

## ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ НА ТРЕУГОЛЬНЫХ СЕТКАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

© 2019 г. *М.А. Ложников*

МГУ им. М.В. Ломоносова

lozhnikovma@gmail.com

Работа выполнена с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ им. М.В. Ломоносова. Данная работа частично поддержана РФФИ (проект 17-01-00838).

DOI:10.1134/S0234087919010015

Для уравнений динамики идеального баротропного газа предложена разностная схема на треугольных сетках, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Для решения разностной задачи доказано выполнение энергетического неравенства. Доказано существование разностного решения.

Ключевые слова: газовая динамика, разностные схемы, неструктурированные сетки, положительность плотности.

### ON A DIFFERENCE SCHEME ON TRIANGULAR MESHES FOR GAS DYNAMICS EQUATIONS

*M.A. Lozhnikov*

Lomonosov Moscow State University

lozhnikovma@gmail.com

The paper suggests a difference scheme for the equations of isentropic ideal gas on triangular meshes. The scheme satisfies the mass conservation law and guarantees positiveness of the density function. The solution of the scheme satisfies the energy inequality. The solution of the scheme is proven to exist.

Key words: gas dynamics, difference schemes, unstructured meshes, positive density.

**1. Введение.** Построение разностных схем для уравнений газовой динамики представляет большой практический и теоретический интерес (например, [1, 2]). В том числе одним из естественных требований при построении таких схем является выполнение свойства положительности плотности, которое следует из физики. Однако данный вопрос практически нигде не исследовался, за исключением работ А.А. Злотника (например, [3]), а также работ А.В. Попова (например, [4]), в которых система уравнений пре-

образуется в предположении положительности плотности, и для полученной системы строится разностная аппроксимация, гарантирующая положительность сеточной функции плотности. В [5] была предложена схема для одномерных уравнений динамики идеального баротропного газа, обеспечивающая выполнение сеточного аналога закона сохранения массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. Метод [5] допускает обобщение на многомерный случай на ортогональные сетки.

В настоящей работе предлагается разностная схема для уравнений динамики идеального баротропного газа на треугольных сетках, обеспечивающая баланс массы и гарантирующая положительность сеточной функции плотности. При построении разностной схемы используются аппроксимации, предложенные в [1, 6], а также метод опорных операторов [7], обеспечивающий сопряжённость сеточных операторов дивергенции и градиента. Сеточное решение удовлетворяет энергетическому неравенству. Кроме того, доказано существование решения разностной задачи при любых шагах по времени и пространству при однородных краевых условиях.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим систему уравнений динамики баротропного газа [8] в цилиндре  $[0, T] \times \Omega$ , где  $\Omega$  – область с границей  $\Gamma$ ,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0,$$

с уравнением состояния

$$p = a\rho^\gamma, \quad \gamma > 1, \quad (2)$$

начальными

$$\begin{aligned} \rho(0, \mathbf{x}) &= \rho_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \\ \mathbf{u}(0, \mathbf{x}) &= \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

и граничными условиями

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

где  $\rho$  – плотность,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  – вектор скорости,  $p$  – давление газа,  $a$  – некоторая положительная константа, которую без ограничения общности будем считать равной единице,  $\gamma$  – показатель адиабаты Пуассона.

Для задачи (1)–(4) в предположении положительности плотности можно получить “энергетическое” тождество:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(t, x) \mathbf{u}^2(t, x) dx + \frac{1}{\gamma - 1} \int_{\Omega} p(t, x) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho_0 \mathbf{u}_0^2 dx + \frac{1}{\gamma - 1} \int_{\Omega} p_0 dx. \quad (5)$$

Аналогично [5], будем строить разностную схему таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим свойствам:

- Решение разностной схемы должно существовать.
- Из соотношения (5) следует ограниченность нормы  $\|\rho^{1/2} \mathbf{u}\|_2$ . Решение разностной схемы должно удовлетворять аналогичному свойству.
- Сеточная функция плотности должна быть строго положительна.
- Разностная схема должна обеспечивать выполнение сеточного аналога закона сохранения массы.

**3. Аппроксимация на ортогональных сетках.** Перед тем как построить разностную схему на треугольных сетках, рассмотрим упрощённый вариант этой схемы на ортогональных сетках в области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ . Введём сетку  $\Omega_h$ , равномерную по каждому координатному направлению с шагом  $h_\alpha = 1 / M_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, 2}$ , таким образом, что узел  $x_{\bar{m}}$  с номером  $\bar{m} = (i, j)$  расположен в точке  $(ih_1, jh_2)$ , где  $i = \overline{0, M_1}$ ,  $j = \overline{0, M_2}$ . Значение произвольной сеточной функции  $g$  в узле  $x_{\bar{m}}$  с номером  $\bar{m} = (i, j)$  обозначим через  $g_{\bar{m}}$  или  $g_{i,j}$ . Продолжим сеточные функции нулём на всю оставшуюся часть сеточной плоскости. Для сокращения обозначений введём безындексную форму записи, а именно  $g_{\bar{m}} = g$ ,  $g_{i\pm 1, j} = g^{\pm 1}$ ,  $g_{i, j\pm 1} = g^{\pm 2}$ . Используем стандартные обозначения

$$g_{x_k} = (g^{+k} - g) / h_k, \quad g_{\bar{x}_k} = (g - g^{-k}) / h_k.$$

Кроме того, введём аппроксимацию

$$\langle \zeta \rangle_x^\circ = \begin{cases} \frac{\langle \zeta \rangle^{+k} - \langle \zeta \rangle^{-k}}{h_k}, & \text{если узлы } x^{\pm k} \text{ лежат в области } \Omega_h, \\ \frac{\langle \zeta \rangle^{+k} - \langle \zeta \rangle^{-k}}{h_k / 2}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6)$$

где усреднение  $\langle \zeta \rangle^{\pm k}$  определяется как

$$\langle \zeta \rangle^{\pm k} = \begin{cases} \frac{\zeta + \zeta^{\pm k}}{2}, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит в области } \Omega_h, \\ \zeta, & \text{иначе} \end{cases}$$

для произвольной сеточной функции  $\zeta$ . Таким образом, внутри области  $\Omega_h$  аппроксимация  $\langle \zeta \rangle_x$  является обычной центральной разностью, а на границе – направленной разностью. Пусть  $\mathcal{R}$  – пространство функций, определённых на  $\Omega_h$ , а  $\mathcal{V}$  – пространство вектор-функций, определённых на  $\Omega_h$ . Введём скалярные произведения в  $\mathcal{R}$  и  $\mathcal{V}$  соответственно

$$(f, g) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} f_{i,j} g_{i,j}, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} (u_{1i,j} v_{1i,j} + u_{2i,j} v_{2i,j}),$$

где

$$h_{\alpha i} = \begin{cases} h_\alpha, & i = \overline{1, M_\alpha - 1} \text{ (т.е. узел } x^{\pm\alpha} \text{ лежит в } \Omega_h), \\ h_\alpha / 2, & i = 0, \quad i = M_\alpha \text{ (иначе),} \end{cases} \quad \alpha = \overline{1, 2}. \quad (7)$$

Тогда для произвольных сеточных функций  $\rho$  и  $u$ , где  $u = 0$  на границе области  $\Omega_h$ , имеет место следующее соотношение:

$$\langle \langle u \rangle_x, \rho \rangle_x = - \langle \langle \rho \rangle_x, u \rangle_x.$$

**3.1. Аппроксимация уравнения неразрывности.** Дивергенцию величины  $\rho \mathbf{u}$  в уравнении неразрывности аппроксимируем разностями (6):

$$\operatorname{div}^h \rho \mathbf{u} = \langle \rho u_1 \rangle_{x_1} + \langle \rho u_2 \rangle_{x_2}. \quad (8)$$

Кроме того, определим следующую величину:

$$\langle \langle u_k \rangle_{x_k} \rho \rangle_{x_k} = \begin{cases} \frac{\langle u_k \rangle^{+k} (\rho^{+k} - \rho) - \langle u_k \rangle^{-k} (\rho - \rho^{-k})}{h_k^2}, & \text{если узлы } x^{\pm k} \text{ лежат в области } \Omega_h, \\ \frac{\langle u_k \rangle^{+k} (\rho^{+k} - \rho) - \langle u_k \rangle^{-k} (\rho - \rho^{-k})}{h_k^2 / 2}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (9)$$

где  $k = \overline{1, 2}$ , и в случае если узел  $x^{\pm k}$  лежит вне области  $\Omega_h$ , считаем величину  $\langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho)$  равной нулю в силу краевых условий (4). Для того чтобы разностная схема удовлетворяла требуемым свойствам, будем добавлять к выражению (8) слагаемые вида (9) по следующим правилам:

- Если  $u_k > 0$ , то вычтем из (8) величину  $h_k \langle \langle u_k \rangle_{x_k} \rho \rangle_{x_k}$ , где  $k = \overline{1, 2}$ .

Если  $u_k^{+k} > 0$  и  $u_k^{-k} > 0$ , то получаем обычную разность “против потока” с аппроксимацией порядка  $O(h_k)$ .

•Если  $u_k < 0$ , то прибавим к (8) величину  $h_k \langle u_k \rangle_{x_k} \rho_{x_k}$ , где  $k = \overline{1, 2}$ .

Аналогично, если  $u_k^{+k} < 0$  и  $u_k^{-k} < 0$ , то получаем обычную разность “против потока” с аппроксимацией порядка  $O(h_k)$ .

•Если величины  $u_k$  и  $u_k^{+k}$  противоположны по знаку, то заменим в выражении (8) центральную разность направленной, а именно вместо величины  $\langle \rho u_k \rangle^{+k}$  используем величину  $\rho \langle u_k \rangle^{+k}$ , если  $\langle u_k \rangle^{+k} > 0$ , и величину  $\rho^{+k} \langle u_k \rangle^{+k}$  в противном случае. Кроме того, не будем добавлять часть слагаемого (9), а именно величину вида  $\langle u_k \rangle^{+k} (\rho^{+k} - \rho) / h_k$ . В силу того, что величины  $u_k$  и  $u_k^{+k}$  в данном случае имеют порядок  $O(h_k)$ , получаем аппроксимацию порядка  $O(h_k)$ .

•Если величины  $u_k$  и  $u_k^{-k}$  противоположны по знаку, то заменим в выражении (8) центральную разность направленной, а именно вместо величины  $\langle \rho u_k \rangle^{-k}$  используем величину  $\rho \langle u_k \rangle^{-k}$ , если  $\langle u_k \rangle^{-k} < 0$ , и величину  $\rho^{-k} \langle u_k \rangle^{-k}$  в противном случае. Кроме того, не будем добавлять часть слагаемого (9), а именно величину вида  $\langle u_k \rangle^{-k} (\rho^{-k} - \rho) / h_k$ . В силу того, что величины  $u_k$  и  $u_k^{-k}$  в данном случае имеют порядок  $O(h_k)$ , получаем аппроксимацию порядка  $O(h_k)$ .

Введём следующие обозначения:

$$\{\rho u_k\}^{\pm k} = \begin{cases} 0, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h, \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \mp \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), & \text{если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} > 0, \\ \langle \rho u_k \rangle^{\pm k} \pm \langle u_k \rangle^{\pm k} (\rho^{\pm k} - \rho), & \text{если } u_k \text{ и } u_k^{\pm k} < 0, \\ \rho \langle u_k \rangle^{\pm k}, & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} > 0, \\ \rho^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k}, & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k} \langle u_k \rangle^{\pm k} \leq 0, \end{cases}$$

где  $k = \overline{1, 2}$  и  $\delta^{\pm k} = \text{sign}(x_k^{\pm k} - x_k)$ . Определим сеточный оператор  $A(\mathbf{u}): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  следующим образом:

$$A(\mathbf{u})\rho = \sum_{k=1}^2 \{\rho u_k\}_{x_k},$$

где разность  $\{\rho u_k\}_{x_k}$  определяется аналогично (6). Для аппроксимации урав-

нения неразрывности рассмотрим полностью неявную двухслойную разностную схему

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0. \quad (10)$$

Аналогично [5], докажем положительность сеточной функции плотности и выполнение сеточного аналога закона сохранения массы. Отметим свойства сеточного оператора  $A(\mathbf{u})$ :

- Сеточный оператор  $A(\mathbf{u})$  является матрицей размера  $(M_1+1)(M_2+1) \times (M_1+1)(M_2+1)$ .

- На диагонали стоят неотрицательные элементы.

- Вне диагонали стоят неположительные элементы.

- Имеет место тождество  $\sum_{i=0}^{M_1} h_{1i} (A(\mathbf{u}))_{ij} = 0, j = \overline{0, M_2}$ .

Таким образом, сеточный оператор  $E + \tau A(\mathbf{u})$  является  $M$ -матрицей. Следовательно, у обратной матрицы все элементы неотрицательны, причём в каждой строке есть хотя бы один положительный элемент. Тогда если  $\rho^0 > 0$ , то сеточная функция плотности будет положительной на  $(n+1)$ -м шаге по времени при любых шагах по времени и пространству. Кроме того, имеет место выполнение сеточного аналога закона сохранения массы, а именно

$$\sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} \hat{\rho}_{i,j} = \sum_{i=0}^{M_1} \sum_{j=0}^{M_2} h_{1i} h_{2j} \rho_{i,j}^0.$$

**3.2. Аппроксимация уравнений движения.** Уравнения движения аппроксимируем следующим образом:

$$(\rho \mathbf{u})_t + \sum_{k=1}^2 (\{\hat{\rho} \hat{u}_k\} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle)_{x_k} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{\rho} \nabla_h \hat{\rho}^{\gamma-1} + \frac{\gamma}{\gamma-1} \sum_{k=-2}^2 \psi^k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \quad (11)$$

где  $\nabla_h g = (\langle g \rangle_{x_1}, \langle g \rangle_{x_2})$ , а  $\psi^{\pm k}(\rho, u_q, g) = \frac{1}{2h_{ki_k}} \times$

$$\times \begin{cases} 0, & \text{если узел } x^{\pm k} \text{ лежит вне области } \Omega_h, \\ -(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } u_k > 0 \text{ и } u_k^{\pm k} > 0, \\ (\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } u_k < 0 \text{ и } u_k^{\pm k} < 0, \\ 0, & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) > 0, \\ \delta^{\pm k}(\rho^{\pm k} - \rho)(g^{\pm k} - g), & \text{если } \text{sign } u_k \neq \text{sign } u_k^{\pm k} \text{ и } \delta^{\pm k}(u_k + u_k^{\pm k}) < 0, \end{cases}$$

$q = \overline{1, 2}$ ,  $\psi^{\pm k}(\rho, \mathbf{u}, g) = (\psi^{\pm k}(\rho, u_1, g), \psi^{\pm k}(\rho, u_2, g))$  для произвольной сеточной функции  $g$ , величина  $h_{ki_k}$  определяется формулой (7). Докажем, что норма  $\|(\rho)^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_{2,h}}$  равномерно ограничена по времени. В самом деле, умножим уравнение (10) на  $-(1/2)\tau \hat{\mathbf{u}}^2$ , а уравнение (11) на  $\tau \hat{\mathbf{u}}$  и сложим. В результате получим равенство

$$-\frac{1}{2}\tau(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2) + \tau((\rho \mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}) - \frac{1}{2}\tau \left( \sum_{k=1}^2 \{ \hat{\rho} \hat{u}_k \}_{x_k}, \hat{\mathbf{u}}^2 \right) + \tau \left( \sum_{k=1}^2 ( \{ \hat{\rho} \hat{u}_k \} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle )_{x_k}, \hat{\mathbf{u}} \right) + \tau \frac{\gamma}{\gamma-1} (\hat{\rho} \nabla_h \hat{\rho}^{\gamma-1}, \hat{\mathbf{u}}) + \tau \frac{\gamma}{\gamma-1} \left( \sum_{k=-2}^2 \psi^k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}} \right) = 0. \quad (12)$$

Простые преобразования дают

$$-\frac{1}{2}\tau(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2) + \tau((\rho \mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2), \quad (13)$$

$$\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^2 \{ \hat{\rho} \hat{u}_k \}_{x_k}, \hat{\mathbf{u}}^2 \right) = \left( \sum_{k=1}^2 ( \{ \hat{\rho} \hat{u}_k \} \langle \hat{\mathbf{u}} \rangle )_{x_k}, \hat{\mathbf{u}} \right).$$

Нетрудно показать, что

$$(\hat{\rho} \nabla_h \hat{\rho}^{\gamma-1}, \hat{\mathbf{u}}) + \left( \sum_{k=-2}^2 \psi^k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}} \right) = - \left( \sum_{k=1}^2 \{ \hat{\rho} \hat{u}_k \}_{x_k}, \hat{\rho}^{\gamma-1} \right). \quad (14)$$

С учётом равенств (13) и (14), преобразуем выражение (12) к виду

$$\frac{1}{2}\tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2) + \tau \frac{\gamma}{\gamma-1}(\rho_t, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0. \quad (15)$$

Используя рассуждения, описанные подробно в разд. 6, из тождества (15) можно вывести

**Теорема 1.** *Решение разностной задачи (10), (11) удовлетворяет неравенству*

$$\frac{1}{2}(\rho^{n+1}, (\mathbf{u}^{n+1})^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^{n+1}, 1) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (\rho^m, (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)^2) \leq \frac{1}{2}(\rho^0, (\mathbf{u}^0)^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^0, 1).$$

**4. Условные обозначения на треугольных сетках.** Пусть построена кусочно-линейная аппроксимация  $\Gamma_h$  границы  $\Gamma$ , а область  $\Omega_h$ , ограничен-

ная границей  $\Gamma_h$ , разбита на согласованные треугольники  $\omega_i$ , которые в дальнейшем будем называть ячейками. Ребра треугольника  $\omega_i$  и смежные треугольники обозначим через  $S_{i_k}$  и  $\omega_{i_k}$  соответственно, причём ребро  $S_{i_k}$  является смежной стороной треугольников  $\omega_i$  и  $\omega_{i_k}$ , где  $k = \overline{1,3}$ . Положим  $\mathbf{n}_{i_k} = (n_{i_k}^1, n_{i_k}^2)$  – внешняя нормаль к ребру  $S_{i_k}$  ячейки  $\omega_i$ . Если нумерация ведётся относительно ребра  $S_j$ , то соседние ячейки обозначим через  $\omega_{j_1}$  и  $\omega_{j_2}$ . В том случае если ребро  $S_j$  лежит на границе области, определена только ячейка  $\omega_{j_1}$ . Тогда  $\mathbf{n}_{j_k}$  – внешняя нормаль к ребру  $S_j$  относительно ячейки  $\omega_{j_k}$ , где  $k = \overline{1,2}$ .

Если ячейка  $\omega_i$  является остроугольным треугольником, то её центром  $x_i$  назовём центр описанной окружности треугольника  $\omega_i$ . Рассмотрим две соседние остроугольные ячейки  $\omega_i$  и  $\omega_{i_k}$  (рис.1), где  $k = \overline{1,3}$ .

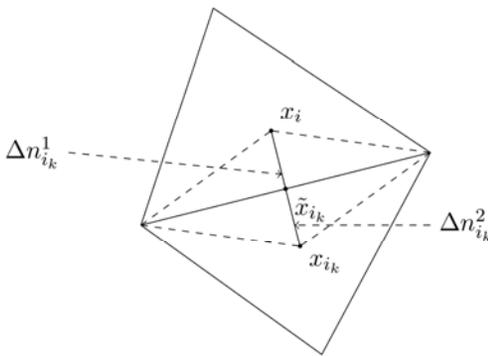


Рис.1. Остроугольные ячейки  $\omega_i$  и  $\omega_{i_k}$ .

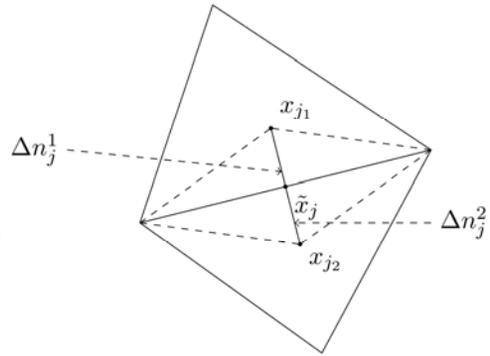


Рис.2. Остроугольные ячейки  $\omega_{j_1}$  и  $\omega_{j_2}$ .

Пусть  $\Delta n_{i_k}$  – отрезок, соединяющий точки  $x_i$  и  $x_{i_k}$ , он перпендикулярен ребру  $S_{i_k}$  и пересекается с ним в точке  $\tilde{x}_{i_k}$ , причём эта точка делит ребро  $S_{i_k}$  пополам. Отрезки  $x_i \tilde{x}_{i_k}$  и  $\tilde{x}_{i_k} x_{i_k}$  обозначим как  $\Delta n_{i_k}^1$  и  $\Delta n_{i_k}^2$  соответственно. Таким образом,  $\Delta n_{i_k} = \Delta n_{i_k}^1 + \Delta n_{i_k}^2$ . В случае если нумерация ведётся относительно ребра  $S_j$  (рис.2), то центрами ячеек  $\omega_{j_1}$  и  $\omega_{j_2}$  являются точки  $x_{j_1}$  и  $x_{j_2}$  соответственно,  $\tilde{x}_j$  – точка пересечения отрезка  $x_{j_1} x_{j_2}$  с ребром  $S_j$ , а величины  $\Delta n_j$ ,  $\Delta n_j^1$  и  $\Delta n_j^2$  обозначают отрезки  $x_{j_1} x_{j_2}$ ,  $x_{j_1} \tilde{x}_j$  и  $\tilde{x}_j x_{j_2}$  соответственно.

Теперь перейдём к обозначениям для тупоугольных ячеек. Если ячейка  $\omega_i$  является тупоугольным треугольником, то центром  $x_i$  этой ячейки на-

зовём её центр масс. Рассмотрим две соседних ячейки  $\omega_i$  и  $\omega_{i_k}$  (рис.3), где  $k = \overline{1,3}$ , причём хотя бы одна из этих ячеек является тупоугольной

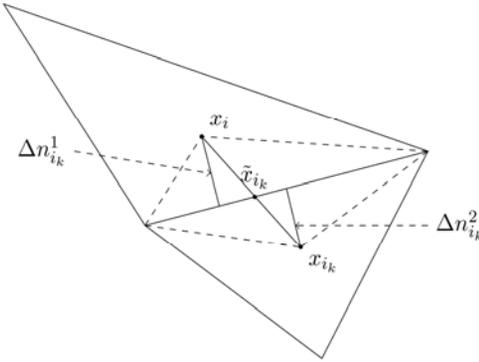


Рис.3. Ячейки  $\omega_i$  и  $\omega_{i_k}$ .

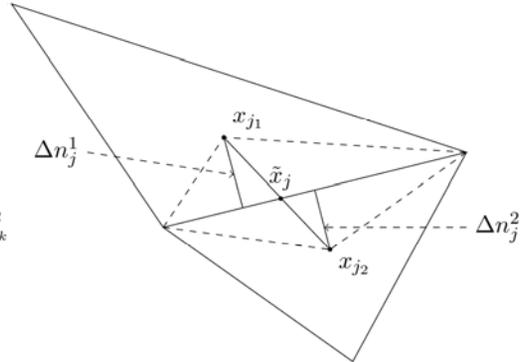


Рис.4. Ячейки  $\omega_{j_1}$  и  $\omega_{j_2}$ .

Пусть  $\Delta n_{i_k}$  – проекция отрезка, соединяющего точки  $x_i$  и  $x_{i_k}$ , на нормаль  $\mathbf{n}_{i_k}$ . Положим  $\tilde{x}_{i_k}$  – точка пересечения отрезка  $x_i x_{i_k}$  с ребром  $S_{i_k}$  (или с его продолжением). Опустим из точек  $x_i$  и  $x_{i_k}$  перпендикуляры на ребро  $S_{i_k}$  (или на его продолжение), которые обозначим с помощью  $\Delta n_{i_k}^1$  и  $\Delta n_{i_k}^2$  соответственно. Таким образом,  $\Delta n_{i_k} = \Delta n_{i_k}^1 + \Delta n_{i_k}^2$ . Аналогично, если нумерация ведётся относительно ребра  $S_j$  (рис.4), то центрами ячеек  $\omega_{j_1}$  и  $\omega_{j_2}$  являются точки  $x_{j_1}$  и  $x_{j_2}$  соответственно,  $\tilde{x}_j$  – точка пересечения отрезка  $x_{j_1} x_{j_2}$  с ребром  $S_j$  или его продолжением, а величины  $\Delta n_j$ ,  $\Delta n_j^1$  и  $\Delta n_j^2$  обозначают проекции отрезков  $x_{j_1} x_{j_2}$ ,  $x_{j_1} \tilde{x}_j$  и  $\tilde{x}_j x_{j_2}$  соответственно на нормаль к ребру  $S_j$ .

Если ребро  $S_{i_k}$  ячейки  $\omega_i$  принадлежит границе  $\Gamma_h$ , то точку  $\tilde{x}_{i_k}$  расположим в центре ребра  $S_{i_k}$ , величину  $\Delta n_{i_k}^1$  определим точно так же, как и в двух предыдущих случаях, а величину  $\Delta n_{i_k}$  положим равной  $\Delta n_{i_k}^1$ . Аналогичным образом определяются обозначения в нумерации относительно граничного ребра  $S_j$ .

В дальнейшем будем обозначать площади ячеек точно так же, как ячейки, а длины отрезков так же, как и сами отрезки. Сеточные функции  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  и  $p$  определим на множестве центров ячеек  $\{x_i \mid \omega_i \in \Omega_h\}$  таким образом, что  $\rho(x_i) = \rho_i$ ,  $\mathbf{u}(x_i) = \mathbf{u}_i = (u_{1i}, u_{2i})$  и  $p(x_i) = p_i$ . Кроме того, для удобства введём безындексную форму записи, а именно, при рассмотрении аппрок-

симации в одной отдельно взятой ячейке  $\omega_i$  будем опускать индекс  $i$  для всех обозначений, введённых в этом разделе, т.е. положим  $\omega = \omega_i$ ,  $\rho = \rho_i$ ,  $\mathbf{u} = (u_1, u_2) = \mathbf{u}_i$ ,  $S_k = S_{i_k}$ ,  $\Delta n_k = \Delta n_{i_k}$  и т.д. Аналогично, в нумерации относительно ребра  $S_j$  будем опускать индекс  $j$ , т.е.  $\omega_q = \omega_{j_q}$ ,  $\Delta n^q = \Delta n_{j_q}^q$ ,  $\rho_q = \rho_{j_q}$ , где  $q = \overline{1, 2}$  и т.д.

Пусть  $\mathcal{R}$  – пространство функций, определённых в центрах ячеек, а  $\mathcal{V}$  – пространство вектор-функций, определённых в центрах ячеек. Введём скалярные произведения в  $\mathcal{R}$  и в  $\mathcal{V}$  соответственно:

$$(f, g) = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i f_i g_i, \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i (u_{1i} v_{1i} + u_{2i} v_{2i}).$$

Сеточную норму  $\|\cdot\|_{L_{2,h}}$  определим естественным образом

$$\|f\|_{L_{2,h}} = \sqrt{(f, f)}.$$

Кроме того, введём следующие ограничения на сетку:

- Сетка должна состоять из преимущественно остроугольных треугольников.
- Сетка должна быть квазиравномерной, то есть размер ячеек не должен меняться значительно, а именно должны выполняться следующие условия:

$$\frac{\max_{\omega_i \in \Omega_h} \max_{k=1,3} \Delta n_{i_k}}{\min_{\omega_i \in \Omega_h} \max_{k=1,3} \Delta n_{i_k}} < \Theta, \quad \max_{S_j \in \Omega_h} \frac{\omega_{j_1}}{\omega_{j_2}} < \Theta, \quad (16)$$

где  $\Theta$  – некоторая величина порядка единицы, не зависящая от шага сетки.

**5. Аппроксимация уравнения неразрывности.** Для вывода аппроксимации уравнения неразрывности воспользуемся сеточными операторами, предложенными в [1], а именно дивергенцию в точке  $x_i$  произвольного векторного поля  $\mathbf{W}$  определим как

$$\operatorname{div}_i^h \mathbf{W} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} \langle \mathbf{W} \mathbf{n}_{i_k} \rangle_{i_k}, \quad (17)$$

где  $\langle \zeta \rangle_{i_k}$  – линейная интерполяция функции  $\zeta$  в точку  $\tilde{x}_{i_k}$ , построенная по значениям этой функции в точках  $x_i$  и  $x_{i_k}$ , то есть

$$\langle \zeta \rangle_{i_k} = \begin{cases} \frac{\zeta_i \Delta n_{i_k}^2 + \zeta_{i_k} \Delta n_{i_k}^1}{\Delta n_{i_k}}, & \tilde{x}_{i_k} \in \Omega_h, \\ \tilde{\zeta}_{i_k}, & \tilde{x}_{i_k} \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Кроме того, нам понадобится аппроксимация  $\operatorname{div}(u_d \nabla \rho)$ , которая в безындексной форме записи выглядит следующим образом:

$$\operatorname{div}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho) = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, \quad (18)$$

где суммирование ведётся только по внутренним рёбрам, то есть по рёбрам, не являющимся частью границы  $\Gamma_h$ . Введём следующую величину:

$$H_d = \max_{\Omega_h} (\Delta n_{i_k} |n_{i_k}^d|), \quad d = \overline{1, 2}.$$

Дивергенцию величины  $\rho \mathbf{u}$  в уравнении неразрывности аппроксимируем разностями (17). Имеем

$$\operatorname{div}_i^h \rho \mathbf{u} = \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \langle \rho \mathbf{u} \rangle_{i_k}, \quad (19)$$

где  $\langle \rho \mathbf{u} \rangle_k = 0$  на рёбрах  $S_k$ , являющихся частью границы  $\Gamma_h$  в силу краевых условий (4). Однако для того, чтобы схема удовлетворяла требуемым свойствам, будем добавлять к правой части (19) слагаемые вида (18) по следующим правилам:

- Если  $u_d > 0$ , то вычтем из (19) слагаемое  $H_d \operatorname{div}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho)$ , где  $d = \overline{1, 2}$ .

Получим

$$\left( \frac{\partial(\rho u_d)}{\partial x_d} \right)_i \approx \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \left( \rho \left( \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} u_d n_k^d + H_d \frac{1}{\Delta n_k} \frac{\Delta n_k^2 u_d + \Delta n_k^1 u_{dk}}{\Delta n_k} \right) + \rho_k \left( \frac{\Delta n_k^1}{\Delta n_k} u_{dk} n_k^d - H_d \frac{1}{\Delta n_k} \frac{\Delta n_k^2 u_d + \Delta n_k^1 u_{dk}}{\Delta n_k} \right) \right). \quad (20)$$

Если в каждом соседнем треугольнике  $\omega_k$  величины  $u_{dk} > 0$ , то имеем обычную разность “против потока” с аппроксимацией порядка  $O(H_d)$ .

- Если  $u_d < 0$ , то прибавим к (19) слагаемое  $H_d \operatorname{div}_i^h(u_d \nabla_k^h \rho)$ , где  $d = \overline{1, 2}$ . Аналогично предыдущему пункту, если в соседних треугольниках

$\omega_k$  величины  $u_{dk} < 0$ , то получаем обычную разность “против потока” с аппроксимацией порядка  $O(H_d)$ .

• Если величины  $u_d$  и  $u_{dk}$  противоположны по знаку, то на гладких решениях величина  $u_d \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}_k}$  имеет порядок  $O(\Delta n_k)$  на отрезке  $[x_i, x_{i_k}]$ . В этом случае заменим в выражении (19) “центральную разность” “направленной” на ребре  $S_k$ , а именно вместо величины  $\langle \rho u_d n_k^d \rangle_k$  используем величину  $\rho \langle u_d n_k^d \rangle_k$  при условии  $\langle u_d n_k^d \rangle_k > 0$  и величину  $\rho_k \langle u_d n_k^d \rangle_k$  в противном случае. В обоих случаях мы добавляем слагаемое порядка  $O(\Delta n_k)$ , следовательно, порядок аппроксимации не нарушается. В самом деле, с учётом ограничения (16) и неравенства  $S_k \Delta n_k^1 < 2\omega$ , получаем

$$\frac{1}{\omega} S_k n_k^d (\rho \langle u_d \rangle_k - \langle \rho u_d \rangle_k) = \frac{1}{\omega} S_k n_k^d \frac{\Delta n_k^1}{\Delta n_k} u_{dk} (\rho - \rho_k) = O(\Delta n_k),$$

$$\frac{1}{\omega} S_k n_k^d (\rho_k \langle u_d \rangle_k - \langle \rho u_d \rangle_k) = \frac{1}{\omega} S_k n_k^d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} u_d (\rho_k - \rho) = O(\Delta n_k).$$

Кроме того, величина, добавленная в первых двух пунктах, на ребре  $S_k$ , имеет порядок  $O(H_d)$ . Действительно,

$$H_d \frac{1}{\omega} S_k \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} = O(H_d).$$

Для того, чтобы разностная схема удовлетворяла сеточному закону сохранения массы, не будем добавлять это слагаемое.

Опустив индекс  $i$ , введём следующие обозначения на ячейке  $\omega_i$ :

$$\{\rho u_d\}_k = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h, \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k - H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, & \text{если } u_d > 0 \text{ и } u_{dk} > 0, \\ \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k + H_d \langle u_d \rangle_k \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k}, & \text{если } u_d < 0 \text{ и } u_{dk} < 0, \\ \rho \langle u_d n_k^d \rangle_k, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k > 0, \\ \rho_k \langle u_d n_k^d \rangle_k, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k < 0, \end{cases} \quad (21)$$

$$[\rho u_d]_k = \{\rho u_d\}_k - \langle \rho u_d n_k^d \rangle_k,$$

где нормаль  $\mathbf{n}_k$  является внешней по отношению к ячейке  $\omega_i$ . Определим сеточный оператор  $A(\mathbf{u}): \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  следующим образом:

$$A(\mathbf{u})\rho = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} \{\rho \mathbf{u}\}_{i_k} = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} (\langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_{i_k} \rangle_{i_k} + [\rho \mathbf{u}]_{i_k}),$$

где  $\{\rho \mathbf{u}\}_{i_k} = \{\rho u_1\}_{i_k} + \{\rho u_2\}_{i_k}$ . Введём дискретизацию по времени с шагом  $\tau$  таким образом, что  $\rho_i^n = \rho(n\tau, x_i)$ ,  $\mathbf{u}_i^n = \mathbf{u}(n\tau, x_i)$ , а  $p_i^n = p(n\tau, x_i)$ . В дальнейшем будем использовать стандартные обозначения  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^n$ ,  $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}^{n+1}$ ,  $\mathfrak{G}_t = (\mathfrak{G}^{n+1} - \mathfrak{G}^n)/\tau$ , где  $\mathfrak{G}$  – произвольная сеточная функция, определённая на  $\Omega_h$ . Для аппроксимации уравнения неразрывности рассмотрим полностью неявную двухслойную разностную схему

$$\rho_t + A(\hat{\mathbf{u}})\hat{\rho} = 0. \tag{22}$$

Аналогично [5], докажем положительность сеточной функции плотности и выполнение сеточного аналога закона сохранения массы. Отметим свойства сеточного оператора  $A(\mathbf{u})$ :

- Сеточный оператор  $A(\mathbf{u})$  является  $P \times P$ -матрицей, где  $P$  – количество ячеек в сетке.
- На диагонали стоят неотрицательные элементы.
- Вне диагонали стоят неположительные элементы.
- Для каждого столбца матрицы  $A(\mathbf{u})$  имеет место равенство  $\sum_{i=1}^P \omega_i A(\mathbf{u})_{ij} = 0$ , где  $j = \overline{1, P}$ .

Таким образом, сеточный оператор  $(E + \tau A(\mathbf{u}))$  является  $M$ -матрицей. Следовательно у обратной матрицы все элементы неотрицательны, причём в каждой строке есть хотя бы один положительный элемент. Тем самым доказана теорема

**Теорема 2.** Если  $\rho^0 > 0$ , то сеточная функция плотности будет положительной на  $(n+1)$ -м шаге по времени при любых шагах по времени и пространству.

Из равенства  $\sum_{i=1}^P \omega_i A(\mathbf{u})_{ij} = 0$ , где  $j = \overline{1, P}$ , следует теорема

**Теорема 3.** Разностная схема (22) удовлетворяет сеточному аналогу закона сохранения массы, то есть

$$\sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \hat{\rho}_i = \sum_{\omega_i \in \Omega_h} \omega_i \rho_i^0.$$

Заметим, что теоремы 2 и 3 будут верны и в том случае, если в аппроксимации (22) уравнения неразрывности взять скорость с нижнего слоя.

**6. Аппроксимация уравнений движения.** Определим оператор градиента  $\nabla: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{V}$  в точке  $x_i$  аналогично [1]:

$$\nabla_i p = \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} \bar{p}_{i_k} \mathbf{n}_{i_k}, \quad (23)$$

где

$$\bar{p}_{i_k} = \begin{cases} \frac{\Delta n_{i_k}^1 p_i + \Delta n_{i_k}^2 p_{i_k}}{\Delta n_{i_k}}, & \text{если } S_{i_k} \in \Omega_h, \\ p_i, & \text{если } S_{i_k} \in \Gamma_h. \end{cases}$$

Уравнение движения аппроксимируем следующим образом:

$$\begin{aligned} (\rho \mathbf{u})_t + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}\}_k \frac{\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_k}{2} + \\ + \frac{\gamma}{\gamma-1} \hat{\rho} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}} \mathbf{n}_k + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \Psi_k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

где  $\Psi_k(\rho, \mathbf{u}, g) = (\Psi_k(\rho, u_1, g), \Psi_k(\rho, u_2, g))$  и

$$\begin{aligned} \Psi_k(\rho, u_d, g) = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если ребро } S_k \text{ является частью границы } \Gamma_h, \\ -H_d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} (g_k - g), & \text{если } u_d > 0 \text{ и } u_{dk} > 0, \\ H_d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} \frac{\rho_k - \rho}{\Delta n_k} (g_k - g), & \text{если } u_d < 0 \text{ и } u_{dk} < 0, \\ 0, & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k > 0, \\ n_k^d \frac{\Delta n_k^2}{\Delta n_k} (\rho_k - \rho) (g_k - g), & \text{если } \text{sign } u_d \neq \text{sign } u_{dk} \text{ и } \langle u_d n_k^d \rangle_k < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (25)$$

Таким образом, предпоследнее слагаемое (24) аппроксимирует величину  $\nabla p$ , а последнее слагаемое с учётом ограничений (16) имеет порядок  $O(\max\{H_1, H_2\})$  на каждом из рёбер, по которым ведётся суммирование.

Аналогично [5], докажем, что норма  $\|\rho^{1/2} \mathbf{u}\|_{L_{2,h}}$  равномерно ограничена по времени. В самом деле, умножим уравнение (22) на  $-(1/2)\tau \hat{\mathbf{u}}^2$ , а уравнение (24) – на  $\tau \hat{\mathbf{u}}$  и сложим. В результате получим равенство

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\tau(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2) + \tau((\rho\mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}) - \\
 & -\frac{1}{2}\tau\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k, \hat{\mathbf{u}}^2\right) + \tau\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k \frac{\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_k}{2}, \hat{\mathbf{u}}\right) + \\
 & + \tau\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\hat{\rho}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \overline{\hat{\rho}^{\gamma-1}} \mathbf{n}_k, \hat{\mathbf{u}}\right) + \tau\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \Psi_k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}}\right) = 0.
 \end{aligned} \tag{26}$$

Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2}\tau(\rho_t, \hat{\mathbf{u}}^2) + \tau((\rho\mathbf{u})_t, \hat{\mathbf{u}}) = \frac{1}{2}\tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2), \\
 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k, \hat{\mathbf{u}}^2\right) = \left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \{\hat{\rho}\hat{\mathbf{u}}\}_k \frac{\hat{\mathbf{u}} + \hat{\mathbf{u}}_k}{2}, \hat{\mathbf{u}}\right).
 \end{aligned} \tag{27}$$

Для упрощения дальнейшего изложения разделим рёбра на несколько классов. Пусть  $\mathcal{S}_0$  – множество всех внутренних рёбер. Кроме того, нам потребуется ввести классы рёбер, отвечающие четырём последним случаям формул (21) и (25), а именно

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_1^d &= \{S_j \in \mathcal{S}_0 \mid u_{d1} > 0 \text{ и } u_{d2} > 0\}, \\
 \mathcal{S}_2^d &= \{S_j \in \mathcal{S}_0 \mid u_{d1} < 0 \text{ и } u_{d2} < 0\}, \\
 \mathcal{S}_3^d &= \{S_j \in \mathcal{S}_0 \mid \text{sign } u_{d1} \neq \text{sign } u_{d2} \text{ и } \langle u_d \mathbf{n}_1^d \rangle > 0\}, \\
 \mathcal{S}_4^d &= \{S_j \in \mathcal{S}_0 \mid \text{sign } u_{d1} \neq \text{sign } u_{d2} \text{ и } \langle u_d \mathbf{n}_1^d \rangle < 0\},
 \end{aligned}$$

где  $d = \overline{1, 2}$ , и нумерация ведётся относительно ребра  $S_j$ . Преобразуем левую часть второго выражения (27). Для удобства опустим знак “крышка” над сеточными функциями. Имеем

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \{\rho\mathbf{u}\}_k, \mathbf{u}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k \langle \rho\mathbf{u}\mathbf{n}_k \rangle_k, \mathbf{u}^2\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^3 S_k [\rho\mathbf{u}]_k, \mathbf{u}^2\right). \tag{28}$$

В первом слагаемом правой части (28) стоит двойное суммирование: внешнее по всем ячейкам и внутреннее по рёбрам одной ячейки. Перегруппируем слагаемые таким образом, чтобы осталось только одно суммирование по всем имеющимся рёбрам, т.е. перейдём от суммирования по ячейкам к суммированию по рёбрам. Здесь и далее будем пользоваться безындексной формой записи, опуская индекс  $j$  ребра  $S_j$ . Используя тот факт, что  $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ , на ребре  $S_j \in \mathcal{S}_0$  имеем

$$\begin{aligned}
S_j((\langle \rho \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}_1) \mathbf{u}_1^2 + (\langle \rho \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}_2) \mathbf{u}_2^2) &= S_j(\langle \rho \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}_1 (\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2)) = \\
&= S_j((\langle \rho \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}_1) (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 + (\langle \rho \mathbf{u} \rangle \mathbf{n}_2) (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2).
\end{aligned} \tag{29}$$

Вернёмся к суммированию по ячейкам. С учётом выражения (29) получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_k \rangle_k, \mathbf{u}^2 \right) = \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \langle \rho \mathbf{u} \mathbf{n}_k \rangle_k \frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}_k}{2}, \mathbf{u} \right). \tag{30}$$

Теперь перейдём к суммированию по рёбрам во втором слагаемом правой части (28). На ребре  $S_j \in S_1^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ , имеем

$$\begin{aligned}
S_j \left( -H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} \mathbf{u}_1^2 - H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta n} \mathbf{u}_2^2 \right) &= \\
= S_j \left( -H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} (\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2) \right) &= \\
= S_j \left( -H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 - H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta n} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 \right).
\end{aligned} \tag{31}$$

Случай  $S_j \in S_2^d$  аналогичен с точностью до знака. В случае если  $S_j \in S_3^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ ,

$$\begin{aligned}
S_j \left( n_1^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} u_{d2} (\rho_1 - \rho_2) \mathbf{u}_1^2 + n_2^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} u_{d2} (\rho_1 - \rho_2) \mathbf{u}_2^2 \right) &= \\
= S_j \left( n_1^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} u_{d2} (\rho_1 - \rho_2) (\mathbf{u}_1^2 - \mathbf{u}_2^2) \right) &= \\
= S_j \left( n_1^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} u_{d2} (\rho_1 - \rho_2) (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_1 + n_2^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} u_{d2} (\rho_1 - \rho_2) (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2 \right).
\end{aligned} \tag{32}$$

Случай  $S_j \in S_4^d$  разбирается аналогично. Учитывая выражения (31) и (32), вернёмся к суммированию по ячейкам. В результате получим тождество

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k [\rho \mathbf{u}]_k, \mathbf{u}^2 \right) = \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k [\rho \mathbf{u}]_k \frac{\mathbf{u} + \mathbf{u}_k}{2}, \mathbf{u} \right). \tag{33}$$

Из выражений (30) и (33) следует второе равенство (27). Точно так же, как и в [1] доказывается, что

$$\left( \hat{\rho} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \overline{\hat{\rho}^{\gamma-1} \mathbf{n}_k}, \hat{\mathbf{u}} \right) = - \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \langle \hat{\rho} \hat{\mathbf{u}} \mathbf{n}_k \rangle_k, \hat{\rho}^{\gamma-1} \right). \tag{34}$$

Преобразуем последнее слагаемое (26), а именно, перейдём к суммированию по рёбрам. На ребре  $S_j \in \mathcal{S}_1^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ , имеем

$$\begin{aligned} & S_j \left( -H_d \frac{\Delta n^2}{\Delta n} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} (\rho_2^{\gamma-1} - \rho_1^{\gamma-1}) u_{d1} - H_d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta n} (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_2^{\gamma-1}) u_{d2} \right) = \\ & = S_j \left( \rho_1^{\gamma-1} H_d \frac{\Delta n^2 u_{d1} + \Delta n^1 u_{d2}}{\Delta n} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} + \rho_2^{\gamma-1} H_d \frac{\Delta n^1 u_{d2} + \Delta n^2 u_{d1}}{\Delta n} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta n} \right) = \quad (35) \\ & = S_j \left( \rho_1^{\gamma-1} H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Delta n} + \rho_2^{\gamma-1} H_d \langle u_d \rangle \frac{\rho_1 - \rho_2}{\Delta n} \right). \end{aligned}$$

Случай  $S_j \in \mathcal{S}_2^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ , аналогичен с точностью до знака. На ребре  $S_j \in \mathcal{S}_3^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ , имеем

$$\begin{aligned} & S_j \left( n_2^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} (\rho_1 - \rho_2) (\rho_1^{\gamma-1} - \rho_2^{\gamma-1}) u_{2d} \right) = \quad (36) \\ & = S_j \left( -\rho_1^{\gamma-1} n_1^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} (\rho_1 - \rho_2) u_{2d} - \rho_2^{\gamma-1} n_2^d \frac{\Delta n^1}{\Delta n} (\rho_1 - \rho_2) u_{2d} \right). \end{aligned}$$

Случай  $S_j \in \mathcal{S}_4^d$ ,  $d = \overline{1, 2}$ , разбирается аналогично. Используя выражения (35) и (36), вернёмся к суммированию по ячейкам. В результате получим тождество

$$\left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \Psi_k(\hat{\rho}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{\rho}^{\gamma-1}), \hat{\mathbf{u}} \right) = - \left( \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k [\hat{\rho} \hat{\mathbf{u}}]_k, \hat{\rho}^{\gamma-1} \right). \quad (37)$$

Используя равенства (27), (34), (37) и (22), преобразуем выражение (26) к виду

$$\frac{1}{2} \tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2} (\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2) + \tau \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_t, \hat{\rho}^{\gamma-1}) = 0. \quad (38)$$

Далее проведём рассуждения точно так же, как в [5]. Оценим величину  $\rho \hat{\rho}^{\gamma-1}$  с помощью неравенства Юнга с показателями  $\gamma$  и  $\gamma/(\gamma-1)$ :

$$\rho \hat{\rho}^{\gamma-1} \leq \frac{1}{\gamma} \rho^\gamma + \frac{\gamma-1}{\gamma} \hat{\rho}^\gamma.$$

Тогда  $\tau \frac{\gamma}{\gamma-1} (\rho_t, \hat{\rho}^{\gamma-1}) \geq \frac{1}{\gamma-1} [(\hat{\rho}^\gamma, 1) - (\rho^\gamma, 1)]$ .

Из последнего неравенства и (38) следует

$$\frac{1}{2}\tau(\rho, \mathbf{u}^2)_t + \frac{1}{2}(\rho, (\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{u})^2) + \frac{1}{\gamma-1}[(\hat{p}, 1) - (p, 1)] \leq 0. \quad (39)$$

Просуммировав выражение (39) по всем шагам по времени, получаем

**Теорема 4.** Для решения разностной задачи (22), (24) с однородными краевыми условиями, т.е.  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$  на границе  $\Gamma_h$ , имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\rho^{n+1}, (\mathbf{u}^{n+1})^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^{n+1}, 1) + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^n (\rho^m, (\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m)^2) \leq \\ & \leq \frac{1}{2}(\rho^0, (\mathbf{u}^0)^2) + \frac{1}{\gamma-1}(p^0, 1). \end{aligned}$$

**7. Существование решения.** Утверждение теоремы 4 и принцип Лере-Шаудера [9] позволяют доказать существование решения при любых шагах по времени и по пространству точно так же, как и в [5].

Для нахождения сеточного решения задачи (22), (24) на каждом шаге по времени требуется решить нелинейную систему уравнений. Для этого можно использовать внутренний итерационный процесс по  $q$ :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^{q+1} - \rho^n}{\tau} + \frac{1}{\omega_i} \sum_{k=1}^3 S_{i_k} \{\rho^{q+1} \mathbf{u}^q\}_{i_k} = 0, \\ & \frac{\rho^{q+1} \mathbf{u}^{q+1} - \rho^n \mathbf{u}^n}{\tau} + \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \{\rho^{q+1} \mathbf{u}^{q+1}\}_k \frac{\mathbf{u}^q + \mathbf{u}_k^q}{2} + \\ & + \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{q+1} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k (\rho^{q+1})^{\gamma-1} \mathbf{n}_k + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{\omega} \sum_{k=1}^3 S_k \psi_k (\rho^{q+1}, \mathbf{u}^{q+1}, (\rho^{q+1})^{\gamma-1}) = 0. \end{aligned} \quad (40)$$

**8. Численная оценка сходимости.** Рассмотрим в цилиндре  $Q_T = [0, T] \times [0, 1] \times [0, 1]$  задачу

$$\begin{aligned} & \partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = f_\rho, \\ & \partial(\rho \mathbf{u}) / \partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = (f_{u_1}, f_{u_2}), \\ & p = \rho^\gamma, \end{aligned} \quad (41)$$

где правые части  $f_\rho(t, x_1, x_2)$ ,  $f_{u_1}(t, x_1, x_2)$  и  $f_{u_2}(t, x_1, x_2)$  подобраны таким образом, чтобы функции

$$\begin{aligned} \rho(t, x_1, x_2) &= \cos t \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) + 2, \\ u_1(t, x_1, x_2) &= \cos t \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2), \\ u_2(t, x_1, x_2) &= \cos t \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2) \end{aligned} \tag{42}$$

являлись решением системы (41). Начальные и граничные условия определим естественным образом с помощью функций (42). Показатель адиабаты Пуассона  $\gamma$  во всех экспериментах равен 1.4. Для оценки погрешности используем норму разницы заданной и сеточной функций плотности в момент времени  $T = 0.1$ . Расчёт проводился как на ортогональных сетках, так и на треугольных. Для построения треугольных сеток использовался программный пакет Gmsh [10], с помощью которого была построена сетка из 23250 треугольников. Более мелкие сетки строились с помощью деления каждого треугольника исходной сетки средними линиями на четыре части. В табл. 1, 2 представлены сеточные нормы погрешности функции плотности на различных сетках. Для решения системы линейных уравнений в итерационном процессе (40) использовался программный пакет PETSc [11]. Порядок сходимости в таблицах считался как двоичный логарифм отношения величин в соседних столбцах.

**Таблица 1.** Норма погрешности на ортогональной сетке.

Сетка	100 × 100	Порядок	200 × 200	Порядок	400 × 400
Шаг по времени	1e-3		5e-4		2.5e-4
$\ \rho(T) - \rho\ _{C_h}$	4.469082e-02	0.93	2.343709e-02	0.96	1.201358e-02
$\ \rho(T) - \rho\ _{L_{1,h}}$	9.339132e-03	0.93	4.883497e-03	0.96	2.501540e-03
$\ \rho(T) - \rho\ _{L_{2,h}}$	1.296574e-02	0.94	6.745709e-03	0.96	3.451346e-03

**Таблица 2.** Норма погрешности на треугольной сетке.

Кол-во треугольников	23250	Порядок	93000	Порядок	372000
Шаг по времени	1e-3		5e-4		2.5e-4
$\ \rho(T) - \rho\ _{C_h}$	6.082178e-02	0.84	3.394787e-02	0.92	1.789089e-02
$\ \rho(T) - \rho\ _{L_{1,h}}$	1.508937e-02	0.89	8.131671e-03	0.95	4.182657e-03
$\ \rho(T) - \rho\ _{L_{2,h}}$	1.972999e-02	0.88	1.069226e-02	0.95	5.522468e-03

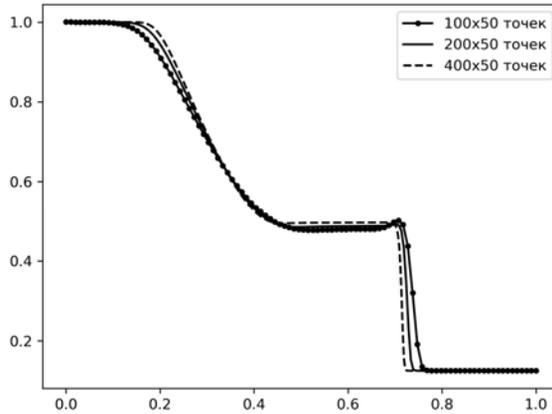
**9. Решение одномерных тестовых задач.** Приведём результаты решения некоторых тестовых задач, изложенных в [12], для оценки возможностей предложенного метода на ортогональных сетках. Рассмотрим задачи Римана в области  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  на временном интервале  $[0, T]$  для системы

(1). Стоит отметить, что в [12] исследовались численные методы решения уравнений Эйлера, поэтому результаты расчётов по предложенной схеме будут отличаться. Разделим область  $\Omega$  прямой  $x_1 = x_0$ , где  $x_0 \in (0,1)$ , на левую и правую части.

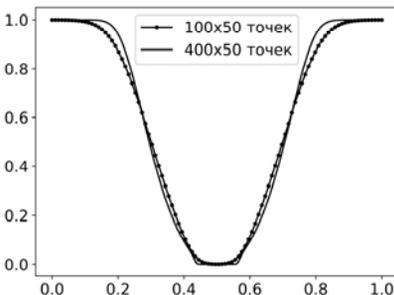
**Таблица 3.** Параметры численных экспериментов.

Тест	$\rho_L$	$u_L$	$\rho_R$	$u_R$	$x_0$	$T$	$a$
1	1	(0.75, 0)	0.125	(0, 0)	0.3	0.2	1
1-jtv	1	(0.75, 1)	0.125	(0, -5)	0.3	0.2	1
2	1	(-2, 0)	1	(2, 0)	0.5	0.1	0.4

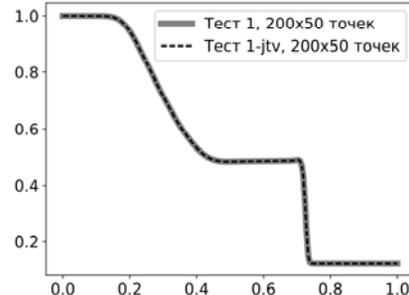
Пусть в начальный момент времени в левой части области плотность и скорость газа постоянны и равны  $\rho_L$  и  $u_L$  соответственно, а в правой части области тоже постоянны и равны  $\rho_R$  и  $u_R$  соответственно. На левой границе зададим постоянные плотность и скорость  $\rho_L$  и  $u_L$ , а на правой границе –  $\rho_R$  и  $u_R$ . На верхней и нижней границах введём периодические краевые условия. Во всех тестах показатель адиабаты Пуассона равен 1.4. Результаты расчётов приведены на рис.5–7. На графиках изображены распределения функции плотности в момент времени  $T$  по координате  $x_1$  с фиксированным значением  $x_2=0.5$ .



**Рис.5.** Результаты теста 1.



**Рис.6.** Результаты теста 2.



**Рис.7.** Сравнение результатов тестов 1 и 1-jtv.

Как и следовало ожидать, предложенный метод в силу использования направленных разностей довольно сильно размывает ударную волну. Однако на втором тесте данная схема показывает лучшие результаты, чем методы, рассмотренные в [12].

**10. Решение двумерных тестовых задач.** В этом разделе приведём результаты расчётов некоторых двумерных тестов из [12]. Рассмотрим задачу (1) в области  $\Omega = [0,1] \times [0,1]$  на временном интервале  $[0, T]$ . Проведём прямые  $x_1=0.5$  и  $x_2=0.5$ . Эти прямые делят область  $\Omega$  на четыре квадрата: левый верхний  $\Omega_{UL}$ , правый верхний  $\Omega_{UR}$ , левый нижний  $\Omega_{LL}$  и правый нижний  $\Omega_{LR}$ . Пусть в начальный момент времени значения функций плотности и скорости постоянны в каждой подобласти и равны

$$\rho_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \rho_{UL}, & \mathbf{x} \in \Omega_{UL}, \\ \rho_{UR}, & \mathbf{x} \in \Omega_{UR}, \\ \rho_{LL}, & \mathbf{x} \in \Omega_{LL}, \\ \rho_{LR}, & \mathbf{x} \in \Omega_{LR}, \end{cases} \quad \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}_{UL}, & \mathbf{x} \in \Omega_{UL}, \\ \mathbf{u}_{UR}, & \mathbf{x} \in \Omega_{UR}, \\ \mathbf{u}_{LL}, & \mathbf{x} \in \Omega_{LL}, \\ \mathbf{u}_{LR}, & \mathbf{x} \in \Omega_{LR}. \end{cases}$$

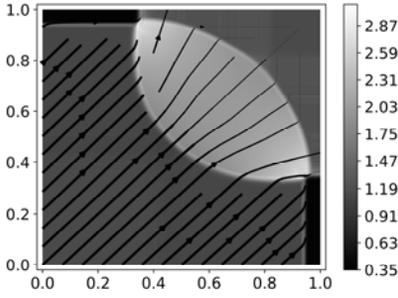
Зададим следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \mathbf{u}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial \rho(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad t \in [0, T].$$

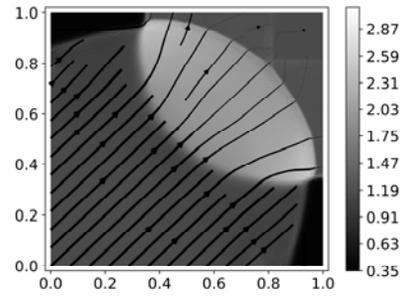
**Таблица 4.** Начальные значения функций скорости и плотности в каждой из подобластей, а также параметры экспериментов.

Тест		Лево		Право		$T$	$a$
		$\rho$	$\mathbf{u}$	$\rho$	$\mathbf{u}$		
4	Верх	0.5065	(0.8939, 0.0)	1.0	(0.0, 0.0)	0.25	1.0
	Низ	1.1	(0.8939, 0.8939)	0.5065	(0.0, 0.8939)		
12	Верх	1.0	(0.7276, 0.0)	0.5313	(0.0, 0.0)	0.25	1.0
	Низ	0.8	(0.0, 0.0)	1.0	(0.0, 0.7276)		
15	Верх	0.5197	(-0.6259, -0.3)	1.0	(0.1, -0.3)	0.2	1.0
	Низ	0.8	(0.1, -0.3)	0.5313	(0.1, 0.4276)		
17	Верх	2.0	(0.0, -0.3)	1.0	(0.0, -0.4)	0.3	1.0
	Низ	1.0625	(0.0, 0.2145)	0.5197	(0.0, -1.1259)		

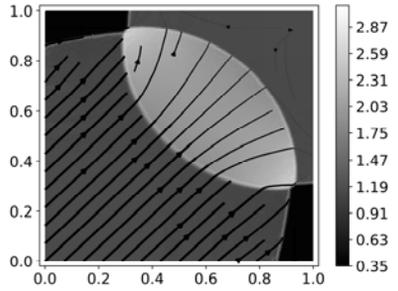
Расчёт проводился как на ортогональных, так и на неструктурированных сетках. Ортогональная сетка состояла из 90 тыс.узлов: 300 узлов по горизонтали и 300 узлов по вертикали. Треугольная сетка строилась с помощью программного пакета Gmsh [10]. В численном эксперименте использовалась сетка, состоящая из 105 тыс. треугольников, причём число тупоугольных треугольников не превосходило 2%. Кроме того, был проведён контрольный расчёт задачи (1) по методу адаптивной искусственной вязкости [1] на треугольной сетке. На рис.8–19 в градациях серого изображено распределение давления в момент времени  $T$ . Линиями отмечена скорость в момент времени  $T$ , причём толщина линии пропорциональна модулю скорости.



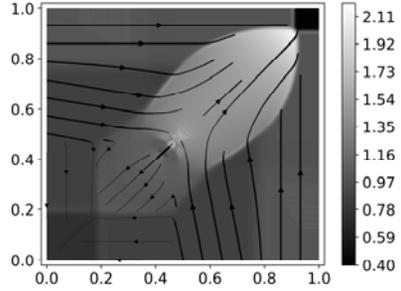
**Рис.8.** Результаты расчёта теста 4 на ортогональной сетке.



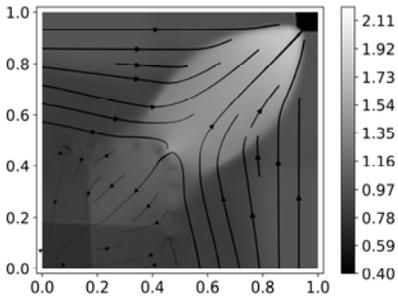
**Рис.9.** Результаты расчёта теста 4 на треугольной сетке.



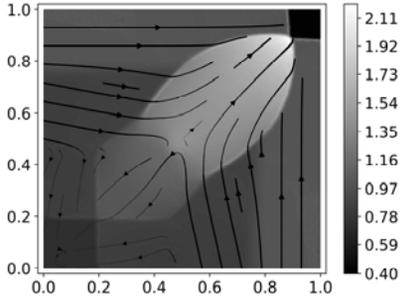
**Рис.10.** Результаты расчёта теста 4 по методу АИВ на треугольной сетке.



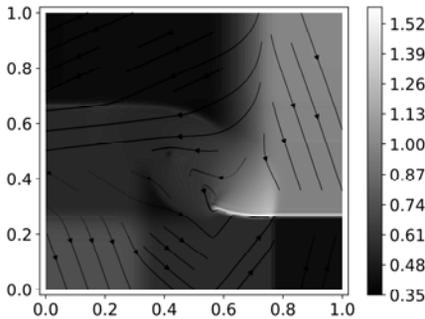
**Рис.11.** Результаты расчёта теста 12 на ортогональной сетке



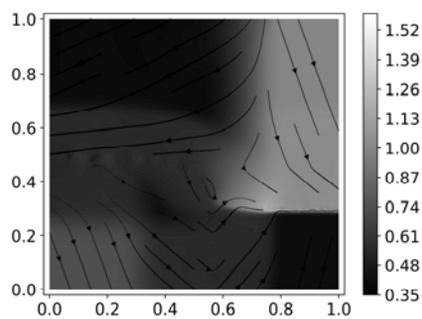
**Рис.12.** Результаты расчёта теста 12 на треугольной сетке.



**Рис.13.** Результаты расчёта теста 12 по методу АИВ на треугольной сетке.



**Рис.14.** Результаты расчёта теста 15 на ортогональной сетке.



**Рис.15.** Результаты расчёта теста 15 на треугольной сетке.

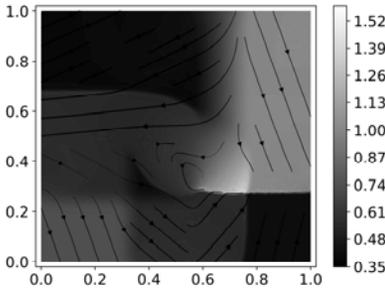


Рис.16. Результаты расчёта теста 15 по методу АИВ на треугольной сетке.

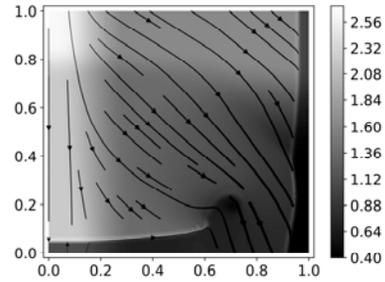


Рис.17. Результаты расчёта теста 17 на ортогональной сетке.

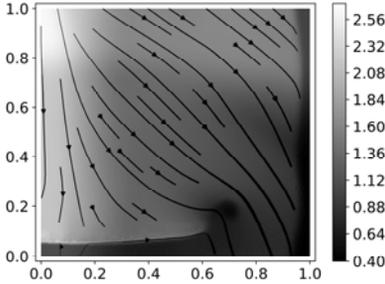


Рис.18. Результаты расчёта теста 17 на треугольной сетке.

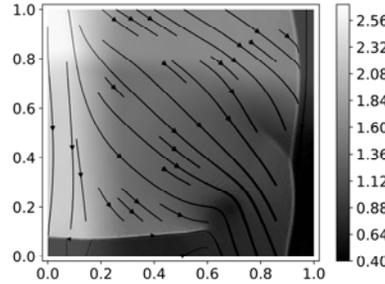


Рис.19. Результаты расчёта теста 17 по методу АИВ на треугольной сетке.

**11. Заключение.** Предложена разностная схема для уравнений динамики баротропного газа со степенной зависимостью давления от плотности с показателем, большим единицы, на неструктурированных треугольных сетках. Данный метод обладает первым порядком аппроксимации по времени и первым порядком аппроксимации по пространству, если все треугольники являются остроугольными. Доказано существование решения разностной задачи, выполнение сеточного аналога закона сохранения массы, а также положительность сеточной функции плотности. Проведена серия численных экспериментов.

Автор благодарит Г.М. Кобелькова и И.В. Попова за полезные замечания, способствующие улучшению статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Попов И.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости для уравнений газовой динамики на треугольных и тетраэдральных сетках // Математическое моделирование, 2012, т.24, №6, с.109–127;  
 Popov I.V., Fryazinov I.V. Method of adaptive artificial viscosity for gas dynamics equations on triangular and tetrahedral grids // Mathematical Models and Computer Simulations, 2013, v.5, №1, p.50–62.

2. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992;  
*SamarSKIY A.A., Popov Yu.P. Raznostnie metody resheniya zadach gasovoy dinamiki. – M.: Nauka, 1992.*
3. Амосов А.А., Злотник А.А. Разностные схемы второго порядка точности для уравнений одномерного движения вязкого газа // ЖВМиМФ, 1987, т.27, №7, с.1032–1049;  
*Amosov A.A., Zlotnik A.A. Difference schemes of second-order of accuracy for the equations of the one-dimensional motion of a viscous gas // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1987, v.27, №4, p.46–57.*
4. Попов А.В., Жуков К.А. Неявная разностная схема для нестационарного движения вязкого баротропного газа // Выч. методы и программир., 2013, т.14, №4, с.516–523;  
*Popov A.V., Zhukov K.A. An implicit finite-difference scheme for the unsteady motion of a viscous barotropic gas // Numer. Methods and Programming, 2013, v.14, №4, p.516–523.*
5. Имранов Ф.Б., Кобельков Г.М., Соколов А.Г. О разностной схеме для уравнений баротропного газа // Доклады Академии наук, 2018, т.478, №4, с.388–391;  
*Imranov F.B., Kobelkov G.M., Sokolov A.G. Finite Difference Scheme for Barotropic Gas Equations // Doklady Mathematics, 2018, v.97, №1, p.58–61.*
6. Попов И.В., Фрязинов И.В., Станиченко М.Ю., Тайманов А.В. Разностные схемы на треугольных и тетраэдральных сетках для уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости // Математическое моделирование, 2009, т.21, №10, с.94–106;  
*Popov I.V., Fryazinov I.V., Stanichenko M.Yu., Taimanov A.V. Difference schemes on triangular and tetrahedral grids for Navier-Stokes equations of incompressible fluid // Mathematical Models and Computer Simulations, 2010, v.2, №3, p.281–292.*
7. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск, 1996;  
*SamarSKIY A.A., Koldoba A.V., Poveshenko Yu.A., Tishkin V.F., Favorskiy A.P. Raznostnie skhemy na neregulyarnykh setkah. – Minsk, 1996.*
8. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Наука, 2001.  
*Kulikovskiy A.G., Pogorelov N.V., Semenov A.Yu. Matematicheskiye voprosy chislenogo resheniya giperbolicheskikh sistem uravneniy. – M.: Nauka, 2001.*
9. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970.  
*Ladyzhenskaya O.A. Matematicheskiye voprosy dinamiki vyazkoy neshzhimayemoy zhydkosti. – M.: Nauka, 1970.*
10. Geuzaine C., Remacle J.-F. GMSH: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities // Inter. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2009, v.79, N 11, p.1309–1331.
11. Balay S., Gropp W.D., McInnes L.C., Smith B.F. Efficient Management of Parallelism in Object-Oriented Numerical Software Libraries. In: Arge E., Bruaset A.M., Langtangen H.P. (eds) Modern Software Tools for Scientific Computing. Birkhäuser, Boston, MA, 1997.
12. Liska R., Wendroff B. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for Euler equations // Tech. Rep. LA-UR-01-6225, LANL, Los Alamos, 2001.

Поступила в редакцию 03.04.18

После доработки 03.04.18

Принята к публикации 14.05.18