

ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ

УДК 534-16+534.242

ВЫРОЖДЕННЫЕ ОТРАЖЕНИЯ В АКУСТИКЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ. II. РОМБИЧЕСКИЕ КРИСТАЛЛЫ

© 2019 г. В. Н. Любимов^{1,*}

¹ Институт кристаллографии им. А.В. Шубникова ФНИЦ “Кристаллография и фотоника” РАН, Москва, Россия

* E-mail: lyubvn36@mail.ru

Поступила в редакцию 01.03.2018 г.

После доработки 01.03.2018 г.

Принята к публикации 15.03.2018 г.

Анализируются условия, когда при некотором угле падения объемная акустическая волна в кристалле, отражаясь от его границы с вакуумом, порождает не три отраженные объемные волны, как в общем случае, а две или одну. Такие вырожденные отражения рассмотрены на примере ромбических кристаллов.

DOI: 10.1134/S0023476119030196

ВВЕДЕНИЕ

Когда акустическая объемная волна в кристалле отражается от его границы с вакуумом, возникает несколько отраженных волн. Здесь возможен ряд вариантов: три отраженные объемные волны; две отраженные объемные и одна сопутствующая волна, локализованная у границы; одна отраженная объемная и две локализованные волны.

Отметим, что только объемные парциальные волны являются отраженными. Это становится очевидным, если вспомнить о том, что физический образ плоской волны реализуется в виде акустического пучка с шириной, значительно превышающей длину волны. Таким образом, локализованная парциальная волна присутствует только в окрестности акустического “пятна” на поверхности, где она обеспечивает выполнение граничных условий всей суперпозицией волн, и к отражению, т.е. отводу энергии от границы, прямого отношения не имеет. Следовательно, среди парциальных волн должна существовать хотя бы одна объемная отраженная волна.

Реализуемость конкретного варианта с определенным числом отраженных волн зависит от симметрии кристалла, его упругой анизотропии, геометрии распространения (ориентации границы, направления падающей волны) и акустической ветви, к которой принадлежит падающая волна. При определенных сочетаниях этих факторов амплитуда одной из отраженных объемных волн может оказаться нулевой. Отражение оказывается вырожденным — в качестве отраженных могут быть две объемные волны, одна объемная вместе с локализованной и, наконец, одна объем-

ная. Такие отражения в кубических кристаллах рассматривались в [1, 2], а в гексагональных — в [3]. Исследовались также варианты, при которых падающая волна порождает отраженную объемную волну, близкую к собственной моде, — особой объемной волне. При этом в условиях близости направления распространения отраженной волны к поверхности кристалла удается сконцентрировать всю энергию падающей волны в узком отраженном пучке, которому сопутствует лишь одна локализованная у поверхности волна. Такое отражение является вырожденным [4–6]. Вне связи с резонансами общая теория отражений в кристаллах произвольной симметрии развита в [7–11]. Вырожденные отражения существуют и в изотропных средах [12–15], с общим описанием таких отражений дано в [16].

В настоящей работе рассмотрены вырожденные отражения в анизотропных кристаллах. Общий анализ конкретизирован на примере ромбических кристаллов.

ВАРИАНТЫ ВЫРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЙ В КРИСТАЛЛАХ

При падении на границу кристалла распространяющейся в нем акустической объемной волны ветви α ($\alpha = 1, 2, 3$) с волновым вектором \mathbf{k}_α^i возникают в общем случае три парциальные волны (объемные и локализованные) с волновыми векторами \mathbf{k}_β^r ($\beta = 1, 2, 3$). Соотношение между падающей и отраженными волнами удобно рассматривать, используя понятие поверхности рефракции. Это трехполостная поверхность, обра-

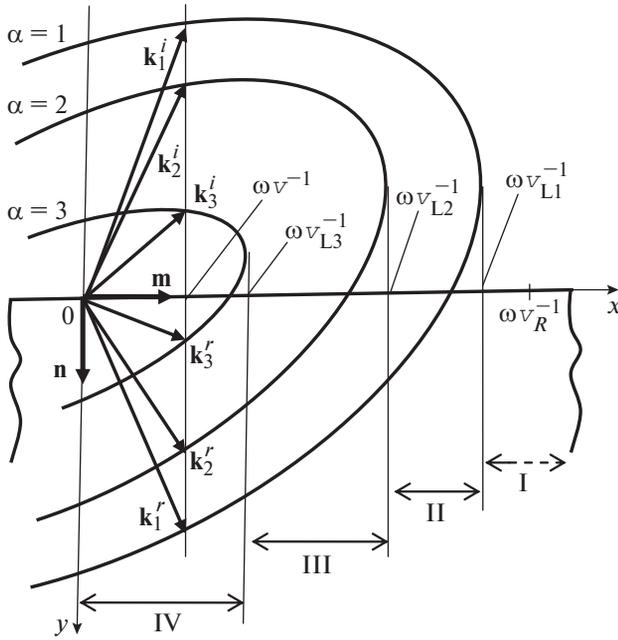


Рис. 1. Сечения трех полостей ($\alpha = 1, 2, 3$) поверхности рефракции кристалла плоскостью падения (xy). В интервале IV приведенных скоростей v показаны возможные варианты ориентаций вещественных волновых векторов падающих на границу кристалла (\mathbf{k}_α^i) и отраженных от нее (\mathbf{k}_α^r) волн.

зованная концами волновых векторов объемных волн, когда эти векторы сканируют сферу всех возможных направлений распространения [7]. На рис. 1 представлено сечение такой поверхности плоскостью падения.

Ориентация границы кристалла задана единичным вектором нормали к ней \mathbf{n} , направление распространения совокупного волнового поля вдоль поверхности – единичным вектором \mathbf{m} ($\mathbf{m} \perp \mathbf{n}$). Число объемных волн, отраженных от свободной границы кристалла, зависит от той области (I–IV) поверхности медленностей, в которую попадает приведенная скорость v :

$$v = \omega/k, \quad k = \mathbf{k}_\alpha^i \cdot \mathbf{m} = \mathbf{k}_\alpha^r \cdot \mathbf{m}, \quad (1)$$

здесь ω – частота. Границы между областями I, II, III, IV на рис. 1 определяются значениями предельных скоростей $v_{L\alpha}$. Каждой такой скорости отвечает вертикальная касательная (параллельная \mathbf{n}) к соответствующей линии медленностей в рассматриваемом сечении. Как вытекает из уравнений движения и граничных условий для свободной поверхности кристалла, каждому значению скорости v отвечают в общем случае шесть различных волновых векторов. Конечно, единственную падающую волну α надлежит выбрать из трех возможных, так что суперпозиция отражения будет включать в себя не более четырех

парциальных волн, а в исследуемых случаях вырождения – даже меньше.

В области IV ($0 < v^{-1} \leq v_{L3}^{-1}$) все волновые векторы вещественные. При этом векторы $\mathbf{k}_\alpha^{i,r}$ и совокупное волновое поле $\mathbf{u}(x, y, t)$ как функцию координат x, y и времени t можно представить в следующей форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha^{i,r} &= k(\mathbf{m} + p_\alpha^{i,r} \mathbf{n}), \\ \mathbf{u}(x, y, t) &= \mathbf{A}(y) \exp[ik(x - vt)], \\ \mathbf{A}(y) &= C_\alpha^i \mathbf{A}_\alpha^i \exp(ikp_\alpha^i y) + \sum_{\beta=1}^3 C_\beta^r \mathbf{A}_\beta^r \exp(ikp_\beta^r y), \\ p_\alpha^{i,r} &= \mathbf{k}_\alpha^{i,r} \cdot \mathbf{n}/k, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2)$$

Нормированные амплитуды $\mathbf{A}_\alpha^{i,r}(v)$ и вещественные параметры $p_\alpha^{i,r}(v)$ находятся из стандартных уравнений движения [7, 12, 13] как функции приведенной скорости v , от которой зависят углы падения и отражения $\angle(\mathbf{k}_\alpha^{i,r}, \mathbf{m}) = \arctg[p_\alpha^{i,r}(v)]$. Амплитудные коэффициенты C_α^i и C_β^r в (2) связаны между собой условием отсутствия силы, действующей на границу кристалла со стороны парциальных волн:

$$\begin{aligned} C_\alpha^i \mathbf{L}_\alpha^i + C_1^r \mathbf{L}_1^r + C_2^r \mathbf{L}_2^r + C_3^r \mathbf{L}_3^r &= 0, \\ (\mathbf{L}_\beta^{i,r})_j &= -c_{iqkl} n_q (m_k + p_\beta^{i,r} n_k) (A_\beta^{i,r})_l. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{L}_\alpha^{i,r}(v)$ – силы, созданные отдельными парциальными волнами на границе $y = 0$, c_{ijkl} – модуль упругости кристалла.

Используя амплитуды отраженных волн при падении на границу кристалла любой объемной волны ветви α с параметрами C_α^i , \mathbf{k}_α^i , \mathbf{L}_α^i , получим следующие коэффициенты отражения [17]:

$$\begin{aligned} R_{1\alpha}(v) &= \frac{C_1^r}{C_\alpha^i} = -\frac{[\mathbf{L}_\alpha^i \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_3^r]}{[\mathbf{L}_1^r \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_3^r]}, \\ R_{2\alpha}(v) &= \frac{C_2^r}{C_\alpha^i} = -\frac{[\mathbf{L}_1^r \mathbf{L}_\alpha^i \mathbf{L}_3^r]}{[\mathbf{L}_1^r \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_3^r]}, \\ R_{3\alpha}(v) &= \frac{C_3^r}{C_\alpha^i} = -\frac{[\mathbf{L}_1^r \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_\alpha^i]}{[\mathbf{L}_1^r \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_3^r]}, \end{aligned} \quad (4)$$

где v – параметр, изменяющийся в границах области IV. Поскольку падающая волна может принадлежать любой из трех ветвей α , соотношения (4) описывают девять различных коэффициентов отражения.

Рассмотрим случай, когда при падении на границу кристалла волны ветви α с волновым вектором \mathbf{k}_α^i отраженных волн не три, а две. Это означает обращение в ноль одного из коэффициен-

тов (4) при некоторой скорости $v = v_0$. Например, требование $C_1^r = 0$ в соотношениях (4) означает, что $R_{1\alpha}(v_0) = 0$, откуда следует соотношение

$$[\mathbf{L}_\alpha^i \mathbf{L}_2^r \mathbf{L}_3^r]_{v_0} = 0. \quad (5)$$

При скорости v_0 , определенной этим соотношением, отраженными будут только две объемные волны, для которых $C_2^r, C_3^r \neq 0$. Скорость v_0 задает при этом ориентации волновых векторов всех волн, участвующих в рассматриваемом трехпарциальном отражении. Однако, поскольку гарантий существования такого решения нет, следует анализировать каждый кристалл отдельно, конкретизируя его модули упругости и геометрию распространения.

Рассмотрим возможность формирования подобного вырожденного отражения для всех коэффициентов (4). Возникающие при этом варианты можно разбить на две группы. Во-первых, это шесть отражений, в которых среди отраженных парциальных волн присутствует волна той же ветви, что и падающая:

$$\begin{aligned} &(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \\ &(\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_3^i, \mathbf{k}_3^r, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_3^i, \mathbf{k}_3^r, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Во-вторых, это три отражения, в которых среди отраженных волн не присутствуют парциальные волны той ветви, к которой принадлежит падающая волна:

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_3^r, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_3^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}. \quad (7)$$

При $v^{-1} = v_{L3}^{-1}$ возникает вырождение: $\mathbf{k}_3^i = \mathbf{k}_3^r$, $p_3^i = p_3^r$, а при переходе в область III ($v_{L3}^{-1} < v^{-1} \leq v_{L2}^{-1}$) эта вырожденная пара вещественных векторов превращается в комплексно сопряженную пару, поскольку теперь $p_3^i = p_3^r \rightarrow p_3^i \pm ip_3^r$. При этом следует выбирать тот комплексный вектор \mathbf{k}_3 , мнимая часть которого отвечает убыванию интенсивности соответствующей парциальной волны при удалении от границы в глубь кристалла. В области III парциальные волны ветвей $\alpha = 1, 2$ остаются объемными. В качестве падающей волны здесь может быть любая из двух объемных парциальных волн с волновыми векторами \mathbf{k}_1^i и \mathbf{k}_2^i . Отраженными объемными волнами могут быть парциальные волны тех же двух ветвей. При этом в соотношениях (6) остаются четыре комбинации:

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad (8)$$

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \quad (9)$$

в соотношениях (7) — две комбинации:

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_3^r)_{v_0}. \quad (10)$$

В соотношениях (8) падающая волна порождает две объемные отраженные волны, в (9) и (10) — одну объемную волну, сопровождаемую локализованной компонентой. В (9) падающая и отраженная объемные волны принадлежат одной и той же акустической ветви, т.е. это случаи чистых отражений, а в (10) они принадлежат разным акустическим ветвям — это случаи конверсионных отражений.

При $v^{-1} = v_{L2}^{-1}$ возникает новое вырождение: $\mathbf{k}_2^i = \mathbf{k}_2^r$, $p_2^i = p_2^r$, а при переходе в область II ($v_{L2}^{-1} < v^{-1} \leq v_{L1}^{-1}$) эта вырожденная пара вещественных векторов превращается в комплексно сопряженную пару, поскольку теперь $p_2^i = p_2^r \rightarrow p_2^i \pm ip_2^r$. Как и выше, сохраняем лишь тот комплексный вектор \mathbf{k}_2 , мнимая часть которого отвечает убыванию интенсивности соответствующей парциальной волны при удалении от поверхности в глубь кристалла. Таким образом, в области II вещественными остаются волновые векторы \mathbf{k}_1^i и \mathbf{k}_1^r ветви $\alpha = 1$. Ветвям $\alpha = 2, 3$ отвечают комплексные векторы \mathbf{k}_2 и \mathbf{k}_3 . В данной области возможны только две различные трехпарциальные комбинации, которые отвечают чистым отражениям:

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_2)_{v_0}, \quad (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r, \mathbf{k}_3)_{v_0}. \quad (11)$$

Эти варианты отличаются друг от друга лишь локализованными у поверхности кристалла компонентами. При варьировании значений параметра v в области II, когда отражение уже не является вырожденным ($v \neq v_0$), падающая волна порождает объемную отраженную волну той же ветви, что и падающая, и две локализованные у поверхности волны ветвей $\alpha = 2, 3$. Такое отличие от вырожденного отражения не является принципиальным.

На правой границе области II ($v^{-1} = v_{L1}^{-1}$) имеем $\mathbf{k}_1^i = \mathbf{k}_1^r$, а при переходе в область I ($v_{L1}^{-1} \leq v^{-1}$) волновые векторы всех трех ветвей комплексны. Объемные волны здесь невозможны. Реализуются лишь локализованные волновые поля, формирующие рэлеевскую волну, скорость которой находится из условия

$$[\mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_3]_{v_R} = 0. \quad (12)$$

Наличие решения для скорости $v = v_R$ ($v_{L1}^{-1} < v_R^{-1}$) гарантировано теоремами существования и единственности [18–20].

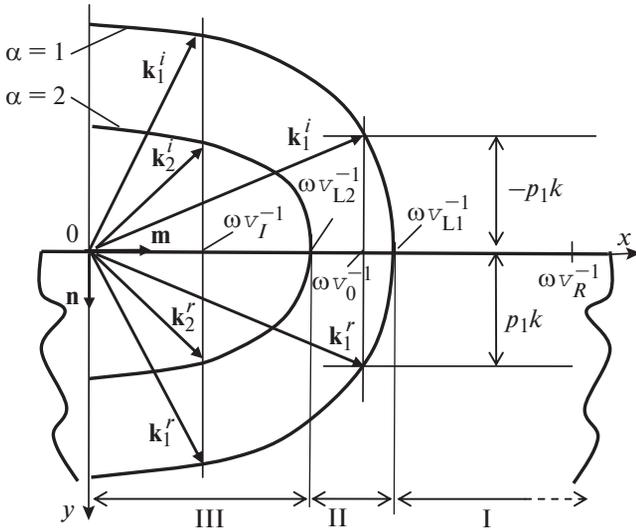


Рис. 2. Схемы вырожденных отражений в ромбических кристаллах. Показаны сечения двух полостей ($\alpha = 1, 2$) поверхности рефракции плоскостью падения (xy); $v_{L\alpha}$ – скорости предельных волн, $(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^i)_{v_0}$ – чистое отражение, $(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^i)_{v_1}$, $(\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_1^i)_{v_1}$ – конверсионные отражения.

**ВЫРОЖДЕННЫЕ ОТРАЖЕНИЯ
В РОМБИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ**

Рассматривая отражения в ромбических кристаллах, будем использовать стандартную кристаллографическую систему координат, оси которой x, y, z направлены вдоль осей симметрии 2. Такие кристаллы характеризуются девятью независимыми модулями упругости [7]:

$$c_{11}, c_{22}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{23}, c_{44}, c_{55}, c_{66}. \tag{13}$$

Выберем в качестве поверхности кристалла и плоскости падения координатные плоскости (xz) и (xy) соответственно. Для такой симметричной геометрии распространения на рис. 2 представлено сечение поверхности рефракции плоскостью падения. На рис. 2 не показана отщепившаяся чисто поперечная SH -волна ($\alpha = 3$), для которой вектор поляризации $\mathbf{A}_3^i = \mathbf{A}_3^r = (0, 0, 1)$ ортогонален плоскости падения. В континуальной области изменения приведенной скорости $0 < v \leq v_{L3}^{-1}$, $\rho v_{L3}^2 = c_{55}$ (здесь ρ – плотность кристалла) происходит чистое отражение данной объемной волны:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_3^{i,r} &= k(\mathbf{m} \mp p_3 \mathbf{n}), \\ p_3(v^2) &= \sqrt{(v^2 - v_{L3}^2)/(c_{44}/\rho)}, \\ C_3^r &= C_3^i R_{33}(v) \equiv 1. \end{aligned} \tag{14}$$

При $v^2 = v_{L3}^2$, когда $p_3 = 0$, имеем $\mathbf{k}_3^i = \mathbf{k}_3^r = k\mathbf{m}$ – вдоль границы распространяется особая объемная волна, удовлетворяющая граничным условиям.

Парциальные волны двух других акустических ветвей ($\alpha = 1, 2$) имеют векторы поляризации, лежащие в плоскости падения (xy). Поскольку при рассматриваемой геометрии распространения SH -волна отщепилась, на рис. 2 теперь три различных области изменения скорости v (I, II, III), а не четыре, как в более общем случае, представленном на рис. 1.

В области III, когда $0 < v^{-1} \leq v_{L2}^{-1}$, $\rho v_{L2}^2 = c_{11}$ (далее будем считать, как обычно, $c_{11} > c_{66}$), волновые векторы рассматриваемых двух ветвей $\alpha = 1, 2$ вещественны. Здесь векторы $\mathbf{k}_\alpha^{i,r}$ и $\mathbf{A}_\alpha^{i,r}$ задаются соотношениями

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\alpha^{i,r} &= (1, \mu p_\alpha, 0)k \quad (\alpha = 1, 2), \\ \mathbf{A}_\alpha^{i,r} &\parallel \{\rho v^2 - c_{22} p_\alpha^2 - c_{66}, \mp (c_{12} + c_{66}) p_\alpha, 0\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Для дальнейшего анализа вместо v и $c_{\alpha\beta}$ удобно ввести безразмерные параметры

$$\begin{aligned} \rho v^2/c_{66} &= \xi^2, \\ c_{66}/c_{22} &= a_1, \quad c_{11}/c_{22} = a_2, \quad c_{12}/c_{22} = a_3. \end{aligned} \tag{16}$$

Запишем компоненты p_α , входящие в (15), как функции параметров (16):

$$p_{1,2}(\xi^2, a_1, a_2, a_3) = \sqrt{(-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q})/2}, \tag{17}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} Q(\xi^2) &= (\xi^2 - 1)(\xi^2 a_1 - a_2), \\ -P(\xi^2) &= \xi^2(a_1 + 1) + g, \\ g &= (a_3^2 + 2a_1 a_3 - a_2)/a_1. \end{aligned} \tag{18}$$

Выпуклость всех кривых медленностей на рис. 2 обеспечивается требованием

$$-P|_{\xi^2=1} = \frac{[(a_1 + a_3)^2 + a_1] - a_2}{a_1} < 0. \tag{19}$$

При обратном знаке этого неравенства на внешней кривой медленностей возникают экстремумы.

В каждом отражении для акустических ветвей $\alpha = 1, 2$ (когда v – континуальный параметр) теперь участвуют три парциальные волны – падающая и две отраженные. Тогда по аналогии с (3) имеем

$$C_\alpha^i \mathbf{L}_\alpha^i + C_1^r \mathbf{L}_1^r + C_2^r \mathbf{L}_2^r = 0, \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\alpha^{i,r} &\equiv \mathbf{L}_\alpha^{i,r}(p_\alpha^{i,r}), \quad p_\alpha^{i,r} = \mu p_\alpha(\xi^2), \\ \mathbf{L}_\alpha^{i,r} &\parallel \{\mu p_\alpha(-p_\alpha^2 + a_1 \xi^2 + a_3), p_\alpha^2 + a_3(\xi^2 - 1), 0\}. \end{aligned} \tag{21}$$

Коэффициенты отражения принимают вид

$$\begin{aligned} R_{1\alpha}(v) &= \frac{C_1^r}{C_\alpha^r} = -\frac{[\mathbf{L}_\alpha^i \times \mathbf{L}_2^r]}{[\mathbf{L}_1^r \times \mathbf{L}_2^r]}, \\ R_{2\alpha}(v) &= \frac{C_3^r}{C_\alpha^r} = -\frac{[\mathbf{L}_1^r \times \mathbf{L}_\alpha^i]}{[\mathbf{L}_1^r \times \mathbf{L}_2^r]}. \end{aligned} \quad (22)$$

Поскольку здесь $\alpha = 1, 2$, данные соотношения описывают четыре коэффициента отражения. Если потребовать, чтобы при отражении возникла лишь одна отраженная волна, то для чистых отражений, как вытекает из (22), оказываются возможными следующие варианты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad R_{11} \neq 0, \quad R_{21} = [\mathbf{L}_1^r(p_1^r) \times \mathbf{L}_1^i(p_1^i)] = 0, \\ (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}, \quad R_{22} \neq 0, \quad R_{12} = [\mathbf{L}_2^r(p_2^r) \times \mathbf{L}_2^i(p_2^i)] = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Оказалось, что оба варианта (23) приводят к одному и тому же результату, определяя параметр ξ_0^2 , отвечающий чистым отражениям как в ветви $\alpha = 1$, так и в ветви $\alpha = 2$:

$$\xi_0^2 = \frac{\rho v_0^2}{c_{66}} = \frac{A}{a_3 + 1}, \quad (24)$$

$$A = (a_2 - a_3^2)/a_1 = (c_{11}c_{22} - c_{12}^2)/c_{22}c_{66}.$$

Эти соотношения описывают поверхность в пространстве параметров (ξ_0^2, a_1, a_2, a_3) или (ξ_0^2, A, a_3):

$$\xi_0^2 = \xi_0^2(a_1, a_2, a_3) = \xi_0^2(A, a_3). \quad (25)$$

Вследствие условий устойчивости [7] заведомо $A > 0$, тогда решение (24) существует при условии

$$a_3 + 1 > 0 \quad (c_{12} + c_{22} > 0). \quad (26)$$

Это условие может быть нарушено лишь в экзотических случаях, поскольку всегда $c_{22} > 0$ [7] и обычно $c_{12} > 0$.

В пределе перехода к изотропной среде вместо девяти независимых модулей упругости (13) ромбического кристалла остаются независимыми лишь два модуля — c_{11} и c_{66} :

$$\begin{aligned} c_{11} = c_{22} = c_{33}, \quad c_{12} = c_{13} = c_{23} = c_{11} - 2c_{66}, \\ c_{44} = c_{55} = c_{66}. \end{aligned} \quad (27)$$

При этом результат (24) существенно упрощается:

$$\xi_0^2 = \rho v_0^2 / c_{66} = 2. \quad (28)$$

Этот предельный вариант непосредственно рассматривался в [16].

Для конверсионных отражений из формул (22) вытекают следующие варианты:

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_2^r)_{v_0}, \quad R_{31} \neq 0, \quad R_{11} = [\mathbf{L}_1^i(p_1^i) \times \mathbf{L}_2^r(p_2^r)] = 0, \\ (\mathbf{k}_2^i, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad R_{12} \neq 0, \quad R_{22} = [\mathbf{L}_1^r(p_1^r) \times \mathbf{L}_2^i(p_2^i)] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Оба варианта приводят к одному и тому же уравнению, из которого определяется параметр $\xi^2 = \rho v^2 / c_{66}$:

$$\xi^2 \left(1 - \sqrt{\frac{a_1 \xi^2 - a_2}{\xi^2 - 1}} \right) = A. \quad (30)$$

Это уравнение справедливо не только в области III. При замене в исходных соотношениях (29)

$p_1^{i,r} \rightarrow ip_1^i, p_2^{i,r} \rightarrow ip_2^i$ (параметры $p_\alpha^{i,r}$ здесь мнимые) уравнение (30) остается справедливым в области I. Оно справедливо и тогда, когда внешняя кривая рефракции на рис. 2 имеет экстремумы. В этом случае речь идет о волновых полях, локализованных у границы кристалла, — рэлеевских волнах. Другими словами, уравнение (30) описывает как конверсионные отражения, так и рэлеевские волны.

Освобождаясь от иррациональностей в уравнении (30), сводим его к полиномиальной форме — бикубическому уравнению для параметра ξ^2 :

$$a\xi^6 + b\xi^4 + c\xi^2 + d = 0. \quad (31)$$

Коэффициенты a, b, c, d выражаются через параметры a_1, a_2, A :

$$\begin{aligned} a = 1 - a_1, \quad b = a_2 - 1 - 2A, \\ c = A(A + 2), \quad d = -A^2. \end{aligned} \quad (32)$$

В пределе изотропной среды (28) уравнение (31) сводится к классическому соотношению [7, 12, 13]:

$$\begin{aligned} \xi^6 - 8\xi^4 + 8(3 - 2\kappa)\xi^2 - \\ - 16(1 - \kappa) = 0 \quad (\kappa = c_{66}/c_{11}). \end{aligned} \quad (33)$$

Заклучения о характере трех корней ξ^2 уравнений (31) и (33) могут быть сделаны на основе анализа знака функции $D(a_1, a_2, A)$, которая имеет вид [21]:

$$D(a_1, a_2, A) = \left(\frac{b^3}{27} - \frac{abc}{6} + \frac{a^2d}{2} \right)^2 + \left(\frac{3ac - b^2}{9} \right)^3. \quad (34)$$

Здесь величины a, b, c, d выражаются через параметры a_1, a_2, A , согласно (32). При любом знаке функции D один из трех корней уравнений (31) и (33) вещественный и положительный ($\xi_R^2 > 0$), лежит в области I ($v_{L1}^{-1} < v_R^{-1}$ — рис. 2) и отвечает рэлеевской волне. Теоремы [18–20] гарантируют существование такого корня. В области $D \leq 0$ другие два корня ξ_I^2 и ξ_{II}^2 вещественные. Если они положительны, то отвечают конверсионным отражениям. В области $D > 0$ корни ξ_I^2 и ξ_{II}^2 комплексно сопряженные и отвечают нефизическим решениям. При $D = 0$ из трех действительных кор-

Таблица 1. Значения параметров $\rho v_0^2, \rho v_1^2, \rho v_{II}^2, \rho v_R^2$ ряда кристаллов

Кристалл	$\mathbf{n} \parallel$	$\mathbf{m} \parallel$	ρv_0^2	ρv_1^2	ρv_{II}^2	ρv_R^2
Топаз	y	x	17.9	31.5	39.2	9.98
		z	22.3	31.2	41.8	9.28
	z	y	26.1	41.5	53.7	8.07
		x	20.5	29.2	56.7	10.1
	x	z	21.2	30.2	62.0	10.3
		y	21.3	38.8	58.9	10.4
Арагонит	y	x	10.1	16.4	29.7	3.60
		z	6.91	8.40	19.9	3.17
	z	y	7.06	8.65	20.8	3.17
		x	15.7	16.0	24.1	2.43
	x	z	8.35	8.47	10.7	2.42
		y	6.34	8.93	11.6	3.40
Сегнетова соль	y	x	1.46			0.78
		z	2.04			0.63
	z	y	2.10			0.63
		x	1.62			0.28
	x	z	2.04			0.28
		y	1.89			0.81

ней два совпадают. Таким образом, в пространстве положительных переменных $a_1, a_2, A > 0$ уравнение $D(a_1, a_2, A) = 0$ определяет поверхность вырождения. В пределе изотропной среды, когда справедливо уравнение (33), точка вырождения корней $\xi_1^2 = \xi_{II}^2 = \xi_d^2$ на плоскости (κ, ξ^2) отвечает значениям $(\kappa_d, \xi_d^2) \approx (0.321, 3.6)$ [1–3, 12–16].

В области II ($v_{L2}^{-1} < v^{-1} \leq v_{L1}^{-1}, \rho v_{L1}^2 = c_{66}$) ветви $\alpha = 1$ отвечают вещественные векторы \mathbf{k}_1^i и \mathbf{k}_1^r , а ветви $\alpha = 2$ – комплексный вектор \mathbf{k}_2 . Когда величина v – континуальный параметр, при отражении возникает объемная волна в сопровождении локализованной. Здесь возможен единственный вариант вырожденного отражения:

$$(\mathbf{k}_1^i, \mathbf{k}_1^r)_{v_0}, \quad R_{11} \neq 0, \quad R_{21}(v_0) = 0, \quad (35)$$

а вырождение сводится к тому, что исчезает локализованная волна.

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные соотношения для поверхности кристалла (xz) и направления распространения x совокупного поля в ромбическом кристалле позволяют дать аналогичное описание для другого направления распространения – z – на той же поверхности. Фактически все сводится к переобозначению осей координат ($x \rightarrow z, z \rightarrow -x$) и, как

следствие, к изменению индексов модулей упругости:

$$\xi^2 = \rho v^2 / c_{66} \rightarrow \rho v^2 / c_{44}, \quad a_1 = c_{66} / c_{22} \rightarrow c_{44} / c_{22}, \quad (36)$$

$$a_2 = c_{11} / c_{22} \rightarrow c_{33} / c_{22}, \quad a_3 = c_{12} / c_{22} \rightarrow c_{32} / c_{22}.$$

Более того, последовательно используя циклическую перестановку индексов модулей упругости

$$\begin{aligned} 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 1, \\ 4 \rightarrow 5, \quad 5 \rightarrow 6, \quad 6 \rightarrow 4, \end{aligned} \quad (37)$$

получаем соотношения для двух других поверхностей ромбического кристалла (yx) и (zy), причем на каждой из них для двух направлений распространения. В итоге проведенное рассмотрение охватывает шесть неэквивалентных геометрий распространения. В полученных при этом соотношениях в разных комбинациях задействованы все девять модулей упругости (13) ромбических кристаллов.

В таблице 1 приведены конкретные значения ключевых параметров вырожденных отражений для ромбических кристаллов топаза, арагонита и сегнетовой соли. Численные оценки для кристаллов топаза и арагонита (их модули упругости взяты из [22]) показали, что для всех шести вариантов геометрии распространения функция $D(a_1, a_2, A)$ (34) отрицательна. Соответственно здесь реализуются конверсионные отражения. Для кристаллов сегнетовой соли для всех шести геометрий распространения, наоборот, $D(a_1, a_2, A) > 0$ – конверсионные отражения существовать не могут. В то же время условие существования чистых отражений $a_3 + 1 > 0$ (26) для исследованных геометрий во всех рассматриваемых кристаллах не нарушено. Скорости v_0 , отвечающие таким отражениям, для данных кристаллов попадают в область II. При этом вырождение фактически сводится к ликвидации локализованной у поверхности кристаллов волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные соотношения позволяют по заданным модулям упругости ромбического кристалла для рассмотренных шести геометрий распространения определить конкретные значения скоростей волн, при которых реализуются чистые и конверсионные отражения, а также распространяются рэлеевские волны.

При определенных соотношениях между модулями упругости полученные выражения переходят в аналогичные соотношения для тетрагональных, гексагональных и кубических кристаллов.

Автор выражает благодарность В.И. Альшицу за ряд полезных советов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любимов В.Н., Филиппов В.В. // Акуст. журн. 1980. Т. 26. Вып. 2. С. 225.
2. Любимов В.Н., Филиппов В.В. // Изв. АН БССР. 1980. Вып. 5. С. 121.
3. Любимов В.Н., Альшиц В.И. // Кристаллография. 1982. Т. 27. Вып. 5. С. 851.
4. Любимов В.Н., Бессонов Д.А., Альшиц В.И. // Кристаллография. 2018. Т. 63. № 4. С. 593.
5. Альшиц В.И., Бессонов Д.А., Любимов В.Н. // Письма в ЖЭТФ. 2017. Т. 106. Вып. 1. С. 45.
6. Альшиц В.И., Бессонов Д.А., Любимов В.Н. // ЖЭТФ. 2016. Т. 149. Вып. 4. С. 796.
7. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965. 388 с.
8. Alshits V.I., Lothe J. // Wave Motion. 1981. V. 3. P. 297.
9. Lothe J., Wang L. // Wave Motion. 1995. V. 21. P. 163.
10. Wang L., Lothe J. // Wave Motion. 1992. V. 16. P. 89.
11. Gundersen S.A., Wang L., Lothe J. // Wave Motion. 1991. V. 14. P. 129.
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1965. 204 с.
13. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
14. Викторов И.А. // Докл. АН СССР. 1976. Т. 228. Вып. 3. С. 67.
15. Викторов И.А. // Акуст. журн. 1976. Т. 22. Вып. 5. С. 675.
16. Любимов В.Н. // Кристаллография. 2019. Т. 64. № 2. В печати.
17. Альшиц В.И., Бессонов Д.А., Любимов В.Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. Вып. 6. С. 1077.
18. Barnett D.M., Lothe J. // J. Phys. F: Met. Phys. 1974. V. 4. P. 671.
19. Lothe J., Barnett D.M. // J. Appl. Phys. 1976. V. 47. P. 428.
20. Barnett D.M., Lothe J. // Proc. R. Soc. London. A. 1985. V. 402. P. 135.
21. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1981. 723 с.
22. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.