КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2021, том 59, № 3, с. 235–239

УДК 519.213:621.3.019.3

ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В УСЛОВИЯХ НЕПОЛНЫХ ДАННЫХ

© 2021 г. М. И. Ломакин[1, *], А. В. Сухов[1], А. В. Докукин[1], Ю. М. Ниязова[2]

[1]Российский научно-технический центр информации по стандартизации, метрологии и оценке соответствия, Москва, Россия

[2]Московский государственный университет геодезии и картографии, Москва, Россия

*m.i.lomakin@gostinfo.ru

Поступила в редакцию 07.10.2019 г.
После доработки 28.01.2020 г.
Принята к публикации 05.03.2020 г.

Рассматривается задача оценки показателей надежности космических аппаратов, описываемых моделью “нагрузка–прочность”, в условиях неполных данных, представленных моментами распределения величин, характеризующих “прочность” и “нагрузку”, в качестве последних величин выступают радиационная стойкость КА и факторы космического пространства, действующие на КА. Данная задача сведена к задаче нахождения экстремума определенного интеграла с ограничениями-равенствами, ее решение получено в общем виде. Для случаев, когда известны один и два момента распределения величин “прочности” и “нагрузки” оценки надежности получены в аналитическом виде. Данная статья является дальнейшим развитием и уточнением результатов, полученных в работе авторов [16], применительно к таким объектам исследования как космические аппараты.

DOI: 10.31857/S0023420621030080

ВВЕДЕНИЕ

Важность вопросов обеспечения высокой надежности космических аппаратов не вызывает ни у кого сомнений. КА являются сложными и дорогостоящими системами, решающими важные научные и прикладные задачи. В процессе своего целевого функционирования они подвергаются воздействию большого количества факторов космического пространства (ФКП), в том числе: космической плазмы, потоков электронов и ионов, солнечного электромагнитного излучения и др. [1]. Это воздействие в большинстве случаев является причиной отказов бортовой аппаратуры КА. Необходимость анализа влияния ФКП на надежность бортовой аппаратуры КА является безусловной. Она признается как отечественными специалистами, так и зарубежными. В настоящей статье решается одна из задач такого анализа – предлагается подход к оценке вероятности безотказной работы КА в условиях неполных данных.

В теории надежности [2–5] достаточно широкое распространение получили модели “нагрузка-прочность”, в которых показателем надежности выступает вероятность (вероятность безотказной работы) того, что одна случайная величина (прочность) больше другой случайной величины (нагрузка). В работах [2–5], где предполагалось, что имеется полная информация о каждой из названных случайных величин (“прочности” и “нагрузки”). Применительно к КА в качестве величины “прочность” может выступать стойкость бортового оборудования к воздействию ФКП, а в качестве величины “нагрузка” выступают воздействующие ФКП. Например, это может быть радиационная стойкость бортовой радиоэлектронной аппаратуры КА к радиационному воздействию на нее (поглощенных доз электронов, протонов и суммарной дозы) [6–9].

Пусть k параметров характеризуют состояние бортовой аппаратуры КА (далее просто – КА) при целевом функционировании. Одни параметры характеризуют радиационную стойкость, другие параметры – воздействующие ФКП на КА. Условие работоспособности КА за время τ может быть записано в виде [4]:

$$\varphi(X, Y, \tau) = X(Z_1, Z_2, \dots Z_l, \tau) - Y(Z_{l+1}, Z_{l+2}, \dots, Z_k, \tau) > 0,$$

где $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ – параметры, характеризующие состояние КА; $X(Z_1, Z_2, \dots, Z_l, \tau)$ – случайная функция, характеризующая радиационную стойкость КА к воздействию ФКП; $Y(Z_{l+1}, Z_{l+2}, \dots, Z_k, \tau)$ – случайная функция, характеризующая воздействие ФКП на КА (уровни воздействующих ФКП).

Тогда основной показатель надежности КА – вероятность безотказной работы КА определяется соотношением [4, 5]:

$$P(\tau) = P\,(X(Z_1, Z_2, \ldots, Z_l, \tau) > Y(Z_{l+1}, Z_{l+2}, \ldots, Z_k, \tau)) =$$

$$= \int\limits_{\varphi(X,Y,\tau)>0} f\,(x_1, \ldots x_k, \tau)\, dx_1 \ldots dx_k.$$

Здесь $f(x_1, \ldots x_k, \tau)$ – многомерная плотность распределения случайных параметров, характеризующих состояние КА.

Рассмотрим случай, когда случайные функции $X(Z_1, Z_2, \ldots, Z_l\,\tau)$ и $Y(Z_{l+1}, Z_{l+2}, \ldots, Z_k, \tau)$ являются одномерными или сводимыми к ним, тогда основной показатель надежности КА – вероятность безотказной работы КА для времени τ определится соотношением:

$$P(\tau) = P(X(\tau) > Y(\tau)). \tag{1}$$

Пусть $F(t)$ – функция распределения случайной величины $X(\tau)$, а $G(t)$ – функция распределения случайной величины $Y(\tau)$. В случае, когда функции распределения $F(t)$ и $G(t)$ известны полностью, соотношения для основных, используемых в теории надежности распределений [5] представлены в работе [4].

В случае, когда функции распределения $F(t)$ и $G(t)$ известны не полн остью, а известны только до моментов распределения, оценки для вероятности, определяемой соотношением (1) получены только для случая, когда функции распределения $F(t)$, $G(t)$ известны до первого момента (математического ожидания) [13].

Определим аналогично [10–13] множества функций распределения F_0 и G_0, имеющих (известных) k фиксированных конечных моментов в виде:

$$F_0 = \left\{ F(t) : \int\limits_0^\infty t^j\, dF(t) = m_j,\;\; j = \overline{1,k} \right\}, \tag{2}$$

$$G_0 = \left\{ G(t) : \int\limits_0^\infty t^j\, dG(t) = \mu_j,\;\; j = \overline{1,k} \right\}. \tag{3}$$

Здесь m_j, μ_j – j-ые моменты распределения случайных величин $X(\tau)$ и $Y(\tau)$.

Задача состоит в нахождении экстремальных оценок вероятности безотказной работы КА на множестве функций распределения F_0 и G_0, т.е. необходимо найти

$$P_э(\tau) = \underset{F(t)\in F_0, G(t)\in G_0}{\mathrm{extr}} P(X(\tau) > Y(\tau)). \tag{4}$$

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Решение данной задачи дано в статье авторов [13], где получены в явном виде соотношения для вероятности, определяемой соотношением (1) при функциях распределения $F(t)$ и $G(t)$ известных до одного момента. В настоящей статье получены соотношения для вероятности безотказной работы КА при функциях распределения $F(t)$ и $G(t)$ известных до двух моментов.

Приведем основные соотношения из статьи [13], которые далее нужны будут для нахождения вероятности безотказной работы КА при функциях распределения $F(t)$ и $G(t)$ известных до двух моментов.

Соотношение (1) можно переписать в виде

$$P_э(\tau) = \int\limits_0^\infty G(t)\, dF(t) \tag{5}$$

или

$$P_э(\tau) = \int\limits_0^\infty (1 - F(t))\, dG(t). \tag{6}$$

Исходную задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти экстремум определенного интеграла, определяемого соотношением (5) или (6), при условиях:

$$\int\limits_0^\infty t^j\, dF(t) = m_j,\quad j = \overline{1,k}, \tag{7}$$

$$\int\limits_0^\infty t^j\, dG(t) = \mu_j,\quad j = \overline{1,k}. \tag{8}$$

Пусть функции распределения $F(t) \in F_0$, $G(t) \in G_0$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями, определёнными на интервалах $(0, t_f)$ и $(0, t_g)$ соответственно, тогда задача поиска экстремума определенного интеграла относится к числу изопериметрических задач [14, 15]. Для ее решения используется метод вариации Лагранжа.

Предположим, что решение задачи существует, применим принцип Лагранжа к гипотетическому решению, определим седловые точки и исследуем их на минимум или максимум путем сравнения с известными результатами.

Функции $F(t)$, $G(t)$, доставляющие экстремум определенному интегралу (соотношение (5) или (6)), должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера [14, 15]:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial F'(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial F(t)} = 0\,, \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial G'(t)}\right) - \frac{\partial L}{\partial G(t)} = 0, \tag{10}$$

где $F'(t) = \dfrac{dF(t)}{dt}$, $G'(t) = \dfrac{dG(t)}{dt}$,

L – лагранжиан, определяемый соотношением:

$$L = G(t)F'(t) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j t^j F'(t) + \sum_{j=1}^{k} \eta_j t^j G'(t), \quad (11)$$

$$L = (1 - F(t))G'(t) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j t^j F'(t) + \sum_{j=1}^{k} \eta_j t^j G'(t). \quad (12)$$

В последних соотношениях $\lambda_j, \eta_j; j = \overline{1,k}$ – неопределенные множители Лагранжа.

Выполнив соответствующие преобразования [13], получим следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{dG(t)}{dt} + \sum_{J=1}^{k} j\lambda_j t^{j-1} = 0, \quad (13)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} - \sum_{J=1}^{k} j\eta_j t^{j-1} = 0. \quad (14)$$

С учетом начальных условий $F(0) = 0$, $G(0) = 0$ получаем

$$F(t) = \sum_{J=1}^{k} \eta_j t^j, \quad 0 \le t \le t_f, \quad (15)$$

$$G(t) = -\sum_{J=1}^{k} \lambda_j t^j, \quad 0 \le t \le t_g. \quad (16)$$

Величины λ_f, η_f определяются выражениями:

$$-\sum_{J=1}^{k} \frac{j}{j+i} \lambda_j t_g^{j+i} = \mu_i, \quad i = \overline{1,k}, \quad (17)$$

$$\sum_{J=1}^{k} \frac{j}{j+i} \eta_j t_f^{j+i} = m_i, \quad i = \overline{1,k}. \quad (18)$$

$P_э(\tau)$ для случая $t_g > t_f$ определяется соотношением:

$$P_э(\tau) = -\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{j+i} \eta_j \lambda_i t_f^{j+i}. \quad (19)$$

Для случая $t_g \le t_f$ – соотношением:

$$P_э(\tau) = 1 + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{j+i} \eta_i \lambda_j t_g^{j+i}. \quad (20)$$

Исходя из последних соотношений (19), (20), для функций распределения $F(t)$ и $G(t)$ известных до первого конечного момента (математических ожиданий) в [13] получено:

для $t_f < t_g$ или для $m_1 < \mu_1$, нижняя оценка определяется в виде:

$$P_э(\tau) = \frac{m_1}{2\mu_1}, \quad (21)$$

для $t_f \ge t_g$ или $m_1 \ge \mu_1$, верхняя оценка определяется в виде:

$$P_э(\tau) = 1 - \frac{\mu_1}{2m_1}. \quad (22)$$

Все приведенные выше соотношения получены в работе [13].

Для случая, когда известны два первых момента функций распределения $F(t)$, $G(t)$, неопределенные множители Лагранжа можно определить следующим образом.

Из выражений (17) и (18) получаем:

$$-\frac{1}{2}\lambda_1 t_g^2 - \frac{2}{3}\lambda_2 t_g^3 = \mu_1, \quad (23)$$

$$-\frac{1}{3}\lambda_1 t_g^3 - \frac{1}{2}\lambda_2 t_g^4 = \mu_2, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2}\eta_1 t_f^2 + \frac{2}{3}\eta_2 t_f^3 = m_1, \quad (25)$$

$$\frac{1}{3}\lambda_1 t_f^3 + \frac{1}{2}\eta_2 t_f^4 = m_2. \quad (26)$$

Решая данные системы уравнений для μ_j и m_j, получаем:

$$\eta_1 = \frac{26m_1}{5t_f^2} - \frac{8m_2}{5t_f^3}, \quad (27)$$

$$\eta_2 = \frac{18m_2}{5t_f^4} - \frac{12m_1}{5t_f^3}, \quad (28)$$

$$\lambda_1 = \frac{24\mu_2}{t_g^3} - \frac{18\mu_1}{t_g^2}, \quad (29)$$

$$\lambda_2 = \frac{12\mu_1}{t_g^3} - \frac{18\mu_2}{t_g^4}, \quad (30)$$

где значения переменных t_f, t_g определяются из условий $F(t_f) = 1$, $G(t_g) = 1$ соответственно. Вид функций $F(t_f)$ и $G(t_g)$ определим, решая дифференциальные уравнения (13) и (14):

$$\frac{dG(t)}{dt} + \lambda_1 + 2\lambda_2 t = 0, \quad (31)$$

$$\frac{dF(t)}{dt} - \eta_1 - 2\eta_2 t = 0. \quad (32)$$

Интегрирование дифференциальных уравнений (31) и (32) и использование начальных условий $F(0) = 0$, $G(0) = 0$ позволяет получить функции $F(t_f)$ и $G(t_g)$:

$$F(t) = \left(\frac{26m_1}{5t_f^2} - \frac{8m_2}{5t_f^3}\right)t + \left(\frac{18m_2}{5t_f^4} - \frac{12m_1}{5t_f^3}\right)t^2, \quad (33)$$

$$G(t) = \left(\frac{24\mu_2}{t_g^3} - \frac{18\mu_1}{t_g^2}\right)t + \left(\frac{12\mu_1}{t_g^3} - \frac{18\mu_2}{t_g^4}\right)t^2. \quad (34)$$

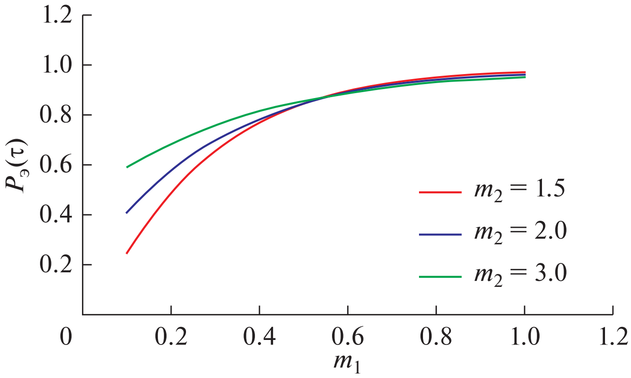

Рис. 1. Значения оценки показателя $P_э(\tau)$ от первого момента m_1.

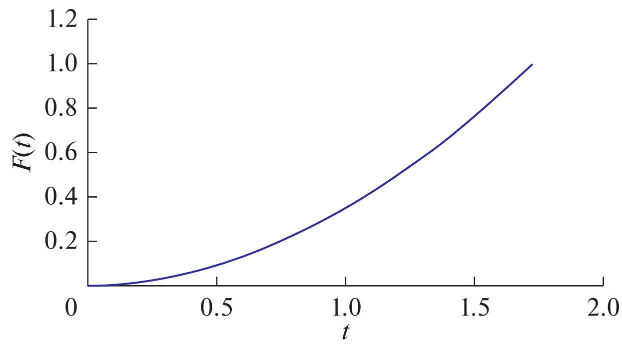

Рис. 2. Вид распределения $F(t)$ для известных двух моментов распределения.

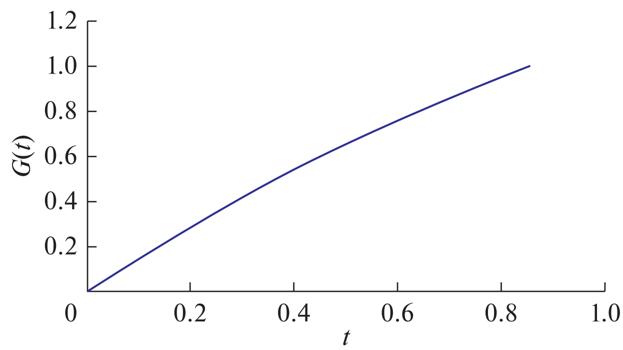

Рис. 3. Вид распределения $G(t)$ для известных двух моментов распределения.

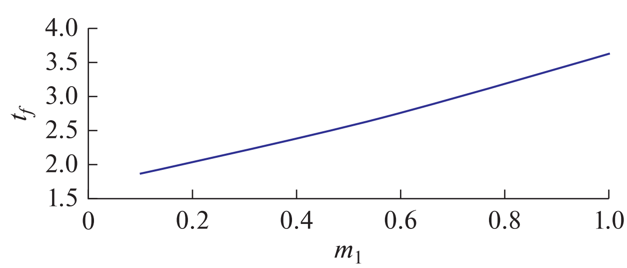

Рис. 4. Зависимость времени t_f от первого момента распределения при значении второго момента $m_2 = 3$.

Используем условие $F(t_f) = 1$ и $G(t_g) = 1$ и решим выражения (33) и (34) относительно t_g и t_f:

$$t_f = 1.4m_1 + \sqrt{1.96m_1^2 + 2m_2}, \tag{35}$$

$$t_g = \sqrt{9\mu_1^2 + 6\mu_2} - 3\mu_1. \tag{36}$$

При получении решения (36) можем попасть на значение функции на нисходящей ветви, когда ее производная меньше нуля. Поэтому значение t_g ищется при условии положительного значения производной функции (36) или используется значение другого корня, симметричного относительно максимума функции:

$$t_{g\min} = \frac{18\mu_1 t_g^2 - 24\mu_2 t_g}{12\mu_1 t_g - 18\mu_2} - t_g. \tag{37}$$

Значение (39) $t_{g\min}$ следует использовать вместо параметра t_g.

Экстремальная оценка показателя $P_э(\tau)$ для случая $t_g > t_f$ в соответствии с (19) будет иметь вид:

$$P_э(\tau) = -\frac{\eta_1\lambda_1 t_f^2}{2} - \frac{1}{3}t_f^3(2\eta_2\lambda_1 + \eta_1\lambda_2) - \frac{\eta_2\lambda_2 t_f^4}{2}. \tag{38}$$

Для случая $t_g \le t_f$ экстремальная оценка показателя качества $P_{kэ}$ в соответствии с (20) будет иметь вид:

$$P_э(\tau) = 1 + \frac{\eta_1\lambda_1 t_g^2}{2} + \frac{2}{3}t_f^3(2\eta_1\lambda_2 + \eta_2\lambda_1) + \frac{\eta_2\lambda_2 t_g^4}{2}. \tag{39}$$

В выражениях (38) и (39) значения t_f, t_g берутся из выражений (35) и (37) соответственно, а значения неопределенных множителей Лагранжа η_1, η_2, λ_1, λ_2 берутся из выражений (27)–(30) соответственно.

Зависимости экстремальной оценки $P_э(\tau)$ от первого момента m_1 при разных значениях второго момента m_2 показаны на рис. 1.

Вид распределений $F(t)$ и $G(t)$ для известных двух моментов распределения показаны на рис. 2 и 3 соответственно.

Зависимость времени t_f от первого момента распределения при значении второго момента $m_2 = 3$ показана на рис. 4.

Приведенные графики качественно показывают характер поведения рассмотренных параметров распределений для случая известных двух моментов распределений. Для всех приведенных зависимостей значения моментов для распределения $G(t)$ брались постоянными: $\mu_1 = 0.2$, $\mu_2 = 2$.

Значения экстремальных оценок показателя $P_э(\tau)$ аналогично оценкам для первых моментов также могут рассматриваться как (38) – верхняя оценка, а (39) – нижняя оценка. На рис. 5 для вероятности (1) показаны зависимости значений экстремальных оценок показателя качества в сравнении с нормальным распределением в зави-

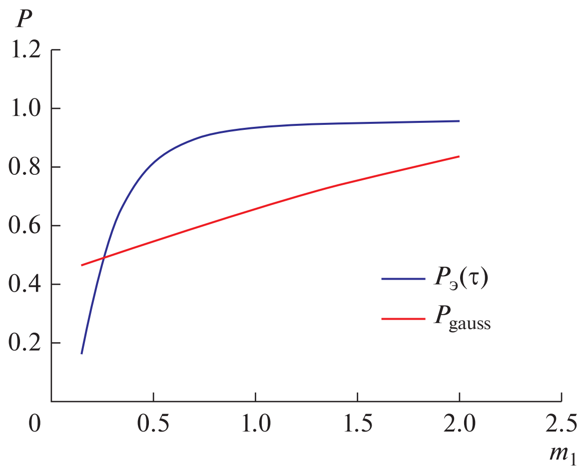

Рис. 5. Сравнение экстремальных оценок качества $P_э(\tau)$ с нормальным законом распределения.

симости от первого момента распределения случайной величины $X(\tau)$ при равных значениях первого и второго моментов распределений. При этом учтено, что при получении оценок выражения для вычисления $P_э(\tau)$ выбираются в зависимости от соотношения между t_g и t_f.

При вычислениях учтено, что для нормального закона распределения случайных величин X и Y значение вероятности (1) равно:

$$P(X > Y) = 0.5 + \Phi\left(\frac{m_x - m_y}{D_x + D_y}\right), \quad (40)$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа, D_{xy}, D_{xy} – дисперсии случайных величин X и Y, m_x, m_y – математические ожидания случайных величин X и Y.

Также учтена зависимость между вторым моментом нормального закона и дисперсией:

$$m_{2x} = D_x + m_{1x}^2. \quad (41)$$

Следует также учитывать, что соотношения, используемые при вычислении $P_э(\tau)$, основаны на полученных финитных распределениях, которые ограничены значениями t_g и t_f.

ВЫВОДЫ

В настоящей статье предложена модель для оценки показателя надежности КА – вероятности безотказной работы КА. Данная модель относится к надежностным моделям типа “нагрузка–прочность”, в которой в качестве параметра “прочность” выступает радиационная стойкость КА, а в качестве параметра “нагрузка” выступают воздействующие на КА ФКП. Оценки вероятности безотказной работы КА найдены в общем случае при неполных данных, представленных моментами распределения величины характеризующей радиационную стойкость КА и величины, характеризующей уровни воздействующих ФКП. Эти оценки получены как решения изопериметрической задачи; при этом при одном и двух моментах соответствующих случайных величин оценки получены в аналитическом виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новиков Л.С.* Радиационные воздействия на материалы космических аппаратов. М.: Университетская книга, 2010.
2. Элементы теории испытаний и контроля технических систем / Под ред. Р.М. Юсупова. Л.: Энергия, 1978.
3. Эффективность технических систем / Под общ. ред. В.Ф. Уткина, Ю.В. Крючкова. М.: Машиностроение, 1988.
4. *Острейковский В.А.* Многофакторные испытания на надежность. М.: Энергия, 1978.
5. Надежность технических систем: Справочник / Р. Барлоу, Ю.К. Беляев, В.А. Богатырев и др.; Под ред. И.А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985.
6. *Новиков Л.С.* Модель космоса. – Т. 2. Воздействие космической среды на материалы и оборудование космических аппаратов. М.: Изд-во “Книжный дом Университет”, 2007.
7. *Бездродных И.П., Морозова Е.И., Петрукова А.А.* Радиационное условия на орбите // Вопросы электромеханики. Труды НПП ВНИИЭМ. М.: ФГУП “ВНИИЭМ”, 2010. Т. 117. № 4. С. 33–42.
8. *Федосов В.В.* Надежность систем автоматического управления. Красноярск: СГАУ им. М.Ф. Решетнева, 2011.
9. *Полесский С., Жданов В., Артюхова М., Прохоров В.* Обеспечение радиационной стойкости аппаратуры космический аппаратов при проектировании // Компоненты и технологии. 2010. № 9. С. 93–98.
10. *Ломакин М.И.* Гарантированные оценки вероятности безотказной работы в классе распределений с фиксированными моментами // Известия АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1991. № 1. С. 154–161.
11. *Ломакин М.И.* Оценки показателей качества по малым выборкам // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. 2011. № 1(1). С. 5.
12. *Ломакин М.И., Бурый А.С., Докукин А.В. и др.* Оценка показателей качества в условиях неполной информации // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. 2018. № 4(44). С. 17.
13. *Ломакин М.И., Сухов А.В.* Оценка показателей качества, описываемых моделью “нагрузка-прочность” // Информационно-экономические аспекты стандартизации и технического регулирования. 2018. № 4(44). С. 22.
14. *Галеев Э.М., Тихомиров В.М.* Краткий курс теории экстремальных задач. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
15. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.
16. *Buryi A.S., Lomakin M.I, Sukhov A.V.* Quality Assessment of “Stress-Strength” Models in the Conditions of Big Data // International J. Innovative Technology and Exploring Engineering (IJITEE). 2020. V. 9. Issue 3. P. 3276–3281. https://doi.org/10.35940/ijitee.C8982.019320