

УДК 532.783

## К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НЕМАТИКОВ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ. II. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ДОМЕНОВ

© 2020 г. А. В. Голованов<sup>1,\*</sup><sup>1</sup>Институт элементоорганических соединений им. А.Н. Несмеянова РАН, Москва, Россия

\*E-mail: gav@ineos.ac.ru

Поступила в редакцию 24.04.2018 г.

После доработки 25.12.2018 г.

Принята к публикации 28.01.2019 г.

Методом линейного анализа устойчивости исследованы модели, описывающие появление гидродинамических доменов в нематиках при их переориентации в магнитном поле в случаях неограниченной среды и деформации поперечного изгиба. Для обеих моделей показано, что гидродинамическая неустойчивость, являющаяся причиной возникновения доменов, — это седловая неустойчивость. Построенные на основе анализа устойчивости интегральные кривые иллюстрируют полученные результаты.

DOI: 10.31857/S0023476120010087

### ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени экспериментально и теоретически изучен процесс зарождения и развития магнитогиродинамических (МГД) доменов двух видов, возникающих в термотропных и лиотропных нематиках: полосатых (первого и второго рода) и паркетных. Полосатые домены первого рода представляют собой параллельные цилиндрические вихри, лежащие в плоскости слоя нематика [1], второго рода — вихревые линии с незамкнутыми линиями тока, расположенные перпендикулярно плоскости слоя нематика [2–4]. Паркетные домены — это цилиндрические вихри, расположенные под углом друг к другу в виде паркета [5, 6]. Появление доменной структуры происходит за порогом гидродинамической неустойчивости [7]. Нахождение порога неустойчивости (критического магнитного поля доменобразования) требует совместного решения уравнений движения директора и Навье–Стокса (НС), записанных в линейном приближении, но тип возникающей неустойчивости в этом случае не определяется.

Существует метод, известный как линейный анализ устойчивости (ЛАО) динамических систем [8, 9]. Этот метод позволяет определять тип устойчивости/неустойчивости, реализующийся в системе при изменении управляющих параметров, и строить соответствующие фазовые траектории (интегральные кривые). Основой метода

является оценка устойчивости стационарных решений линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих производную первого порядка по времени, называемых эволюционными уравнениями (ЭУ). Для получения ЭУ в моделях МГД-доменов необходимо учитывать член  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$  в линеаризованном уравнении НС [10]. В моделях [1–3, 5, 6] этим членом пренебрегают, за исключением модели для переориентации в случае неограниченной среды [1].

Цель настоящей работы — получение ЭУ и определение типа гидродинамической неустойчивости для моделей, предложенных в [1].

### РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

*Модель доменной структуры при переориентации нематика в случае неограниченной среды*

В [1] учитывался член  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$ , но система уравнений в частных производных не была преобразована к ЭУ. В рамках модели получены зависимости обратного времени включения доменной структуры  $s_{\pm}$  от квадрата безразмерного волнового вектора  $q_x^2$  и квадрата напряженности магнитного поля  $H^2$ , а также зависимость  $q_{xc}^2(H^2)$ .

В рассматриваемой модели неограниченный слой жидкого кристалла ориентируется магнит-

ным полем вдоль оси  $x$ , затем поле быстро поворачивается в направлении оси  $z$ . Далее исследуется возможность появления вдоль оси  $x$  доменной структуры, сопровождаемой переходным потоком вещества. Скорость течения нематика задается одной компонентой  $v_z$ ; компонентой  $v_x$ , обеспечивающей непрерывность поля скоростей на границах, пренебрегают. Кроме того, угол  $\theta$  отклонения директора от положения равновесия и  $v_z$  считаются не зависящими от  $z$ . Уравнения НС и движения директора в линейном приближении записываются в следующем виде:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \eta_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \\ \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} = \chi_a H^2 \theta + K_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \alpha_2 \frac{\partial v_z}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\eta_2$  – коэффициент вязкости,  $\alpha_2$  – коэффициент вязкости Лесли,  $\gamma_1$  – вращательная вязкость,  $\chi_a$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости,  $K_3$  – константа упругости продольного изгиба,  $\rho$  – плотность нематика.

В отличие от [1], где решения системы (1) искали в виде

$$\begin{cases} v_z = v_0 \sin(q_x x) \exp(st), \\ \theta = \theta_0 \cos(q_x x) \exp(st), \end{cases} \quad (2)$$

где  $q_x$  – волновой вектор доменной структуры вдоль оси  $x$ , будем искать их как функции

$$v_z = v_0(t) \sin(q_x x), \quad (3)$$

$$\theta = \theta_0(t) \cos(q_x x). \quad (4)$$

Это позволяет после подстановки (3) и (4) в (1) получить ЭУ задачи

$$\begin{cases} \frac{d\theta_0}{dt} = \frac{1}{\gamma_1} (\chi_a H^2 - K_3 q_x^2) \theta_0 - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x v_0, \\ \frac{dv_0}{dt} = \frac{\alpha_2}{\rho \gamma_1} (K_3 q_x^2 - \chi_a H^2) q_x \theta_0 + \\ + \frac{1}{\rho \gamma_1} (\alpha_2^2 - \eta_2 \gamma_1) q_x^2 v_0. \end{cases} \quad (5)$$

К (5) применяем ЛАУ. Существуют два стационарных решения (5). Первое:

$$\theta_{0ст1} \neq 0, \quad v_{0ст1} = 0 \quad (6)$$

при

$$q_x^2 = \frac{\chi_a}{K_3} H^2. \quad (7)$$

Выражение (7) является условием, при котором определитель системы линейных однородных уравнений, получаемых из (5), равен нулю. Второе:

$$\theta_{0ст2} = v_{0ст2} = 0 \quad (8)$$

при

$$q_x^2 \neq \frac{\chi_a}{K_3} H^2. \quad (9)$$

Для проверки на устойчивость решений (6) и (8) задаем их возмущения

$$\begin{cases} \theta_{0в} = \theta_{0ст} + \Theta(t) \\ v_{0в} = v_{0ст} + V(t) \end{cases}, \quad (10)$$

где  $\theta_{0в}$ ,  $v_{0в}$  – возмущенные значения величин  $\theta_{0ст}$ ,  $v_{0ст}$ ,  $\Theta(t)$  – возмущение угла ориентации директора,  $V(t)$  – возмущение скорости течения нематика, и составляем уравнения для возмущений

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\gamma_1} (\chi_a H^2 - K_3 q_x^2) \theta_{0в} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x v_{0в} = f_1, \\ \frac{dV}{dt} = \frac{\alpha_2}{\rho \gamma_1} (K_3 q_x^2 - \chi_a H^2) q_x \theta_{0в} + \\ + \frac{1}{\rho \gamma_1} (\alpha_2^2 - \eta_2 \gamma_1) q_x^2 v_{0в} = f_2. \end{cases} \quad (11)$$

Далее, согласно процедуре ЛАУ, переходим к линейаризованным уравнениям для возмущений

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{dt} = k_{11} \Theta + k_{12} V, \\ \frac{dV}{dt} = k_{21} \Theta + k_{22} V, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial \theta_{0в}} \right)_{ст} = \frac{1}{\gamma_1} (\chi_a H^2 - K_3 q_x^2), \\ k_{12} &= \left( \frac{\partial f_1}{\partial v_{0в}} \right)_{ст} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_1} q_x, \\ k_{21} &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial \theta_{0в}} \right)_{ст} = \frac{\alpha_2}{\rho \gamma_1} (K_3 q_x^2 - \chi_a H^2) q_x, \\ k_{22} &= \left( \frac{\partial f_2}{\partial v_{0в}} \right)_{ст} = \frac{1}{\rho \gamma_1} (\alpha_2^2 - \eta_2 \gamma_1) q_x^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Находим характеристическое уравнение задачи

$$s^2 - (k_{11} + k_{22})s + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0. \quad (14)$$

Здесь  $s$  – обратное время включения доменной структуры.

Рассмотрим стационарное решение (6). Для нахождения корней (14) исключаем  $q_x$  из коэффициентов (13) с помощью (7). Получаем

$$\begin{aligned} k_{11} &= 0, \quad k_{12} = -\frac{\alpha_2}{\gamma_1} \sqrt{\frac{\chi_a}{K_3}} H, \\ k_{21} &= 0, \quad k_{22} = \left( \frac{\alpha_2^2}{\gamma_1} - \eta_2 \right) \frac{\chi_a H^2}{\rho K_3}. \end{aligned} \quad (15)$$

Отсюда следует, что уравнение (14) имеет два корня:  $s_1 = 0$  и  $s_2 = k_{22}$ . Определим знак коэффици-

ента  $k_{22}$ . Здесь и далее в качестве модельной системы используем термотропный нематик *n*-метоксибензилиден-*n*-бутиланилин (МБВА), поскольку для него определены все материальные константы, входящие в (15), а именно:  $\chi_a = 0.97 \times 10^{-7}$  СГС-ед,  $\rho = 1.088$  г/см<sup>3</sup>,  $K_3 = 7.5 \times 10^{-7}$  дин,  $\alpha_2 = -0.775$  П,  $\gamma_1 = 0.77$  П и  $\eta_2 = 1.03$  П [11]. Знак коэффициента  $k_{22}$  определяет разность, стоящая в скобках. Так как  $\frac{\alpha_2^2}{\gamma_1} < \eta_2$ , то  $k_{22} < 0$  при любых значениях  $H$ , отличных от нуля. Следовательно,  $s_2 < 0$  и закон изменения возмущений в зависимости от времени имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= c_{11} + c_{12} \exp(s_2 t), \\ V(t) &= c_{21} + c_{22} \exp(s_2 t). \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) видно, что с течением времени возмущения угла ориентации директора  $\Theta(t)$  и скорости  $V(t)$  убывают, а при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к начальным возмущениям  $c_{11}$  и  $c_{21}$ . Поэтому стационарное решение (6) является устойчивым. В этом случае тип устойчивости определяется как нейтральная устойчивость [8, 9].

Как известно, исследование устойчивости нелинейных дифференциальных уравнений проводится также методом определения фазовых траекторий (интегральных кривых) в фазовой плоскости [8]. Исключая время в (5) с последующим интегрированием, получаем интегральную кривую вида  $v_0 = \frac{k_{22}}{k_{12}} \theta_0 + \text{const}$ . Она показана на рис. 1а. Стрелками обозначена совокупность интегральных кривых, отличающихся начальными условиями. Их направление указывает на движение системы к состоянию устойчивого равновесия.

Рассмотрим стационарное решение (8). Для анализа его устойчивости также необходимо исключить  $q_x$  из (13). Это можно сделать, исследовав на экстремум функцию, являющуюся решением (14):

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \{ AH^2 + Bq_x^2 \pm [A^2 H^4 + 2CH^2 q_x^2 + Dq_x^4]^{1/2} \}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\chi_a}{\gamma_1}, \quad B = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\alpha_2^2}{\gamma_1} - \eta_2 \right) - \frac{K_3}{\gamma_1}, \\ C &= \frac{\chi_a}{\gamma_1} \left( \frac{\alpha_2^2}{\rho \gamma_1} + \frac{\eta_2}{\rho} - \frac{K_3}{\gamma_1} \right), \\ D &= \left( \frac{\alpha_2^2}{\rho \gamma_1} - \frac{\eta_2}{\rho} - \frac{K_3}{\gamma_1} \right)^2 - \frac{4\eta_2 K_3}{\rho \gamma_1}. \end{aligned}$$

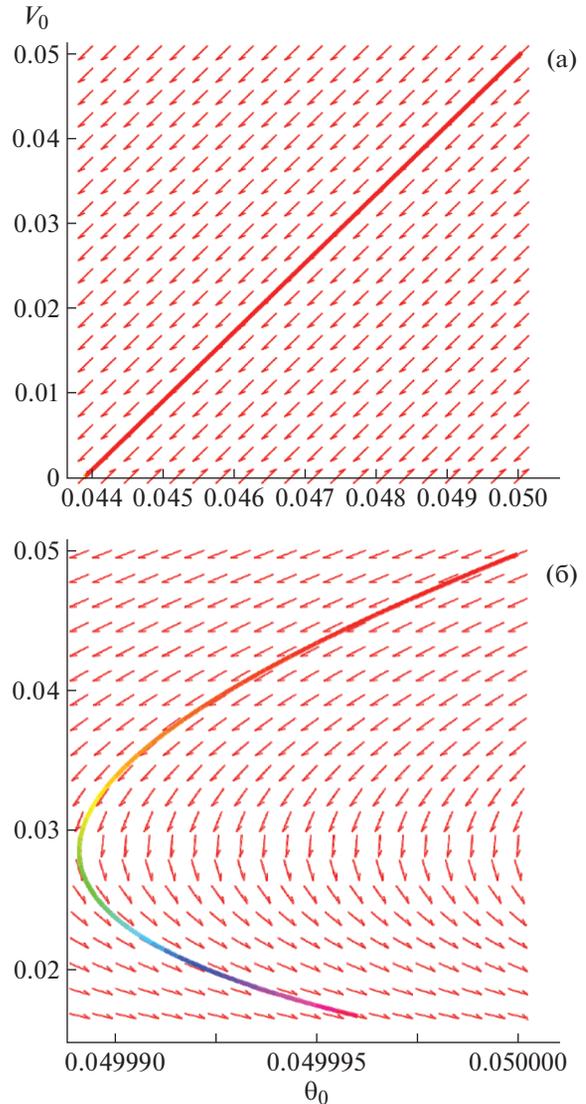


Рис. 1. Интегральные кривые системы: а – для устойчивого стационарного состояния  $\theta_{0ст1} \neq 0, v_{0ст1} = 0$ ;  $H = 100$  Э,  $t = 10$  с; б – для неустойчивого стационарного состояния  $\theta_{0ст2} = 0, v_{0ст2} = 0$ ;  $H = 100$  кЭ,  $t = 10^{-6}$  с. Стрелками обозначены совокупности интегральных кривых, различающихся начальными условиями.

В результате имеем

$$q_x^2 = aH^2, \quad \text{где} \quad a = \frac{C + \left[ \frac{B^2(C^2 - A^2 D)}{B^2 - D} \right]^{1/2}}{D}. \quad (18)$$

Формулы (7), (17) и (18) совпадают с выражениями для  $q_{xF}^2, s_{\pm}$  и  $q_{xc}^2$ , полученными в [1]. Значения волновых векторов  $q_{xc}^2$ , как показано в [1], являются точками максимумов функции  $s_+ = f(q_x^2)$  для любых  $H \geq 0$ . Волновые векторы  $q_{xF}$  таковы,

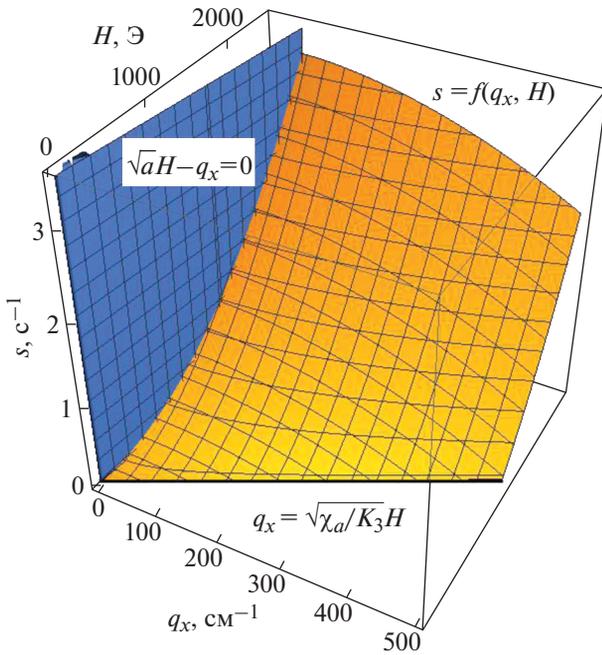


Рис. 2. Функции (7), (17) и (18), представленные в системе координат  $q_x, H, s$ .

что  $s_+(q_{xF}) = 0$ , и определяются через “условие Фредерикса”  $H_c^2 = q_{xF}^2 \frac{K_3}{\chi_a}$ , которое совпадает с (7). Отметим, что из (17) при условии  $s_{1,2} = 0$  следует (7).

На рис. 2 в системе координат  $q_x, H, s$  показаны функции (17), (18) и (7). Поверхность  $s = f(q_x, H)$  составлена из кривых  $s = f(q_x)$ , параметризованных переменной  $H$ . Эти кривые имеют максимумы, через которые проходит прямая  $q_x = \sqrt{a}H$ . На рисунке через эти точки проходит плоскость  $\sqrt{a}H - q_x = 0$ . В плоскости  $q_x H$  расположена прямая  $q_x = \sqrt{\frac{\chi_a}{K_3}} H$ .

Подставляя (18) в (17), имеем

$$s_{1,2} = \frac{1}{2} \{ (A + aB \pm [A^2 + a^2 D + 2aC]^{1/2}) H^2 \},$$

где  $A = 1.26 \times 10^{-7} \frac{\text{см} \cdot \text{с}}{\text{Г}}$ ,  $B = -0.25 \frac{\text{см}^2}{\text{с}}$ ,  $C = 2.095 \times 10^{-7} \frac{\text{см}^3}{\text{Г}}$ ,  $D = 0.053 \frac{\text{см}^4}{\text{с}^2}$ ,  $a = 4.74 \times 10^{-4} \frac{1}{\text{см}^2 \cdot \text{Э}^2}$ .

Вычисления показывают, что  $s_1 > 0$  и  $s_2 < 0$  при любом  $H > 0$ . Решение (12) имеет вид

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= c_{11} \exp(s_1 t) + c_{12} \exp(s_2 t), \\ V(t) &= c_{21} \exp(s_1 t) + c_{22} \exp(s_2 t). \end{aligned} \quad (19)$$

Очевидно, что при  $t \rightarrow \infty$  возмущения увеличиваются с течением времени. Данное стационарное решение является неустойчивым. Это седловая неустойчивость [8, 9]. На рис. 1б показана соответствующая интегральная кривая. Так же, как и на рис. 1а, стрелками обозначена совокупность интегральных кривых, различающихся начальными условиями. Как видно из рисунка, движение вдоль интегральной кривой уводит систему от стационарного состояния.

Анализ показывает, что при любом  $H > 0$  существуют два набора волновых векторов (формулы (7) и (18)), которые соответствуют разным стационарным решениям (5). Из экспериментов [1, 2, 4–6] следует, что МГД-домены в отличие от электрогидродинамических доменов [10] являются переходными – возникают, развиваются и исчезают, когда поворот директора от положения равновесия (при заданном поле) достигает максимума. Поэтому устойчивое состояние (6) в случае появления доменов в неограниченной среде может возникнуть только после их исчезновения – директор повернулся на угол  $\theta$ , и течение нематика прекратилось. Следовательно, волновые векторы, определяемые равенством (7), не реализуются, в том числе в силу того, что оно следует из условия  $s = 0$ .

Таким образом, реализуются только волновые векторы (18), связанные с неустойчивым состоянием  $\theta_{\text{кр}2} = v_{\text{кр}2} = 0$ , поскольку их значения в точности соответствуют точкам максимумов функции (17) (рис. 2).

Кроме того, отметим, что домены возникают при сколь угодно малых значениях магнитного поля, как следует из (18). Это говорит о том, что критического поля доменообразования в этой модели не существует.

#### *Модель доменной структуры при переориентации нематика в геометрии деформации поперечного изгиба*

В данной модели рассматривается планарный слой нематика с положительной анизотропией диамагнитной восприимчивости и бесконечно сильным сцеплением директора на границах. Вектор  $\mathbf{n}_0$  невозмущенной ориентации нематика направлен вдоль оси  $x$  декартовой системы координат, ось  $z$  перпендикулярна плоскости слоя, начало координат выбрано в центре слоя толщиной  $d$  (рис. 3). Магнитное поле  $\mathbf{H}$  прикладывается перпендикулярно невозмущенной ориентации директора  $\mathbf{n}_0$  (вдоль оси  $z$ ).

При быстром включении магнитного поля величиной больше  $H_D$  (критическое поле доменообразования) через некоторое время в слое жидкого кристалла появляется периодическая структура, состоящая из темных и светлых полос –

доменов. Для описания доменов рассматриваются малые возмущения директора и вектора скорости течения нематика

$$\mathbf{n} \equiv (\theta(x, z), 0, 1), \quad \mathbf{v} \equiv (v_x(x, z), 0, v_z(x, z)).$$

Для заданной геометрии уравнения движения директора и НС в линейном приближении имеют вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_1 \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \chi_a H^2 \theta + K_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + K_3 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \\ &- \alpha_2 \frac{\partial v_z}{\partial x} - \alpha_3 \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta_1 \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \eta_4 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \\ &+ \eta_5 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \\ \rho \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta_2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \eta_6 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \\ &+ \alpha_4 \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right), \end{aligned} \right. \quad (20)$$

где  $\eta_j$  – коэффициенты вязкости, выраженные через различные комбинации коэффициентов вязкости Лесли,  $\alpha_i$  – коэффициенты вязкости Лесли,  $\chi_a$  – анизотропия диамагнитной восприимчивости,  $\gamma_1$  – вращательная вязкость,  $\rho$  – плотность нематика,  $p$  – давление,  $K_1$  – константа упругости поперечного изгиба,  $K_3$  – константа упругости продольного изгиба.

Для уменьшения числа переменных в (20) введем в рассмотрение функцию тока Лагранжа  $\psi(x, z, t)$ :

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Введенная таким образом функция тока удовлетворяет уравнению непрерывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Запишем (20) в безразмерном виде

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} &= h^2 \theta + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{z}^2} + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\alpha_3}{\alpha_2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} - \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2}, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \left( \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} \right) &= \frac{\gamma_1 \eta_1}{\rho K_1} \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^4} + \\ &+ \frac{\gamma_1 \eta_7}{\rho K_1} \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2 \partial \tilde{z}^2} - \frac{\gamma_1 \eta_2}{\rho K_1} \frac{\partial^4 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^4} + \\ &+ \frac{\alpha_2^2}{\rho K_1} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right) - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{\rho K_1} \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}} \right), \end{aligned} \right. \quad (21)$$

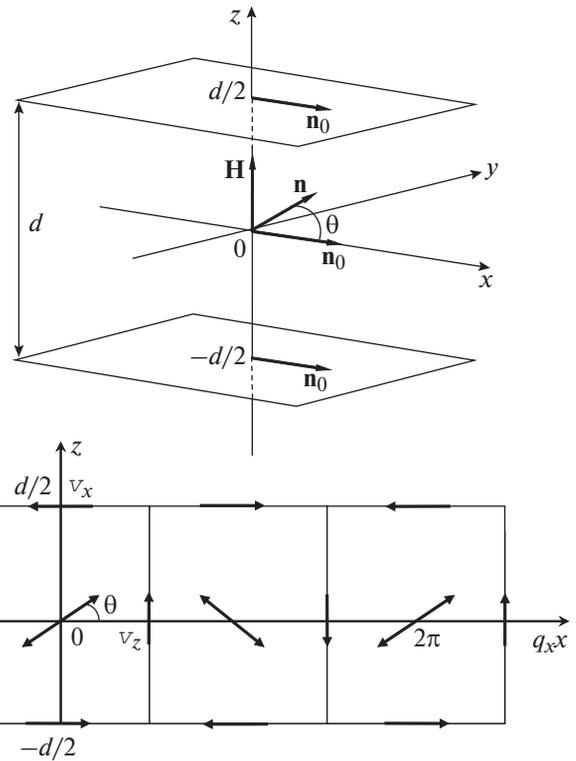


Рис. 3. На верхнем рисунке представлена геометрия задачи, на нижнем – схематичное изображение вихрей в плоскости  $xz$ . Оси вихрей параллельны оси  $y$ ,  $d$  – высота вихрей по оси  $z$ . Вся структура периодична по оси  $x$ . Верхняя и нижняя поверхности нематика определяются уравнением  $z = \pm \frac{d}{2}$ .

где  $\tilde{x} = \frac{\pi}{d} x$  и  $\tilde{z} = \frac{\pi}{d} z$  – безразмерные координаты,

$\tilde{\psi} = \frac{\alpha_2}{K_1} \psi$  – безразмерная функция тока,  $\tilde{t} = \frac{t}{\tau_0}$  –

безразмерное время,  $h = \frac{H}{H_F}$ ,  $K = \frac{K_3}{K_1}$  – безраз-

мерные параметры задачи,  $\tau_0 = \frac{\gamma_1 d^2}{\pi^2 K_1}$  – характер-

ное время задачи,  $H_F = \frac{\pi}{d} \sqrt{\frac{K_1}{\chi_a}}$  – критическое поле

Фредерикса для деформации поперечного изгиба,  $\eta_7 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6$ .

Граничные условия задачи имеют вид

$$\left. \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}} \right|_{\tilde{z}=\pm \frac{\pi}{2}} = 0; \quad \left. \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{z}^2} \right|_{\tilde{z}=\pm \frac{\pi}{2}} = 0; \quad \theta|_{\tilde{z}=\pm \frac{\pi}{2}} = 0. \quad (22)$$

Решения уравнений (21) будем искать в виде функций, периодических вдоль оси  $x$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\psi} &= \tilde{\psi}_0(\tilde{t}) \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos(\tilde{q}_z \tilde{z}), \\ \theta &= \theta_0(\tilde{t}) \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos(\tilde{q}_z \tilde{z}), \end{aligned} \right. \quad (23)$$

где  $\tilde{q}_x$  и  $\tilde{q}_z$  – безразмерные волновые векторы вдоль осей  $x$  и  $z$ . В [5] показано, что  $\tilde{q}_z = 1$  для случая бесконечно сильного сцепления директора на границах. Поэтому

$$\begin{cases} \tilde{\Psi} = \tilde{\Psi}_0(\tilde{t}) \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos \tilde{z}, \\ \Theta = \Theta_0(\tilde{t}) \cos(\tilde{q}_x \tilde{x}) \cos \tilde{z}, \end{cases}$$

что удовлетворяет граничным условиям (22).

Далее повторяем процедуру, описанную в предыдущей части, и получаем ЭУ

$$\begin{cases} \frac{d\Theta_0}{d\tilde{t}} = (h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)\Theta_0 + (\tilde{q}_x^2 - a)\tilde{\Psi}_0, \\ \frac{d\tilde{\Psi}_0}{d\tilde{t}} = \frac{\nu(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)(\tilde{q}_x^2 - a)}{\tilde{q}_x^2 + 1}\Theta_0 + \\ + \frac{[\nu(\tilde{q}_x^2 - a)^2 - \nu_1(b\tilde{q}_x^4 + c\tilde{q}_x^2 + 1)]\tilde{\Psi}_0}{\tilde{q}_x^2 + 1}, \end{cases} \quad (24)$$

где  $\nu = \frac{\alpha_2^2}{\rho K_1}$  и  $\nu_1 = \frac{\gamma_1 \eta_1}{\rho K_1}$  – отношения чисел Эрик-

сена **E** и Рейнольдса **R** [12],  $a = \frac{\alpha_3}{\alpha_2}$ ,  $b = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ ,  $c = \frac{\eta_7}{\eta_1}$ , и стационарные решения:

$$\Theta_{0 \text{ ст1}} \neq 0, \quad \tilde{\Psi}_{0 \text{ ст1}} = 0 \quad (25)$$

при

$$\tilde{q}_x^2 = \frac{h^2 - 1}{K} \quad (26)$$

и

$$\Theta_{0 \text{ ст2}} = \tilde{\Psi}_{0 \text{ ст2}} = 0 \quad (27)$$

при

$$\tilde{q}_x^2 \neq \frac{h^2 - 1}{K}. \quad (28)$$

Линеаризованные уравнения для возмущений

$$\begin{cases} \frac{d\Theta}{d\tilde{t}} = k_{11}\Theta + k_{12}\tilde{\Psi}, \\ \frac{d\tilde{\Psi}}{d\tilde{t}} = k_{21}\Theta + k_{22}\tilde{\Psi}, \end{cases} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned} k_{11} &= (h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1), \quad k_{12} = (\tilde{q}_x^2 - a), \\ k_{21} &= \frac{\nu(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)(\tilde{q}_x^2 - a)}{\tilde{q}_x^2 + 1}, \\ k_{22} &= \frac{\nu(\tilde{q}_x^2 - a)^2 - \nu_1(b\tilde{q}_x^4 + c\tilde{q}_x^2 + 1)}{\tilde{q}_x^2 + 1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим стационарное решение (25). Исключая  $\tilde{q}_x^2$  из (30) с помощью (26), получим

$$k_{11} = 0, \quad k_{12} = \frac{(h^2 - 1)}{K} - a, \quad k_{21} = 0, \quad k_{22} = \frac{(\nu - b\nu_1)(h^2 - 1)^2 \frac{1}{K} - (2a\nu + c\nu_1)(h^2 - 1) + K(\nu a^2 - \nu_1)}{h^2 - 1 + K}. \quad (31)$$

Устойчивость/неустойчивость стационарного решения (25), также как и (6), зависит от знака коэффициента  $k_{22}$ . Поскольку  $K_1 = 6 \times 10^{-7}$  дин,  $\alpha_3 = -0.01$  П,  $\eta_1 = 0.24$  П,  $\eta_7 = 1.35$  П, то  $K = 1.25$ ,  $a = 0.013$ ,  $b = 4.29$ ,  $c = 5.63$ ,  $\nu = 9.2 \times 10^5$ ,  $\nu_1 = 1.21 \times 10^6$ . Тогда  $b\nu_1 > \nu$  и  $\nu_1 > \nu a^2$ , а  $k_{22} < 0$  при любых значениях  $h^2 \geq 1$ . Следовательно, все выводы, сформулированные выше для стационарного решения (6), остаются справедливыми и для (25). Стационарное состояние системы является устойчивым, и тип устойчивости – нейтральная

устойчивость. На рис. 4а показана интегральная кривая  $\tilde{\Psi}_0 = -\frac{k_{22}}{k_{12}}\Theta_0 + \text{const}$ . Как и в первой модели, система, двигаясь вдоль интегральной кривой, стремится к устойчивому состоянию.

Рассмотрим стационарное решение (27). Решением уравнения (14) для  $\tilde{s}$  – обратного безразмерного времени включения доменной структуры – является функция  $\tilde{s}(h^2, \tilde{q}_x^2)$ , которая имеет следующий вид:

$$\tilde{s}_{1,2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{h^2(\tilde{q}_x^2 + 1) + A\tilde{q}_x^4 - B\tilde{q}_x^2 + \nu a^2 - \nu_1 - 1}{\tilde{q}_x^2 + 1} \pm \left[ \frac{(h^2(\tilde{q}_x^2 + 1) + A\tilde{q}_x^4 - B\tilde{q}_x^2 + \nu a^2 - \nu_1 - 1)^2}{\tilde{q}_x^2 + 1} + \frac{4(h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1)(C\tilde{q}_x^4 + D\tilde{q}_x^2 + \nu_1)}{\tilde{q}_x^2 + 1} \right]^{1/2} \right\}, \quad (32)$$

где  $A = v - bv_1 - K \approx v - bv_1$ ,  $B = 2av + cv_1 + K + 1 \approx 2av + cv_1$ ,  $C = bv_1$ ,  $D = cv_1$ . Из (32) видно, что условие (26) реализуется при  $\tilde{s} = 0$ .

Зависимость  $\tilde{q}_x^2(h^2)$  для МВВА найдена экспериментально в [1]. Показано, что экспериментальные точки  $(h_i^2, \tilde{q}_{xi}^2)$  группируются около кривой, проводимой через точки максимумов семейства кривых  $\tilde{s}(\tilde{q}_x^2)$ , параметризованных переменной  $h^2$ . В ходе эксперимента изменение значений  $h^2$  в пределах от 17 до 400 приводило к изменению значений  $\tilde{q}_x^2$  в пределах от 4 до 32. Эти данные позволяют определить знаки  $\tilde{s}_{1,2}$ , не исследуя (32) на экстремум для получения зависимости  $\tilde{q}_x^2(h^2)$ .

Так как соотношение  $\frac{h^2}{\tilde{q}_x^2}$  лежит в диапазоне значений  $\sim 4-10$ , то выражение  $h^2 - K\tilde{q}_x^2 - 1$  для измеренных значений  $h^2$  и  $\tilde{q}_x^2$  не отрицательно, поэтому второе слагаемое в (32) больше первого. Следовательно,  $\tilde{s}_1 > 0$  и  $\tilde{s}_2 < 0$ .

Поскольку решением (29) являются функции

$$\Theta(\tilde{t}) = c_{11} \exp(s_1 \tilde{t}) + c_{12} \exp(s_2 \tilde{t}),$$

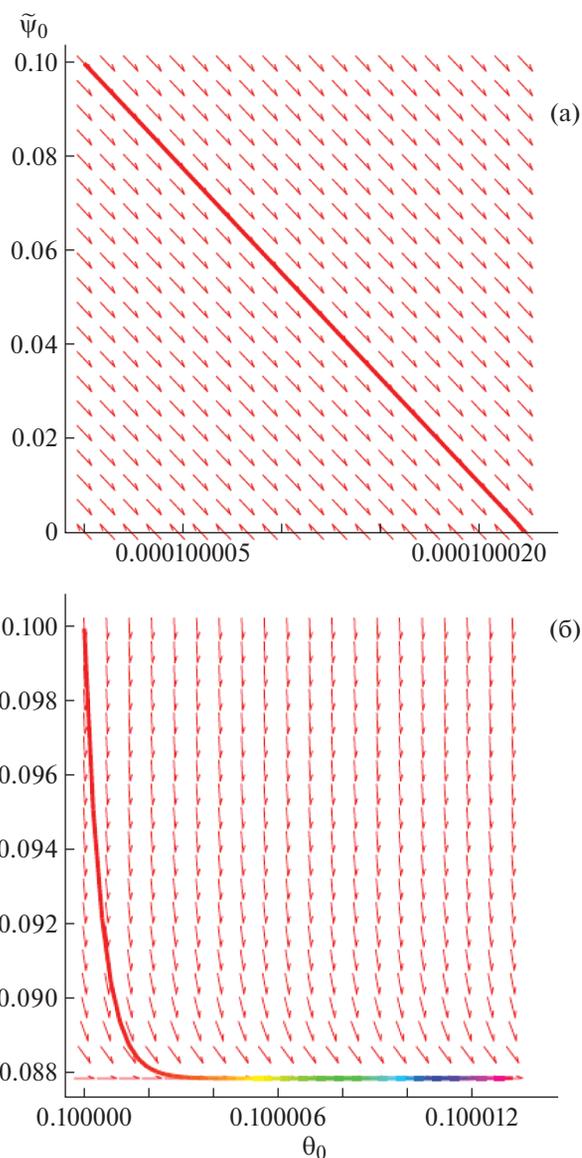
$$\tilde{\Psi}(\tilde{t}) = c_{21} \exp(s_1 \tilde{t}) + c_{22} \exp(s_2 \tilde{t}),$$

то, как и в предыдущей модели, стационарное решение (27) является неустойчивым – это седловая неустойчивость. Интегральная кривая на рис. 4б иллюстрирует вывод об уходе системы от положения равновесия при движении вдоль интегральной кривой.

В данной модели также имеются два набора волновых векторов для двух стационарных состояний исследуемой системы, определяемых формулами (26) и (28). Экспериментально показано, что волновые векторы, определяемые равенством (26), не реализуются [1].

Стационарное состояние (25) для ограниченной среды может возникнуть в двух случаях. Во-первых, если на границах задана жесткая наклонная ориентация директора, которая при отсутствии внешнего поля или течения задает наклонную ориентацию всего слоя нематика [10]. Во-вторых, оно возникает после исчезновения доменов – течение прекратилось, а директор повернулся на угол  $\theta$ . Поскольку в модели не задана наклонная ориентация директора на границах, то реализуется второй случай.

Итак, анализ показывает наличие в каждой из рассмотренных моделей двух стационарных состояний, одно из которых является устойчивым, другое – неустойчивым. Очевидным является следующий сценарий, описывающий динамику



**Рис. 4.** Интегральные кривые системы: а – для устойчивого стационарного состояния  $\theta_{0 \text{ ст1}} \neq 0, \tilde{\Psi}_{0 \text{ ст1}} = 0$ :  $h^2 = 16, t = 10^{-4}$  с; б – для неустойчивого стационарного состояния  $\theta_{0 \text{ ст2}} = \tilde{\Psi}_{0 \text{ ст2}} = 0$ :  $h^2 = 14.44, t = 10^{-5}$  с. Стрелками обозначены совокупности интегральных кривых, различающихся начальными условиями.

переориентации в обеих моделях. При включении магнитного поля, большего или равного критическому полю доменообразования, для второй модели (сколь угодно малое поле для первой модели) в слое нематика возникает гидродинамическая неустойчивость по типу седловой, которая приводит к возникновению доменов. Домены развиваются и исчезают. Система приходит к новому устойчивому состоянию.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью линейного анализа устойчивости показано, что при переориентации нематика в магнитном поле в случае неограниченной среды и деформации поперечного изгиба возникает гидродинамическая неустойчивость, являющаяся седловой. За порогом этой неустойчивости возникают МГД-домены.

Учет члена  $\rho \frac{\partial v}{\partial t}$  в уравнении НС позволяет помимо возможности применять ЛАУ ввести в модель доменной структуры числа Рейнольдса  $\mathbf{R} = \frac{\rho v l}{\eta}$  и Эриксона  $\mathbf{E} = \frac{\eta v l}{K}$  – безразмерные соотношения параметров среды (вязкостей  $\eta$ , констант упругости  $K$ , плотности  $\rho$  нематика), а также характерных скорости  $v$  и расстояния  $l$  модели. Соотношение чисел Рейнольдса и Эриксона  $\mu = \frac{\rho K}{\eta^2}$

(или обратное соотношение  $\nu = \frac{\eta^2}{\rho K}$ ) исключает из модели характерные величины и оставляет лишь параметры среды (24). Получение значений этих чисел и их соотношений в экспериментах по наблюдению за МГД-доменами позволяет оценить вклад сил различной природы в уравнениях НС и движения директора с целью возможного упрощения моделей.

При построении рис. 1 и 4 использовалась подпрограмма <phaseportrait> математического пакета Maple 17.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Guyon E., Meyer R., Salan J.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1979. V. 54. P. 261.
2. *Lonberg F., Fraden S., Hurd A., Meyer R.* // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 52. № 21. P. 1903.
3. *Kaznacheev A.V.* // Mol. Mater. 1993. V. 2. P. 283.
4. *Golovanov A., Kaznacheev A., Sonin A.* // Mol. Mater. 1993. V. 3. P. 147.
5. *Hurd A.J., Fraden S., Lonberg F., Meyer R.B.* // J. Phys. France. 1985. V. 46. № 6. P. 905.
6. *Fraden S., Hurd A., Meyer R. et al.* // J. Phys. Colloque C3. 1985. V. 46. P. C3-85.
7. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистическом подходе к турбулентности. М.: Мир, 1991. 368 с.
8. *Баблюниц А.* Молекулы, динамика и жизнь. Введение в самоорганизацию материи. М.: Мир, 1990. 375 с.
9. *Шаповалов В.И.* Моделирование синергетических систем: Метод пропорций и другие математические методы. М.: Проспект, 2016. 136 с.
10. *Пикин С.А.* Структурные превращения в жидких кристаллах. М.: Наука, 1981. 336 с.
11. *Блинов Л.М.* Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. 384 с.
12. *Leslie F.M.* // Theory of Phenomena in Liquid Crystals. Advances in Liquid Crystals. V. 4. New York: Acad. Press, 1979. P. 1.