КОСМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ, 2021, том 59, № 5, с. 373–376

УДК 521.1+629.78

ВЛИЯНИЕ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ НА ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ И НЕКОТОРЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОРБИТЫ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

© 2021 г. В. В. Ивашкин[1, 2, *]

[1]Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия

[2]Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия

*Ivashkin@keldysh.ru

Поступила в редакцию 13.01.2021 г.
После доработки 16.02.2021 г.
Принята к публикации 15.04.2021 г.

Учет сжатия Земли с помощью второй зональной гармоники потенциала гравитационного поля Земли модифицирует интеграл энергии приземного движения по сравнению с кеплеровской моделью анализа. На основе этого интеграла получена явная аналитическая структура изменения основного орбитального параметра, кеплеровской константы энергии. Данный метод учета сжатия Земли также дал возможность оценить поправку, по сравнению с обычным невозмущенным анализом, в скорости отлета космического аппарата с околоземной орбиты ожидания при полете к Луне или к планете.

DOI: 10.31857/S0023420621050046

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При полете КА или, вообще, материальной точки в центральном ньютоновском гравитационном поле Земли, движение КА в невращающейся геоцентрической геоэкваториальной системе координат удовлетворяет уравнению:

$$d^2\mathbf{r}/dt^2 = \partial U_0/\partial \mathbf{r}^* = \partial(\mu/r)/\partial \mathbf{r}^* = -\left(\mu/r^3\right)\mathbf{r}, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ (x, y, z) – радиус-вектор точки КА; $r = |\mathbf{r}|$; * – знак транспонирования; μ – гравитационный параметр Земли;

$$U_0(\mathbf{r}) = \mu/r \quad (2)$$

– потенциал притяжения Земли без учета возмущений. Системе (1) соответствуют кеплеровские движения в поле притяжения сферической, однородной Земли. Одним из важнейших первых интегралов в этом случае является интеграл энергии [1–6]:

$$V^2 - 2U_0 = V^2 - 2\mu/r = h_k, \;\; h_k = -\mu/a, \quad (3)$$

где $V = |\mathbf{V}|$; $\mathbf{V}$ – геоцентрическая скорость точки; h_k – кеплеровская константа энергии; элемент a в случае эллиптического движения, когда $h_k < 0$, является большой полуосью орбиты. При гиперболическом движении, когда $h_k > 0$, будет $a < 0$, геометрический смысл имеет модуль $|a| = \alpha$ [3]. Рассмотрим, как изменяется интеграл (3) при учете возмущения от сжатия Земли, как тела вращения, и его использование при анализе орбитального движения материальной точки.

ОБОБЩЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЭНЕРГИИ ПРИ УЧЕТЕ СЖАТИЯ ЗЕМЛИ

В простейшем случае анализа движения у Земли для учета ее сжатия в потенциале Земли U к основному члену U_0 добавляется вторая зональная гармоника U_2 [2, 3, 5, 6]:

$$U(\mathbf{r}) = U_0(\mathbf{r}) + U_2(\mathbf{r}); \quad (4)$$

$$U_2(\mathbf{r}) = -\frac{\varepsilon}{r^3}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right) = -\frac{\varepsilon}{r^3}\left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right), \quad \varepsilon = (3/2)J_2\mu R_{\mathrm{E}}^2, \quad (5)$$

где φ – геоцентрическая широта КА; $J_2 = -C_{20}$ – коэффициент зональной гармоники 2-го порядка, R_{E} – средний экваториальный радиус Земли: $R_{\mathrm{E}} \approx 6378.137$ км; $J_2 \approx 1082.63 \cdot 10^{-6}$ [6]; $\varepsilon \approx 2.63328 \cdot 10^{10}$ км^5/с^2. Уравнение движения (1) меняется:

$$\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}t^2 = \partial U/\partial \mathbf{r}^*, \quad (6)$$

где $U(\mathbf{r})$ есть потенциал (4), (2), (5). К основному ускорению (1) добавится возмущающее $\mathbf{a}_{\mathrm{P}}$, которое есть градиент функции U_2 и в прямоугольных координатах запишется в форме [2]:

$$a_{Px} = \frac{\varepsilon}{r^4}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\frac{x}{r}; \;\; a_{Py} = \frac{\varepsilon}{r^4}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 1\right)\frac{y}{r}; \quad a_{Pz} = \frac{\varepsilon}{r^4}\left(5\frac{z^2}{r^2} - 3\right)\frac{z}{r}. \quad (7)$$

Удвоенная полная механическая энергия движения точки единичной массы $h(\mathbf{r}, \mathbf{V})$ имеет вид:

$$h = V^2 - 2U = V^2 - 2U_0 - 2U_2 = \\ = V^2 - 2\mu/r + \frac{2\varepsilon}{r^3}\left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right). \quad (8)$$

Теорема. Полная механическая энергия движения материальной точки в модели (6), где потенциал $U(\mathbf{r})$ соответствует (4), (2), (5), постоянна на траектории точки.

Действительно, в данном случае ускорение в (6) определяется однозначной скалярной силовой функцией $U = U(\mathbf{r})$, движение происходит в потенциальном поле, силовая функция $U = U(\mathbf{r})$ есть потенциал, не зависящий от времени. Тогда из общей теоремы механики [1, 4] следует, что на траектории точки $dh/dt = 0$ в силу уравнения движения (6), $h = \text{const}$. Можно и непосредственно показать это, используя (6), (1), (7). Следовательно, на любой траектории точки энергия (8) постоянна, имеем первый интеграл:

$$h = V^2 - \frac{2\mu}{r} + \frac{2\varepsilon}{r^3}\left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) = h_K - 2U_2 = \text{const}. \quad (9)$$

Будем называть этот интеграл *обобщенным интегралом энергии*, имея в виду, что он обобщает интеграл (3) на случай учета сжатия Земли при расчете траектории материальной точки КА.

Замечание 1. Из (8), (9) следует, что в данной модели потенциала для заданной константы энергии h движение точки происходит в области пространства $h + 2U = h + 2U_0 + 2U_2 = h + \frac{2\mu}{r} - \frac{2\varepsilon}{r^3}\left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) = V^2 \geq$ ≥ 0. Видно отличие от кеплеровского случая.

Замечание 2. Данный подход может быть применен и для более полной модели зональных гармоник. Используя модель Земли, как тела вращения, симметричного относительно плоскости экватора, добавляют, например, в потенциал U, кроме второй, еще зональную гармонику 4-го порядка. Тогда обобщенный интеграл энергии принимает вид:

$$h = V^2 - 2U = V^2 - 2U_0 - 2U_2 - 2U_4 = V^2 - \frac{2\mu}{r} + \\ + \frac{2\varepsilon}{r^3}\left(\frac{z^2}{r^2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{2\chi}{r^5}\left(\frac{z^4}{r^4} - \frac{6}{7}\frac{z^2}{r^2} + \frac{3}{35}\right).$$

Можно использовать и все разложение потенциала по зональным гармоникам, что позволяет повысить точность и учесть несимметричность относительно экватора:

$$U = \frac{\mu}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{R_E}{r}\right)^n P_n(\sin\varphi)\right].$$

Здесь $P_n(\sin\varphi)$ – полином Лежандра n-го порядка. Для Земли следующие после 2-го порядка коэффициенты: $J_3 = -2.53 \cdot 10^{-6}$; $J_4 = -1.61 \cdot 10^{-6}$ [6], т.е. ~ на три порядка меньше, чем J_2.

Замечание 3. В данном случае потенциального осесимметричного силового поля есть еще интеграл осевого момента количества движения точки [4]: $M_z = (\mathbf{e}_z, [\mathbf{r}, \mathbf{V}]) = m = \text{const}$, где $\mathbf{e}_z$ – орт по оси вращения Земли.

ИЗМЕНЕНИЕ КЕПЛЕРОВСКОЙ КОНСТАНТЫ ЭНЕРГИИ НА ОРБИТАХ ОТЛЕТА К ЛУНЕ И ПЛАНЕТАМ

Выписав интеграл (9) для начальной точки траектории $\mathbf{x}_0$ ($\mathbf{r}_0$, $\mathbf{V}_0$, t_0) и для некоторой другой ее точки $\mathbf{x}_f$ ($\mathbf{r}_f$, $\mathbf{V}_f$, t_f), получим соотношение:

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0} + \frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3}\right) = V_f^2 - \frac{2\mu}{r_f} + \frac{2\varepsilon}{r_f^3}\left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3}\right). \quad (10)$$

Применим его к анализу траекторий отлета КА от Земли к Луне и планетам.

Из (10) следует, что изменение кеплеровской константы энергии в точном анализе удовлетворяет соотношению:

$$\Delta h_k = h_{kf} - h_{k0} = 2U_{2f} - 2U_{20} = \\ = -\frac{2\varepsilon}{r_f^3}\left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3}\right) + \frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3}\right), \quad (11)$$

$$z/r = \sin\varphi = \sin i \sin u = \sin i \sin(\omega + \theta), \quad (11a)$$

здесь i, ω – наклонение и аргумент перигея орбиты; u, θ – аргумент широты и истинная аномалия точки.

Замечание 4. Интеграл энергии (9) и точное соотношение (11) для изменения Δh_k справедливы для любой орбиты, в частности, для любых значений наклонения и эксцентриситета.

Если перейти от кеплеровской константы h_k к полуоси a (3) и линеаризовать по a, то из (11) получим вариацию Δa в первом приближении:

$$\Delta a \approx \left(a_0^2/\mu\right)\Delta h_k. \quad (12)$$

При полете КА к планете отлет от Земли будет происходить по гиперболической орбите (в оскулирующем приближении). Для оценок возьмем для этой орбиты скорость “на бесконечности” V_∞ = 3–4 км/с. В этом случае расстояние r_f возрастает неограниченно, и предпоследний член в (11) $2U_{2f}$ стремится к нулю, поэтому изменение кеплеровской константы энергии Δh_K стремится к предельному значению Δh_{Kl}:

$$\Delta h_K \to \Delta h_{Kl} = -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\sin^2\varphi_0 - \frac{1}{3}\right). \quad (13)$$

Если $\sin^2\varphi_0 < \frac{1}{3}$ ($|\varphi_0| < \varphi_0^* = 35.2644°$), то $\Delta h_{Kl} < 0$. Если $\sin^2\varphi_0 > \frac{1}{3}$, то $\Delta h_{Kl} > 0$. Для полета к Луне полагаем, что используется сильно вытянутая околопараболическая эллиптическая орбита, ее перигей – в начальной точке, $r_\pi = r_0 \approx 6578$ км, начальное расстояние в апогее r_α соответствует расстоянию до Луны r_M при подлете КА к Луне, $r_\alpha \geq (r_M - \Delta r_\alpha)$, $r_M \approx (360–405)$ тыс. км; Δr_α (<0) – поправка на уменьшение r_α за счет сжатия Земли, $\Delta r_\alpha \approx 2\Delta a$. В (11) расстояние r_f возрастает в процессе движения КА от r_0 до $r_M < \infty$, при этом предпоследний член в (11) убывает до некоторой малой величины (~10^{-6} км^2/с^2), и предельное изменение кеплеровской константы h_{Kl}:

$$\Delta h_{Kl} \approx -2U_{20} = \frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\sin^2\varphi_0 - \frac{1}{3}\right).(14) \qquad (14)$$

Для численных оценок, для начальной точки отлета к Луне и планетам с околоземной опорной орбиты возьмем, для определенности, $u_0 = 0$, что близко к характеристикам межпланетных и лунных полетов. Тогда в формулах (13), (14) будет $\varphi_0 = 0$ и $z_0 = 0$, получим:

$$\Delta h_{Kl} \approx -2\varepsilon/\left(3r_0^3\right). \qquad (14a)$$

В этом случае для отлета от Земли как к планете по гиперболической орбите, так и к Луне по вытянутой эллиптической орбите, $\Delta h_{Kl} \approx -0.0617$ км^2/с^2. Численные расчеты подтверждают эти оценки [7, 8]. При $h_K < 0$ это изменение кеплеровской константы энергии (14) соответствует изменению большой полуоси орбиты, в соответствии с (12): $\Delta a \approx -6200$ км при $a_0 = 200$ тыс. км, $\Delta a \approx -8900$ км при $a_0 = 220$ тыс. км, $\Delta a \approx -56000$ км при $a_0 = 600$ тыс. км. Практически это изменение происходит быстро, в течение ~ первых трех часов начального полета КА от Земли, при возрастании расстояния r_f до ~70 тыс. км.

СКОРОСТЬ ОТЛЕТА КА С ОКОЛОЗЕМНОЙ ОПОРНОЙ ОРБИТЫ

Изменение кеплеровской константы энергии, вызванное сжатием Земли, приводит в рамках модели (4), (5) к изменению начальной скорости КА отлета от Земли по сравнению с кеплеровской моделью движения. Для корректности анализа зададим для орбиты отлета некоторое значение кеплеровской константы энергии h_{Kg} (или V_∞, a). Тогда в кеплеровской модели движения КА (1)–(2), в силу интеграла (3), начальная скорость:

$$V_0 = \left(h_{Kg} + 2\mu/r_0\right)^{1/2}. \qquad (15)$$

При учете сжатия Земли, в модели (4)–(5), при условии $h_{Kf} = h_{Kg}$, в силу интеграла (10), начальная скорость определится из соотношения:

$$V_0 = \sqrt{h_{Kg} + \frac{2\mu}{r_0} + 2U_{20} - 2U_{2f}} = \sqrt{h_{Kg} + \frac{2\mu}{r_0} + \Delta h}, \quad (16)$$

где

$$\Delta h = 2U_{20} - 2U_{2f} = \frac{2\varepsilon}{r_f^3}\left(\frac{z_f^2}{r_f^2} - \frac{1}{3}\right) - \frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3}\right) \approx -\frac{2\varepsilon}{r_0^3}\left(\frac{z_0^2}{r_0^2} - \frac{1}{3}\right).$$

Дадим численные оценки для случая $z_0 = 0$. При отлете от Земли к планете по геоцентрической орбите с $V_\infty = 3–4$ км/с учет сжатия Земли в (16) увеличивает по сравнению с кеплеровским случаем (15) начальную скорость V_0 от ~11.410–11.713 до ~11.413–11.716 км/с, т.е. на ~3 м/с. При полете к Луне, при $r_\alpha = r_M + |\Delta r_\alpha|$, $r_M = = 400$ тыс. км, учет сжатия увеличивает начальную скорость V_0 от ~10.919 до ~10.922 км/с, т.е. тоже на ~3 м/с. Это приводит к заданию начальной оскулирующей большой полуоси орбиты, увеличенной (по сравнению с кеплеровским случаем) на ~6.5 тыс. км, и увеличенного на ~13 тыс. км [7, 8] начального апогейного расстояния r_α, как отмечено выше.

ОЦЕНКА ИЗМЕНЕНИЯ КЕПЛЕРОВСКОЙ КОНСТАНТЫ ЭНЕРГИИ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

При анализе движения КА по гиперболической и сильно вытянутой эллиптической орбите мы использовали расстояние до центра Земли в качестве параметра на траектории. В общем случае удобнее взять за параметр на орбите истинную аномалию θ [9] или время t, или среднюю аномалию M [10, 11]. Преобразуем соотношения (11), (12) для использования угла θ при определении изменения кеплеровской константы Δh_{K} (или полуоси Δa), в первом приближении. Тогда, согласно (11), (11a), учитывая также уравнение орбиты, получим:

$$\Delta h_k = 2U_{2f} - 2U_{20} \approx -\frac{2\varepsilon}{p^3}(1 + e\cos\theta)^3 \times \left[\sin^2 i \sin^2(\omega + \theta) - \frac{1}{3}\right] - 2U_{20}, \qquad (17)$$

где элементы орбиты: фокальный параметр p, эксцентриситет e, i, ω равны их начальным значениям p_0, e_0, i_0, ω_0. Изменение Δa определится по (12). Если орбита эллиптическая, $a > 0$, и рассматривается многооборотное движение точки, то можно провести осреднение движения. Для упрощения этой процедуры, используя элементарные тождественные тригонометрические преобразования, приводим $2U_{2f}$ к сумме константы $c_{0\theta}$ и нескольких слагаемых вида: $(2\varepsilon/p^3)\ c_j(i,\ e)\cos(n_j\omega + m_j\theta)$, где n_j, m_j – целые числа:

$$2U_{2f} = c_{0\theta} + \left(2\varepsilon/p^3\right)\sum_{j=1}^{J} c_j(i,e)\cos(n_j\omega + m_j\theta),$$
$$c_{0\theta} = \left(2\varepsilon/3p^3\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(1 + \frac{3}{2}e^2\right).$$

Эта константа дает “среднее” смещение кеплеровской константы энергии h_K за счет сжатия Земли, согласно (17). В данной задаче этот параметр θ удобен, но принято делать осреднение по средней аномалии *M*. Тогда, после некоторых преобразований, получим “среднее” по *M* значение функции $2U_{2f}$:

$$c_{0M} = \left(2\varepsilon/3ap^2\right)\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\left(1 - e^2\right)^{1/2}.$$

Замечание 5. Пусть небесное тело не отлетает от Земли, а приближается к ней, входя в ее атмосферу. Тогда изменение кеплеровской константы энергии со временем осуществляется в обратном направлении. При этом расстояние от Земли *r* уменьшается со временем, и величина потенциала U_2 возрастает до конечного значения, соответствующего входу в атмосферу, $r \sim 6478$ км.

Замечание 6. Если небесное тело (КА, астероид, комета) приближается к Земле, двигаясь на большом расстоянии ($r \sim 300$–400 тыс. км) от Земли по эллиптической околопараболической орбите, для которой $-\Delta h_K < h_K < 0$, то из-за сжатия Земли кеплеровская константа энергии может увеличиться до положительного значения, и это тело сблизится с Землей по гиперболической орбите. Возможен и другой случай, когда под влиянием сжатия Земли орбита меняет свою структуру с гиперболической на эллиптическую.

ВЫВОДЫ

Упрощенный анализ влияния сжатия Земли как тела вращения – на основе зональных гармоник гравитационного потенциала – позволяет использовать интеграл энергии, обобщающий интеграл энергии в кеплеровском случае. Это дает возможность рассмотреть некоторые качественные особенности движения КА при полете к Луне и планетам и при возврате к Земле, а также небесных тел, астероидов и комет, тесно сближающихся с Землей. Сжатие Земли может вызвать изменение структуры орбит этих тел – с эллиптической на гиперболическую и обратно.

В заключение автор выражает искреннюю признательность В.В. Сазонову и А.А. Суханову за интересное обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Суслов Г.К.* Теоретическая механика. М.: Гостехиздат, 1944.
2. *Аким Э.Л., Энеев Т.М.* Определение параметров движения космического летательного аппарата по данных траекторных измерений // Космич. исслед. 1963. Т. 1. Вып. 1. С. 5–50.
3. *Эльясберг П.Е.* Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М.: Наука, 1965.
4. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
5. *Охоцимский Д.Е., Сихарулидзе Ю.Г.* Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
6. *Chobotov V.A.* Orbital Mechanics // Ed. AIAA Education Series. AIAA, USA, 2002.
7. *Ивашкин В.В.* Оптимизация космических маневров при ограничениях на расстояния до планет. М.: Наука, 1975.
8. *Ивашкин В.В.* Об оптимальных траекториях полета КА к Луне в системе Земля–Луна–Солнце. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. 2001. № 85.
9. *Krause H.G.L.* Die säkularen und periodischen Störungen der Bahn eines künstlichen Erdsatteliten // 7th International Astronautical Congress, Rome. 1956. Proceedings. P. 523–585.
10. *Проскурин В.Ф., Батраков Ю.В.* Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли // Бюллетень Института теоретической астрономии. 1960. Т. 7. № 7(90). С. 537–549.
11. *Абалакин В.К. и др.* Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976.