12)$$

Согласно методу наименьших квадратов определение параметров a_0 , a , b и f сводится к минимизации по ним выражения (12).

Функция $\Psi = \Psi(a_0, a, b, f)$ имеет, как правило, много локальных минимумов, поэтому ее минимизация проводится поэтапно. Сначала в результате решения ряда одинаковых линейных задач наименьших квадратов вычисляются значения функции

$$\Psi_1(f) = \min_{a_0, a, b} \Psi(a_0, a, b, f)$$

в узлах достаточно мелкой равномерной сетки на отрезке $0 \leq f \leq F$, строится график этой функции, и находятся приближенные значения точек минимума. Значения f для достаточно значимых (по величине Ψ_1) минимумов являются частотами искомым гармоник. В случае $t_{n+1} - t_n = 1$ с для полного анализа данных надо взять $F = 0.5$ Гц, но в данной задаче оказалось возможным принять $F = 0.025$ Гц. Пусть описанным способом найдены частоты f_k ($k = 1, 2, \dots, M$; $M \ll N$). Отвечающий этим частотам тренд ищем в виде

$$I(t) = a_0 + \sum_{k=1}^M (a_k \cos 2\pi\lambda_k t + b_k \sin 2\pi\lambda_k t), \quad (13)$$

где a_0 , a_k , b_k и $\lambda_k \approx f_k$ ($k = 1, 2, \dots, M$) – постоянные параметры. Значения этих параметров находятся минимизацией функции, заданной соотношениями (12), (13). В минимизации этой функции состоит второй этап поиска гармоник, содержащихся в телеметрических значениях тока СБ. Решаемая на втором этапе задача метода наименьших квадратов является нелинейной. Ее решение находилось методом Гаусса–Ньютона [7]. Начальным приближением служили значения частот $\lambda_k = f_k$ и значения коэффициентов a_k , b_k , определяемых из линейной задачи метода наименьших квадратов (12), (13) при указанном начальном наборе частот.

Чтобы проверить результат первого этапа, наряду с функцией $\Psi_1(f)$ рассматривалась функция

$$P(f) = \left[\sum_{n=1}^N (I_n - \bar{I}) \cos 2\pi f t_n \right]^2 + \left[\sum_{n=1}^N (I_n - \bar{I}) \sin 2\pi f t_n \right]^2, \\ \bar{I} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N I_n,$$

называемая периодограммой Шустера. Пусть исследуемая функция $I(t)$ имеет вид (13). Тогда $a_0 = \bar{I}$, периодограмма имеет локальные максимумы в точках $f_k \approx \lambda_k$, причем $a_k^2 + b_k^2 \approx 4P(f_k)N^{-2}$ ($k = 1, 2, \dots, M$). Точность выписанных соотношений увеличивается с ростом N . Таким образом, исследование максимумов периодограммы позволяет получить оценки частот и амплитуд гармонических составляющих функции $I(t)$.

Ниже для наглядности вместо графиков функций $\Psi_1(f)$ и $I(f)$ приводятся графики функций

$$E(f) = \sqrt{\frac{\Psi_1(f)}{N-3}}, \quad A(f) = \frac{2}{N} \sqrt{P(f)}. \quad (14)$$

Минимумы функции $E(f)$ дают оценки среднеквадратичной ошибки аппроксимации функции $x(t)$ выражением (11), максимумы функции $A(f)$ — оценки амплитуды $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Результаты спектрального анализа данных измерений тока СБ, а также результаты предваряющего этот анализ исключения из данных измерений низкочастотной составляющей приведены на рис. 1, 3, 5 и 7. Все рисунки в данной работе сгруппированы по отрезкам измерений, поэтому нумерация рисунков, относящихся к спектральному анализу, не является сплошной. Преобразованию и анализу были подвергнуты отрезки данных, основные характеристики которых приведены в табл. 2. Для каждого отрезка в таблице указаны его номер, начальная точка t_1 (дата и время), продолжительность $t_N - t_1$, число N включенных в обработку моментов времени с измерениями и некоторые результаты обработки. Началом отсчета времени t на всех рисунках данной работы служит точка t_1 .

Подготовка данных для спектрального анализа и реконструкции движения состояла в их предварительной коррекции. Из измерений тока исключалась составляющая, которая, по-видимому, обусловлена светом, отраженным от земной поверхности. Эту составляющую трудно выделить точно. Приближенное выделение основано на частотных соображениях. Составляющая, обу-

словленная отраженным от Земли светом, — низкочастотная. Она довольно сложно зависит от времени, и в ее представлении рядом Фурье необходимо учесть несколько гармоник с частотами, кратными $\omega_{\text{осв}} = \pi/(t_N - t_1)$. Здесь $[t_1, t_N]$ — обрабатываемый интервал времени с измерениями, его длина не превышает времени полета ТГК по освещенному участку орбиты. Составляющая тока, обусловленная прямым солнечным светом, — высокочастотная. Ее основные частоты Ω , ν и $\Omega \pm \nu$ существенно больше $\omega_{\text{осв}}$. В такой ситуации составляющую, обусловленную отраженным от Земли светом, можно выделить с помощью низкочастотной фильтрации.

Использованный способ фильтрации состоял в следующем. Сначала строилась аппроксимация низкочастотной составляющей с помощью выражения (конечного ряда Фурье)

$$\chi(t) = a_{M+1} + a_{M+2}(t - t_1) + \sum_{m=1}^M a_m \sin \frac{\pi m(t - t_1)}{t_N - t_1}, \quad (15)$$

коэффициенты которого a_1, a_2, \dots, a_{M+2} наилучшим образом в смысле метода наименьших квадратов сглаживают точки (t_n, I_n) , $n = 1, 2, \dots, N$. Графики этих выражений изображены плавными линиями в верхней части перечисленных рисунков, имеющих индекс (а). В тех же системах координат изображены графики исходных данных. Они представляют собой ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки (t_n, I_n) . Число M в (15) выбиралось методом проб и ошибок для каждого отрезка данных. Правила выбора приведены ниже. Окончательное значение этого числа, при котором построено используемое в дальнейшей обработке выражение (15), приведено в табл. 2.

Выбор M контролировался спектральным анализом. Для пробного выражения (13) вычислялось его среднее значение $\langle \chi \rangle$ на сетке $\{t_n\}$. Функция $\chi(t) - \langle \chi \rangle$ считалась той посторонней составляющей, которую следует удалить из данных измерений. Удаление состояло в замене величин I_n величинами $I_n - \chi(t_n) + \langle \chi \rangle$ с сохранением прежних обозначений. Примеры ломаных, проходящих через новые точки (t_n, I_n) , приведены в нижней части рисунков с индексом (а). Для модифицированных таким образом значений тока вычислялись периодограммы (14). Примеры графиков этих периодограмм приведены на рисунках с индексом (б). На графиках видны несколько значимых пиков (минимумов функции $E(f)$ и максимумов функции $A(f)$), отвечающих гармоническим составляющим в данных измерений. Выделялись 4 наиболее значимых пика. Частоты

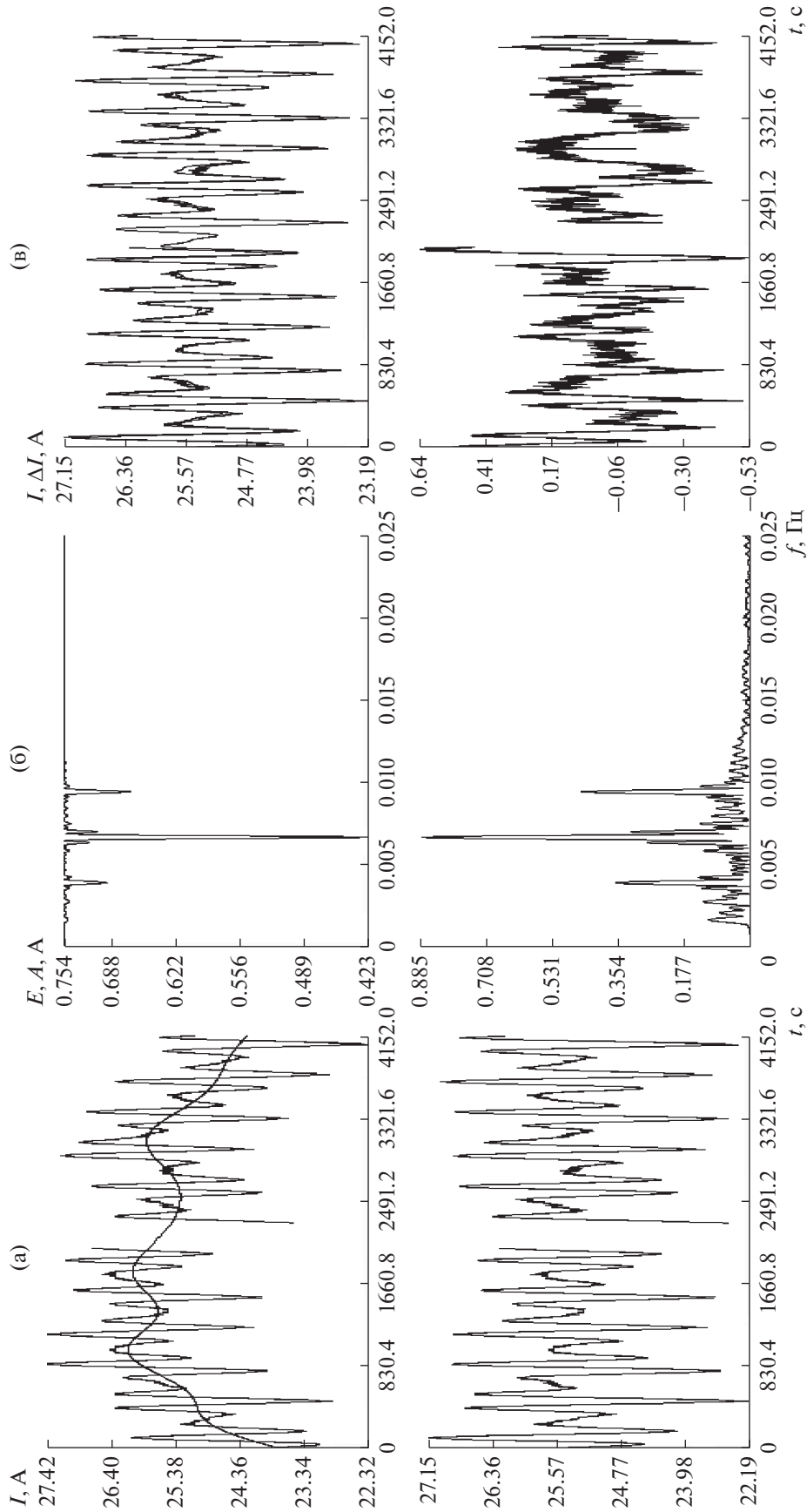


Рис. 1. Коррекция и спектральный анализ измерений на интервале 1; (а) удаление низкочастотной составляющей ($M = 12$), (б) спектры скорректированных измерений, (в) аппроксимация измерений суммой гармоник с частотами 0.00277, 0.00391, 0.00668, 0.00945 Гц и амплитудами 0.13, 0.33, 0.85, 0.42 А, СКО = 0.18 А. Оценки параметров модели: $\Omega = 2.40$ град/с, $\mu = 0.210$, $\mu' = 0.822$.

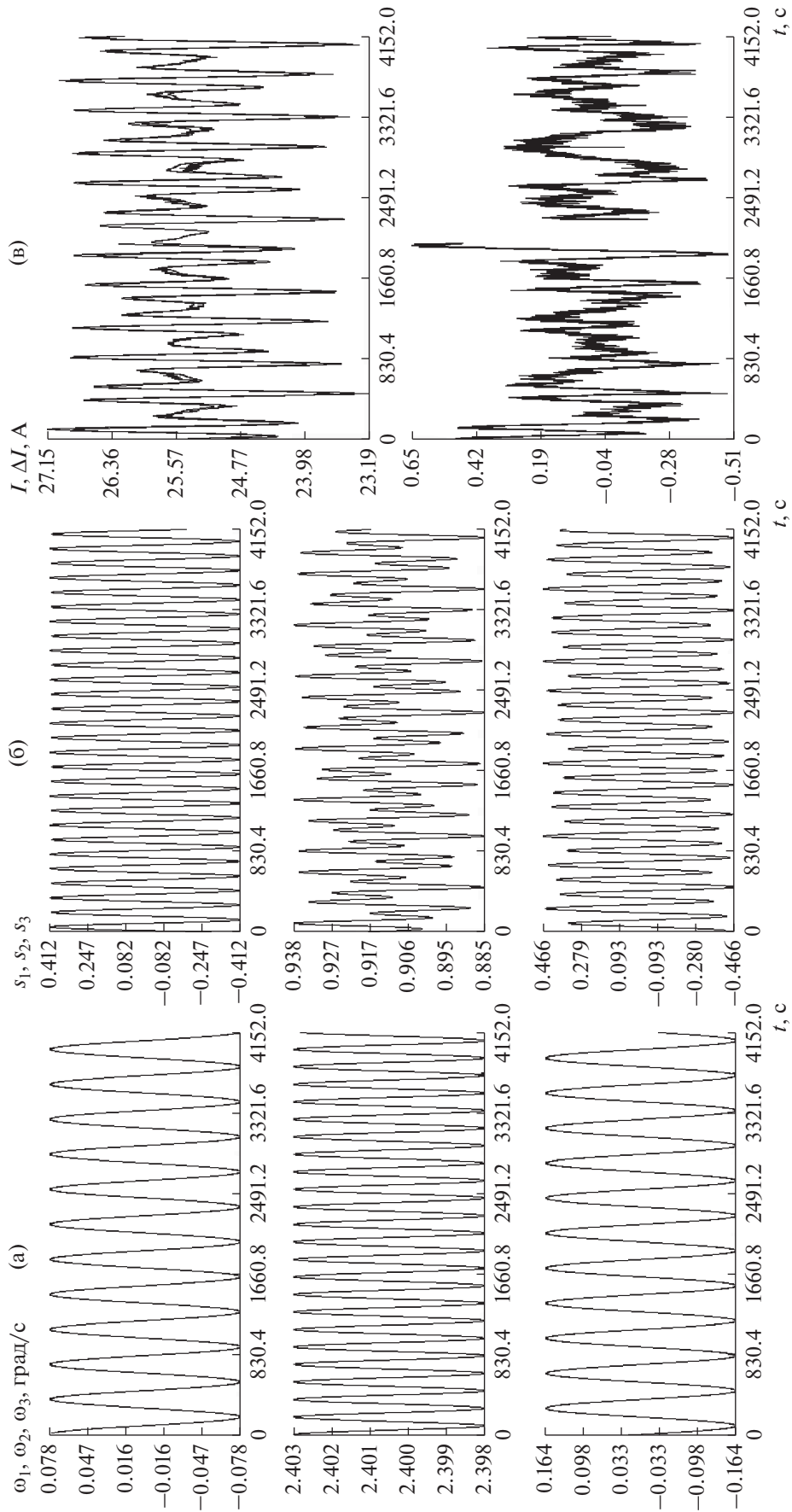


Рис. 2. Результаты обработки скорректированных измерений тока на интервале 1; (а), (б) решение системы (1), (2), (в) аппроксимация измерений, $\sigma = 0.18$ А. Оценки параметров модели: $\mu = 0.199, \mu' = 0.868, I_0 = 27.9$ А, $\gamma = -0.075$.

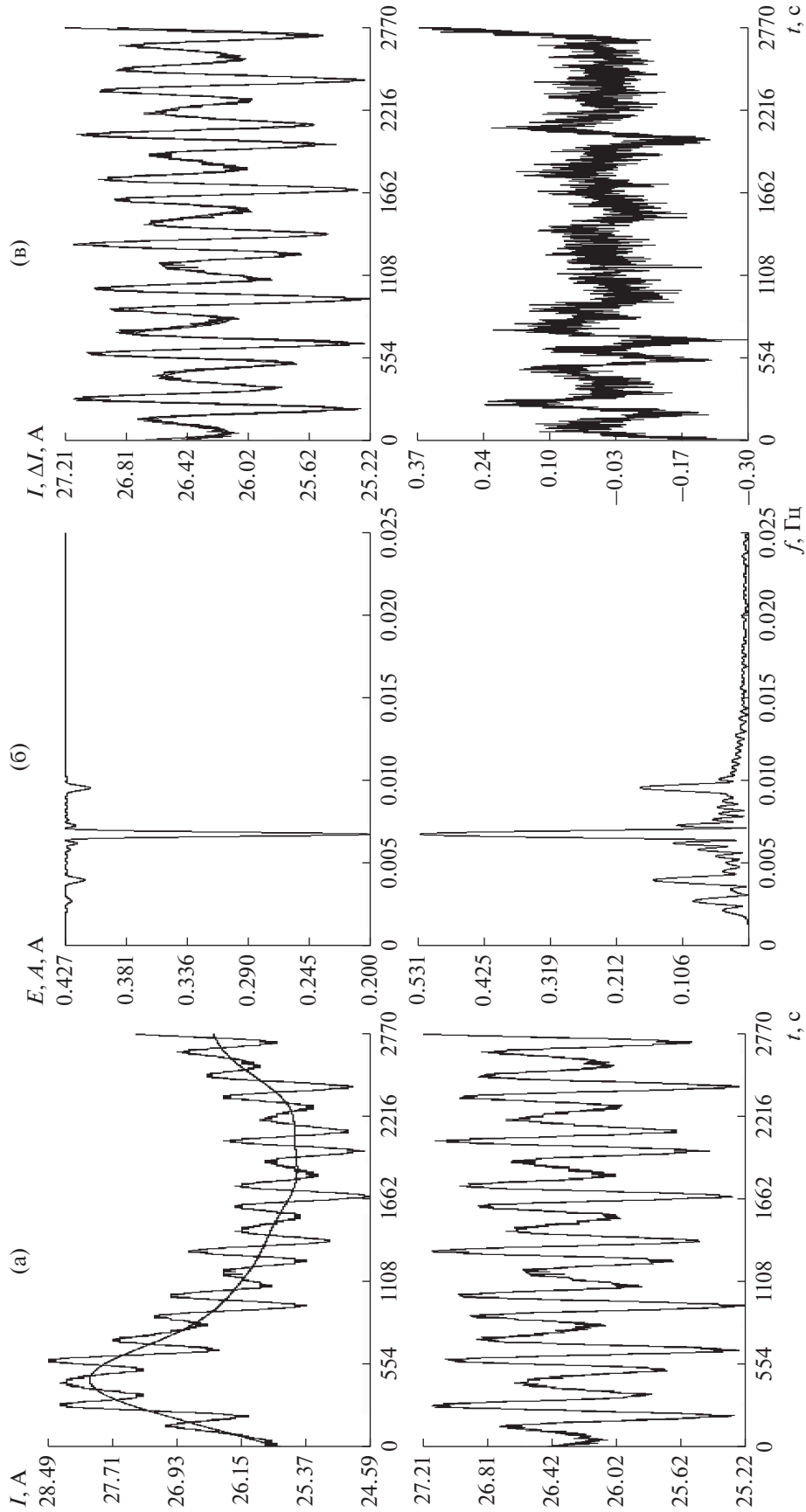


Рис. 3. Коррекция и спектральный анализ измерений на интервале 2; (а) удаление низкочастотной составляющей ($M = 10$), (б) спектры скорректированных измерений, (в) аппроксимация измерений суммой гармоник с частотами 0.00271, 0.00403, 0.00678, 0.00958 Гц амплитудами 0.078, 0.62, 0.54, 0.19 А, СКО = 0.077 А. Оценки параметров модели: $\Omega = 2.44$ град/с, $\mu = 0.189$, $\mu' = 0.884$.

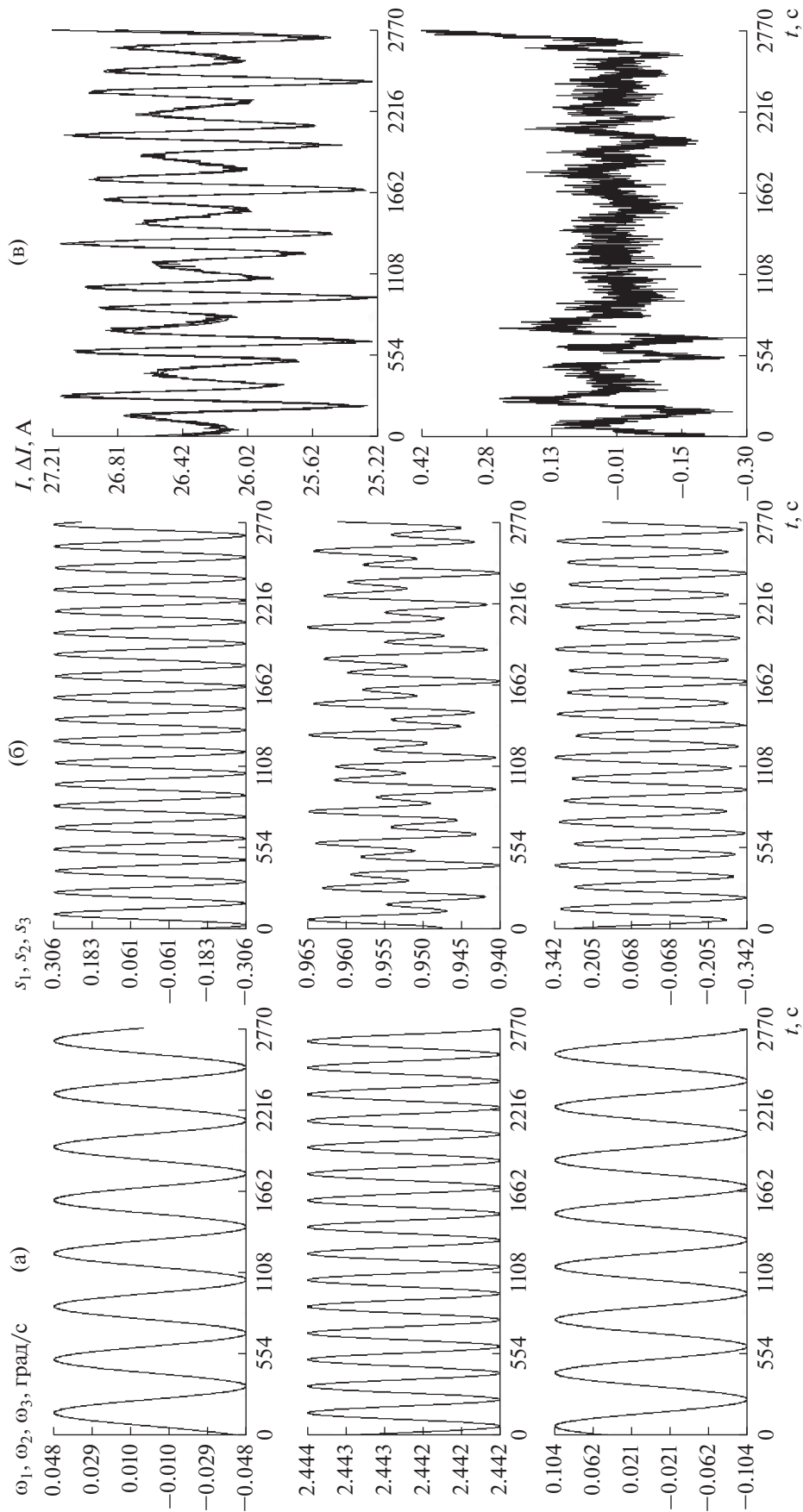


Рис. 4. Результаты обработки скорректированных измерений тока на интервале 2; (а), (б) решение системы (1), (2), (в) аппроксимация измерений, $\sigma = 0.083$ А. Оценки параметров модели: $\mu = 0.188$, $\mu' = 0.886$, $I_0 = 27.7$ А, $\gamma = -0.065$.

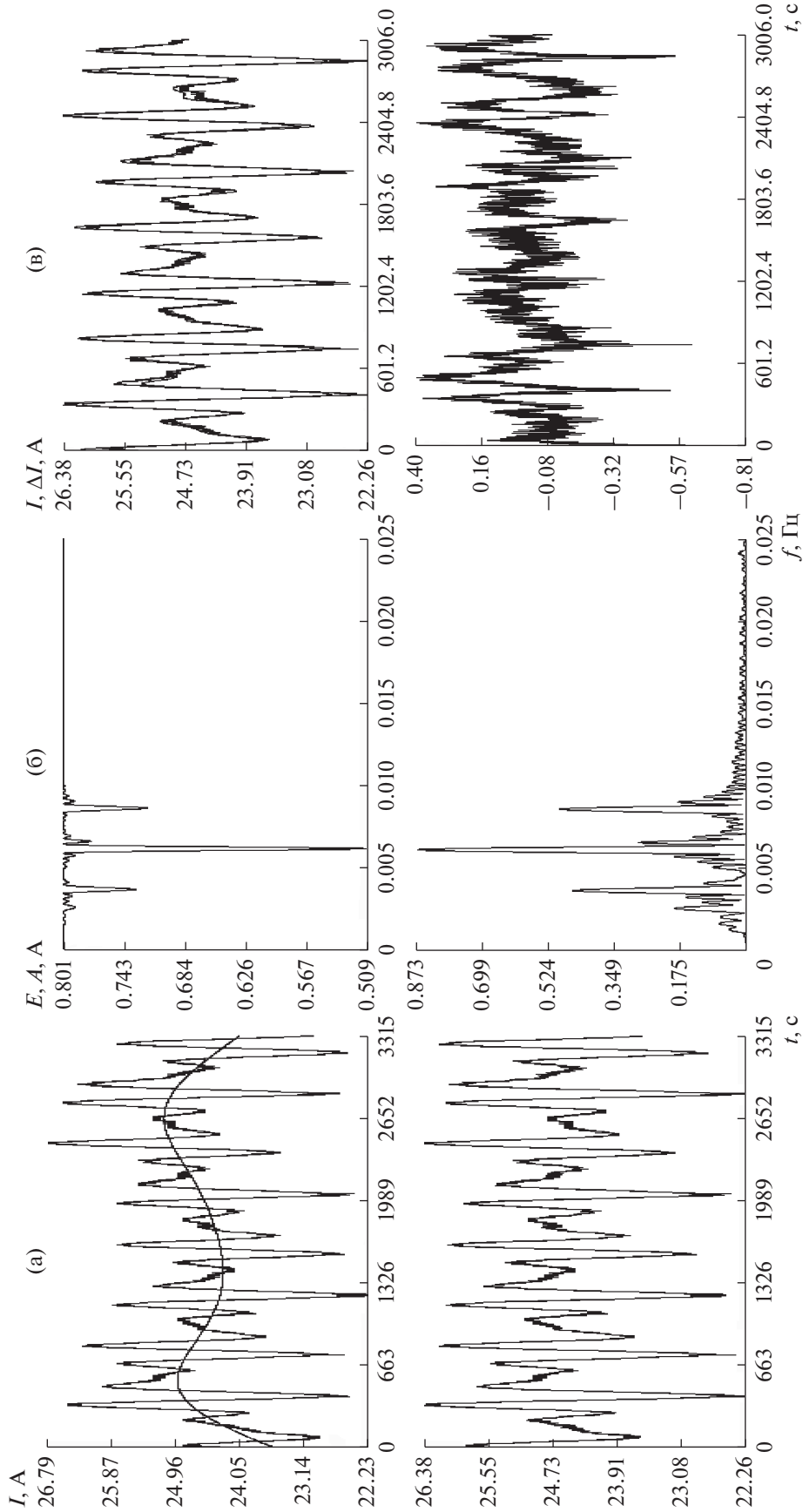


Рис. 5. Коррекция и спектральный анализ измерений на интервале 3; (а) удаление низкочастотной составляющей ($M = 8$), (б) спектры скорректированных измерений, (в) аппроксимация измерений суммой гармоник с частотами 0.00255, 0.00370, 0.00616, 0.00860 Гц амплитудами 0.017, 0.45, 0.87, 0.49 А, СКО = 0.15 А. Оценки параметров модели: $\Omega = 2.22$ град/с, $\mu = 0.174$, $\mu' = 0.908$.

Таблица 2. Результаты обработки измерений тока на ТГК № 423 (ноябрь 2014) и № 424 (апрель 2015)

№ инт.	Дата	t_1 (ДМВ)	$t_N - t_1$, с	N	M	σ, A	ω_{10}	ω_{20}	ω_{30}	$\sigma_{\omega 1}$	$\sigma_{\omega 2}$	$\sigma_{\omega 3}$
							(10^{-3} с^{-1})			(10^{-6} с^{-1})		
1	1.XI.2014	09:40:28	4152	3893	12	0.177	1.336	41.942	0.582	22	21	39
2	17.XI.2014	21:34:17	2770	2725	10	0.083	-0.759	42.644	0.741	14	36	32
3	26.IV.2015	00:40:46	3315	3309	8	0.188	-0.412	38.575	-3.285	22	51	47
4	26.IV.2015	02:10:47	3321	3322	9	0.157	-0.929	38.692	0.804	20	26	33
5	26.IV.2015	00:40:46	8722	6631	—	0.183	-0.466	38.657	-3.061	14	17	33

№ инт.	μ	$\sigma_\mu \cdot 10^4$	μ'	$\sigma_{\mu'} \cdot 10^3$	$z_1 \cdot 10^4$	$\sigma_{z_1} \cdot 10^4$	$z_2 \cdot 10^4$	$\sigma_{z_2} \cdot 10^4$	A_2, A	σ_{A_2}, A	A_3, A	σ_{A_3}, A
1	0.199	1.3	0.869	28	-1707	28	-1165	25	27.84	0.073	2.09	0.029
2	0.188	2.5	0.886	47	-662	16	1497	24	27.60	0.044	1.79	0.028
3	0.186	1.8	0.861	15	1031	20	1406	31	26.94	0.060	2.13	0.026
4	0.171	1.4	0.927	28	-2711	50	-7	24	28.48	0.15	1.73	0.028
5	0.185	0.46	0.858	51	1185	15	1324	21	26.69	0.044	2.13	0.019

пиков обозначим f_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Нумерация частот определяется соотношениями $2\pi f_1 \approx v$, $2\pi f_2 \approx \Omega - v$, $2\pi f_3 \approx \Omega$, $2\pi f_4 \approx \Omega + v$. Для определяемых движений $f_1 < f_2 < f_3 < f_4$. Число M в (15) выбиралось максимальным среди тех чисел, что оставляли на периодограммах не менее четырех значимых пиков. Пикам приписывались частоты f_1, f_2, \dots . При этом учитывались следующие обстоятельства. Во-первых, описанное преобразование измерений с помощью выражения (15) практически исключает из измерений составляющие с частотами меньше $M[2(t_N - t_1)]^{-1}$. Во-вторых, наиболее значимый пик отвечает частоте $f_3 \approx \Omega/2\pi$. В-третьих, должны выполняться указанные выше приближенные соотношения для частот f_1, f_2 и f_4 , рассчитываемые по найденному из периодограмм значению f_3 и проектному значению $\sqrt{\mu\mu'}$.

Значения частот f_k , найденные по периодограммам, уточнялись при построении аппроксимации измерений выражением (13). Графики этих выражений приведены плавными линиями в верхней части рассматриваемых рисунков, имеющих индекс (в). В одних системах координат с ними изображены графики аппроксимируемых данных — ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки (t_n, I_n) . В нижней части рисунков (в) приведены графики ошибок аппроксимации — ломаные с вершинами в точках $(t_n, I_n - I(t_n))$. По уточненным частотам $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ найдены оценки величин Ω, μ и μ' . Эти оценки, а также частоты λ_k и амплитуды $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ приведены в подписях к рисункам. Частоты выражены в герцах, амплитуды — в амперах.

РЕКОНСТРУКЦИЯ ДВИЖЕНИЯ ТГК ПО ИЗМЕРЕНИЯМ ТОКА СБ

Значения угла β малы (см. табл. 1) и оцениваются с большой ошибкой. В такой ситуации целесообразно положить в (3) $\beta = 0$. Тогда

$$I = A_2 s_2 + A_3 s_3, \quad A_2 = I_0 \cos \gamma, \quad (16)$$

$$A_3 = -I_0 \sin \gamma,$$

где γ — угол между осями Ox_2 и Oy_2 . Реконструкцией движения ТГК по скорректированным измерениям тока СБ будем считать решение системы (1), (2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{n=1}^N [I_n - A_2 s_2(t_n) - A_3 s_3(t_n)]^2. \quad (17)$$

Минимизация выполняется по начальным условиям решения и параметрам μ, μ', A_2, A_3 . Начальные условия для уравнений (1) обозначим $\omega_{i0} = \omega_i(t_1)$ ($i = 1, 2, 3$). Решения уравнений (2) должны удовлетворять условию (7). Это условие выполняется при всех t , если оно выполнено в начальной точке t_1 . По этой причине начальные условия переменных s_i выражались через независимые параметры z_1 и z_2 по формулам

$$s_1(t_1) = \frac{2z_1}{1 + z_1^2 + z_2^2}, \quad s_2(t_1) = \frac{1 - z_1^2 - z_2^2}{1 + z_1^2 + z_2^2},$$

$$s_3(t_1) = \frac{2z_2}{1 + z_1^2 + z_2^2}.$$

В большинстве случаев использования режима закрутки на Солнце $|z_1| \ll 1, |z_2| \ll 1$, и такую параметризацию можно приближенно представить в

виде $s_1 \approx 2z_1$, $s_2 \approx 1$, $s_3 \approx 2z_2$. Последние соотношения поясняют смысл параметров z_1 и z_2 .

Функционал (17) зависит от 9 величин: ω_{10} , ω_{20} , ω_{30} , μ , μ' , z_1 , z_2 , A_2 , A_3 . Так система (1), (2) выдерживает замену переменных

$$\omega_1 \rightarrow -\omega_1, \quad \omega_3 \rightarrow -\omega_3, \quad s_1 \rightarrow -s_1, \quad s_3 \rightarrow -s_3,$$

то наборы параметров $\pm\omega_{10}$, ω_{20} , $\pm\omega_{30}$, μ , μ' , $\pm z_1$, $\pm z_2$, A_2 , $\pm A_3$, в которых берутся только верхние или только нижние знаки, задают равные значения Φ . Вследствие этого минимум функционала (17) не единствен. Выбор знаков основан на последней формуле (16). Угол γ не превышает 10° и его оценки достаточно надежны, поэтому в нужной точке минимума Φ знак A_3 должен быть противоположен знаку γ .

Функционал (17) можно упростить. В уравнения (2) вместо решения уравнений (1) подставим формулы (5) и будем рассматривать Φ как функцию величин A , B , Ω , λ , ν , z_1 , z_2 , A_2 , A_3 . Такое упрощение использовалось для поиска начального приближения точки минимума Φ .

Минимизация функционала (17) выполнялась методом Левенберга–Марквардта [7]. В некоторых случаях на начальном этапе минимизировался функционал $\Phi + \varepsilon[(\mu - \mu_0)^2 + (\mu' - \mu'_0)^2]$ с априорными оценками μ_0 , μ'_0 параметров μ , μ' и $\varepsilon > 0$. На последнем этапе регуляризирующее слагаемое отбрасывалось. Метод Гаусса–Ньютона на последнем этапе в большинстве случаев расходился, и за оценку точки минимума принимался результат, полученный методом Левенберга–Марквардта.

Точность аппроксимации скорректированных измерений тока и оценок уточняемых параметров характеризовались в рамках метода наименьших квадратов соответствующими стандартными отклонениями. Пусть Φ_{\min} – значения функционала (17) в точке минимума, C – вычисленная в этой точке матрица системы нормальных уравнений, используемых в методе Гаусса–Ньютона (матрица $2C$ приближенно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi$). Тогда формулы стандартного отклонения σ ошибок в измерениях и ковариационной матрицы K уточняемых параметров можно записать в виде

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Phi_{\min}}{N-9}}, \quad K = \sigma^2 C^{-1}.$$

Стандартные отклонения уточняемых параметров – квадратные корни из соответствующих диагональных элементов матрицы K – обозначим σ_{ω_1} , σ_{ω_2} , σ_{ω_3} , σ_{μ} , $\sigma_{\mu'}$, σ_{z_1} , σ_{z_2} , σ_{A_2} , σ_{A_3} .

Результаты обработки скорректированных измерений тока приведены в табл. 2 и на рис. 2, 4, 6

и 8. Таблица 2 содержит оценки параметров ω_{10} , ω_{20} , ω_{30} , μ , μ' , z_1 , z_2 , A_2 , A_3 и их стандартные отклонения для каждого обработанного отрезка данных, рисунки иллюстрируют найденные реконструкции движения ТГК на интервалах времени $t_1 \leq t \leq t_N$. Измерения тока на интервале 5 получены объединением скорректированных измерений на интервалах 3 и 4. Рисунки для него не представлены – они выглядят как объединение соответствующих рисунков для интервалов 3 и 4.

На перечисленных рисунках с индексом (а) приведены графики решений системы (1), на рисунках с индексом (б) – графики решений системы (2). На рисунках с индексом (в) приведены найденные аппроксимации измерений тока. В верхней части этих рисунков плавными линиями изображены графики функции $\hat{I}(t) = A_2 s_2(t) + A_3 s_3(t)$, $t_1 \leq t \leq t_N$. В тех же системах координат изображены графики скорректированных измерений. Они представляют собой ломаные, звенья которых соединяют соседние по времени точки (t_n, I_n) , $n = 1, 2, \dots, N$. Графики почти сливаются, поэтому в нижней части рисунков (в) изображены графики ошибок аппроксимации – ломаные с вершинами в точках $(t_n, I_n - \hat{I}(t_n))$. В подписях к рисункам повторены некоторые данные из табл. 2.

По поводу рисунков (в) необходимо отметить, что описанная в п. 3 коррекция измерений тока сохраняет их среднее значение по обрабатываемому интервалу. Но если из данных измерений удаляется низкочастотная составляющая, обусловленная отраженным от Земли светом, то при коррекции следовало бы уменьшить это среднее. Например, принять в качестве удаляемой составляющей функцию $\chi(t) - \langle \chi \rangle + \text{const}$, $\text{const} > 0$. Однако значение const неизвестно, поэтому было принято нулем. В определенной степени этот недостаток компенсируется тем, что параметры A_2 и A_3 уточняются.

Как видим, аппроксимация измерений получилась правдоподобной, оценки параметров μ и μ' близки значениям в табл. 1. Оценки параметров A_2 , A_3 позволяют найти $I_0 = \sqrt{A_2^2 + A_3^2}$ и $\gamma = -\text{arctg}(A_3/A_2)$. Оценки I_0 получаются достаточно близкими к априорному значению $I_0 = 28$ А, оценки γ близки к значениям в табл. 1 (см. подписи к рис. 2, 4, 6 и 8).

Точность построенных реконструкций движения корабля по описанной методике характеризуется стандартными отклонениями уточняемых параметров. Анализ этих стандартных отклонений вместе с анализом собственных векторов матрицы C , отвечающих ее нескольким минимальным собственным числам, позволяет понять характер неопределенности, которая возникает

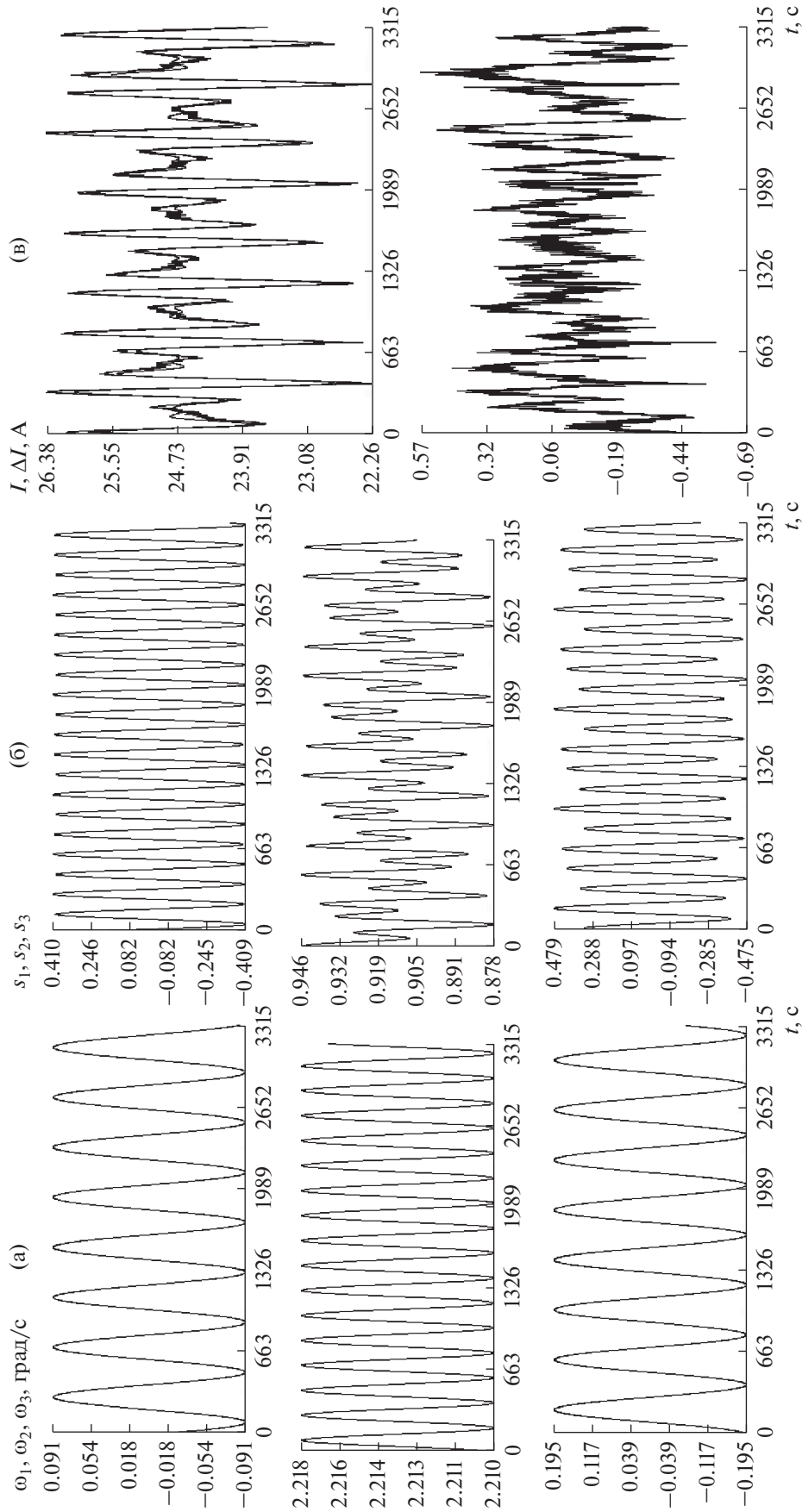


Рис. 6. Результаты обработки скорректированных измерений тока на интервале 3; (а), (б) решение системы (1), (2), (в) аппроксимация измерений, $\sigma = 0.19$ А. Оценки параметров модели: $\mu = 0.186$, $\mu' = 0.861$, $I_0 = 27.0$ А, $\gamma = -0.079$.

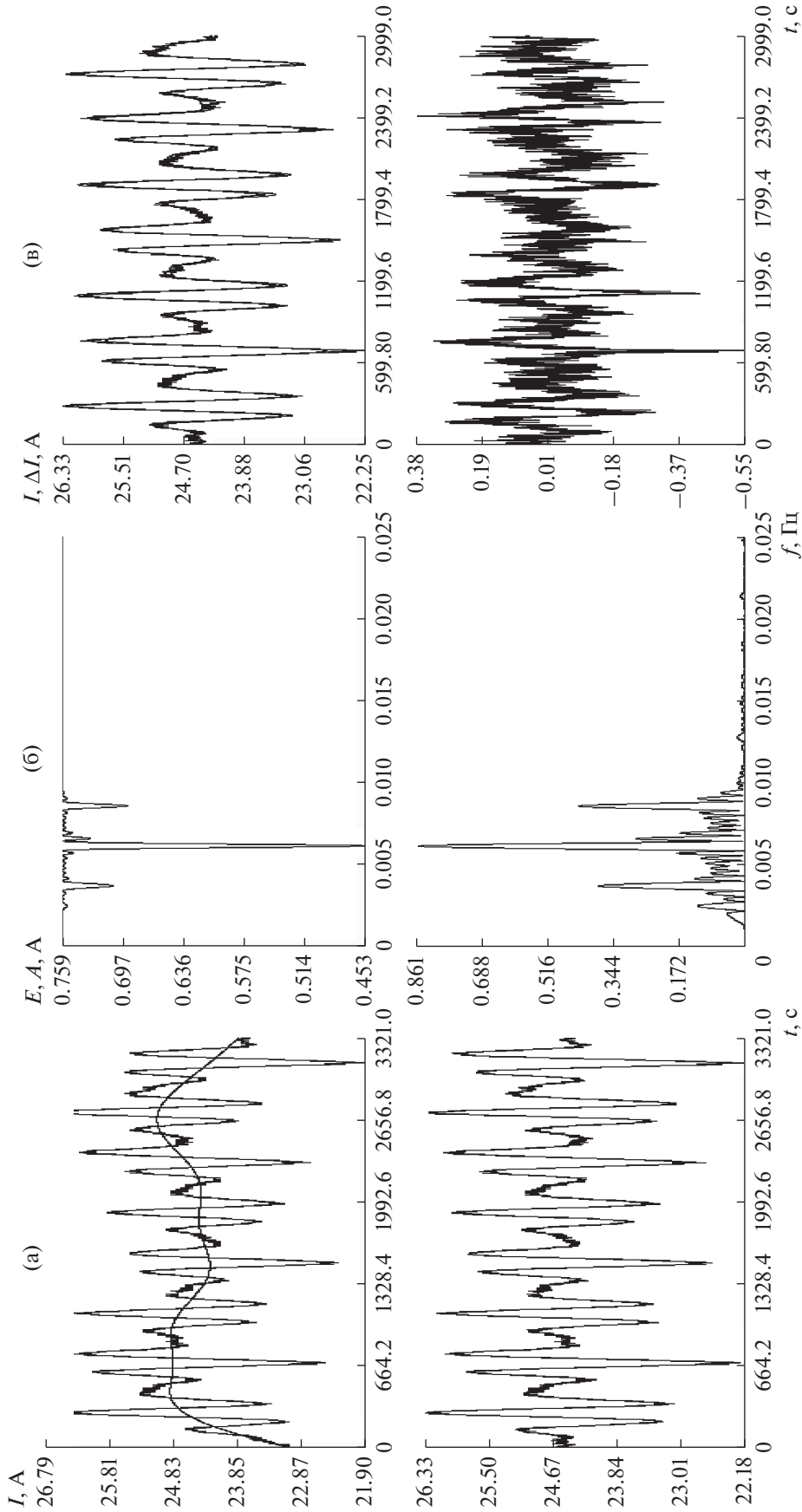


Рис. 7. Коррекция и спектральный анализ измерений на интервале 4; (а) удаление низкочастотной составляющей ($M = 9$), (б) спектры скорректированных измерений, (в) аппроксимация измерений суммой гармоник с частотами 0.00249, 0.00371, 0.00615, 0.00860 Гц амплитудами 0.012, 0.39, 0.86, 0.44 А, СКО = 0.12 А. Оценки параметров модели: $\Omega = 2.21$ град/с, $\mu = 0.178$, $\mu' = 0.887$.

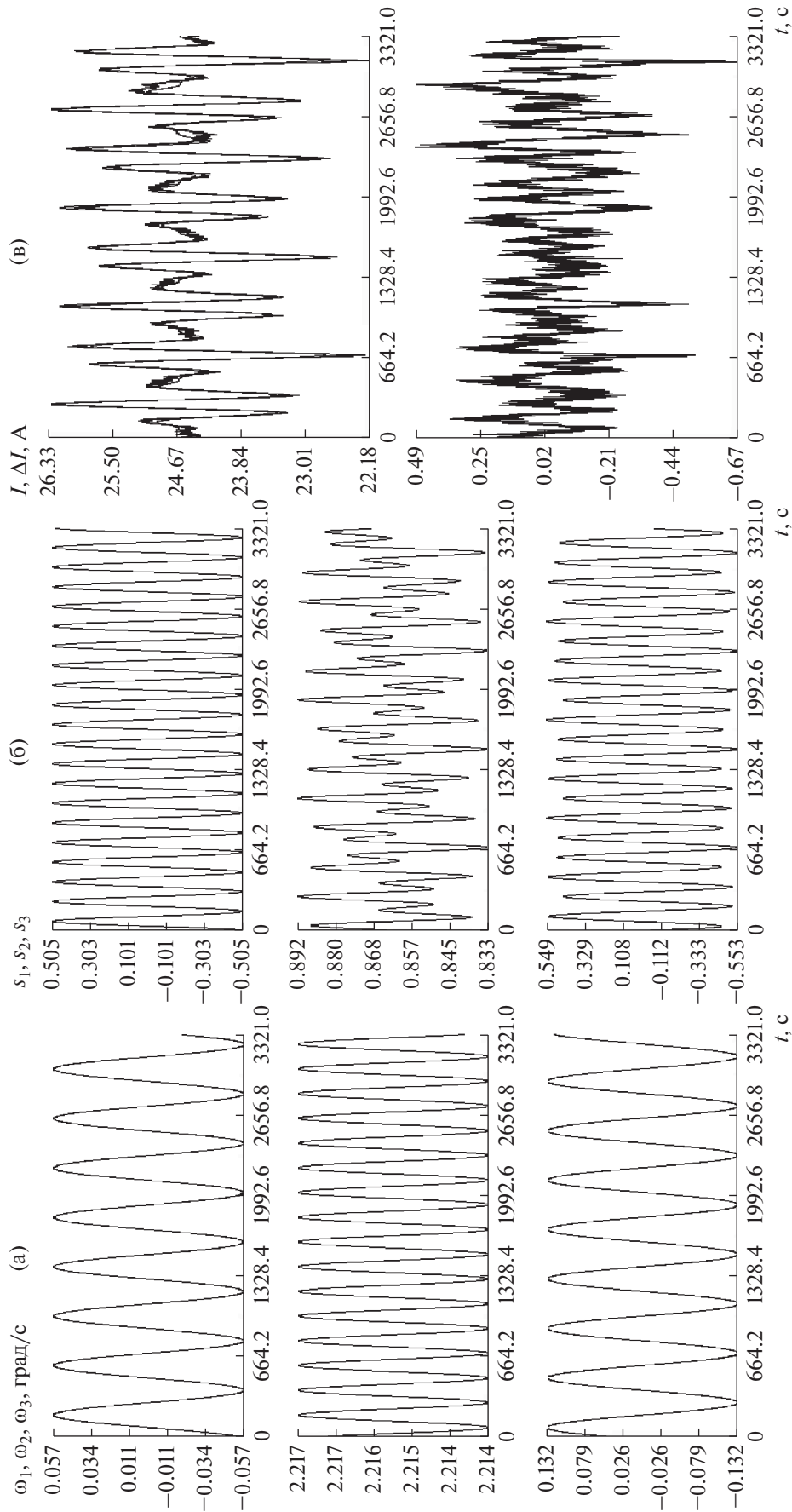


Рис. 8. Результаты обработки скорректированных измерений тока на интервале 4; (а), (б) решение системы (1), (2), (в) аппроксимация измерений, $\sigma = 0.15$ А. Оценки параметров модели: $\mu = 0.171$, $\mu' = 0.927$, $I_0 = 28.5$ А, $\gamma = -0.061$.

при реконструкции движения. Анализ основан на формуле

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^9 v_k v_k^T, \quad v_k = \frac{u_k}{\sqrt{p_k}},$$

где p_k и u_k – собственные числа и ортонормированные собственные векторы матрицы C . Вектор v_k – также собственный вектор матрицы C , отвечающий ее собственному числу p_k , но не нормированный. Его норма изменена так, чтобы его компоненты (будем обозначать их v_{k,ω_1} , v_{k,ω_2} , $v_{k,\mu}$ и т.п.) характеризовали вклад в стандартные отклонения уточняемых параметров. Например, для стандартного отклонения σ_μ имеет место формула

$$\sigma_\mu^2 = \sigma^2 \sum_{k=1}^9 v_{k,\mu}^2,$$

и если $|v_{1,\mu}| \gg |v_{k,\mu}|$ ($k = 2, 3, \dots, 9$), то $\sigma_\mu \approx \sigma |v_{1,\mu}|$. Таким образом, наибольшие стандартные отклонения имеют те определяемые параметры, которым отвечают наибольшие по модулю компоненты векторов v_k . Назовем эти векторы векторами чувствительности.

В качестве примера такого анализа исследуем точность реконструкции движения на интервале 2. Собственные числа матрицы C имеют значения:

$$p_1 = 2.694, \quad p_2 = 3.880, \quad p_3 = 172.1, \quad p_4 = 4493, \\ 49567, \quad 527989, \quad 9.976e + 007, \\ 1.282 + 008, \quad 1.326e + 009.$$

Тот факт, что минимальное собственное число положительно, означает принципиальную возможность реконструкции движения описанным способом. Компоненты используемых ниже векторов упорядочены в соответствии с записью: ω_{10} , ω_{20} , ω_{30} , μ , μ' , z_1 , z_2 , A_2 , A_3 . Наиболее значимые векторы чувствительности в рассматриваемом примере

$$v_1 = (0, 0, 0, 0, 0.10, -0.01, 0.03, 0.50, -0.33)^T, \\ v_2 = (0, 0, 0, 0, 0.50, 0.01, 0, -0.08, 0.02)^T, \\ v_3 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.04, 0.06)^T, \\ v_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 0.01, 0.01, 0, 0)^T.$$

Компоненты, обозначенные здесь нулями, и компоненты остальных векторов чувствительности не превосходят по абсолютной величине 0.004. Как видим, наименее точно определяются параметры μ' , A_2 , A_3 (ср. табл. 2).

Отметим, что минимальное собственное число матрицы C было значимо больше нуля во всех вариантах реконструкции движения ТГК.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реконструировано неуправляемое вращательное движение ТГК *Прогресс М-24М* и *М-25М* в режиме закрутки на Солнце. Реконструкция выполнена с помощью интегральной статистической методики по телеметрическим значениям тока, снимаемого с его солнечных батарей. Данные телеметрии, собранные на освещенном участке орбиты, обрабатывались совместно с помощью интегрирования уравнений вращательного движения ТГК. В результате обработки оценивались начальные условия движения корабля относительно направления Земля—Солнце и параметры используемых математических моделей. Проведено исследование, поясняющее возможность реконструкции на основании таких, на первый взгляд, малоинформативных данных.

Во-первых, с помощью спектрального анализа выделены гармонические составляющие в исходных данных, несущие информацию о движении ТГК и некоторых его параметрах. Предложена методика удаления из этих данных посторонней низкочастотной составляющей, обусловленной, по-видимому, отраженным от Земли солнечным светом.

Во-вторых, исследована обусловленность задачи метода наименьших квадратов, лежащей в основе используемой интегральной статистической методики. Показано, что в принципе задача является невырожденной, хотя для некоторых отрезков обрабатываемых данных ее обусловленность может быть плохой. В таких случаях реконструкция движения может оказаться не достаточно точной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А. и др. Исследование микроускорений на борту *Международной космической станции* с помощью датчика конвекции // *Космич. исслед.* 2012. Т. 50. № 5. С. 373–379.
2. Путин Г.Ф., Глухов А.Ф., Бабушкин И.А. и др. Эксперименты с датчиком конвекции ДАКОН-М // *Космич. исслед.* 2017. Т. 55. № 4. С. 278–284.
3. Беляев М.Ю., Легостаев В.П., Матвеева Т.В. и др. Отработка методов проведения экспериментов в области микрогравитации в автономном полете грузового корабля *Прогресс М-20М* // *Космическая техника и технологии.* 2014. Т. 3. № 6. С. 19–32.
4. Беляев М.Ю. и др. Эксперименты с вращательным движением космических кораблей *Прогресс*. Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 4.
5. Беляев М.Ю., Матвеева Т.В., Монахов М.И. и др. Режимы неуправляемого вращательного движения корабля *Прогресс М-29М* // *Космич. исслед.* 2018. Т. 56. № 1. С. 54–67.
6. Теребиж В.Ю. Анализ временных рядов в астрофизике. М.: Наука, 1992.
7. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1985.