

БИФУРКАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В ПРИСТЕНОЧНОМ СЛОЕ

© 2019 г. *О.В. Трошкин, С.А. Козлов, С.В. Фортова,
В.В. Шепелев, И.В. Ериклинцев*

Институт автоматизации проектирования РАН

troshkin@icad.org.ru; sergei.alex.kozlov@gmail.com; sfortova@icad.org.ru;
vshepelev@icad.org.ru; ilerik@icad.org.ru

DOI:10.1134/S0234087919010076

Описан процесс построения новой модели (бифуркационной модели турбулентности), описывающей течение сплошной среды как в ламинарном, так и турбулентном режимах. Главной ее особенностью является ламинарно-турбулентный переход, возникающий как новое решение уравнения для напряжений Рейнольдса, замыкающего систему RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes). Статья состоит из трех основных разделов. В первом рассказывается о схемах замыкания второго порядка уравнений Навье-Стокса, осредненных по Рейнольдсу. Во втором разделе изложен вывод уравнений модели турбулентного течения в сдвиговом слое. Третий раздел содержит описание модели турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. Приводятся расчеты рассматриваемых течений, результаты сравниваются с экспериментальными.

Ключевые слова: уравнения Навье-Стокса, RANS, ламинарно-турбулентный переход.

BIFURCATION MODEL OF THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION NEAR A FLAT WALL

O.V. Troshkin, S.A. Kozlov, S.V. Fortova, V.V. Shepelev, I.V. Eriklintsev

Institute for Computer Aided Design of RAS

In this article we describe a new mathematical model (bifurcational turbulence model) and argument why it's suitable for prediction of laminar and turbulent boundary layer characteristics. The model's distinguishing feature is that laminar-turbulent transition in medium arises as direct consequence of bifurcational properties of underlying RANS (Reynolds-averaged Navier-Stokes) equations which are closed in a specific way. The article is divided in three major parts. The first part describes RANS and second-order closure conditions along with premises that we use to obtain model equations in closed form. The second part is dedicated to the details of a particular turbulence model and its application to general shear layer problem. In the third part we consider turbulence tran-

sition in boundary layer over flat plate and present results of numerical simulations compared to experimental data for the case.

Key words: Navier-Stokes equations, RANS, laminar-turbulent transition.

1. Турбулентные схемы замыкания второго порядка

Разработанные к настоящему времени многочисленные схемы замыкания цепочки уравнений Рейнольдса приспособлены, в основном, к описанию развитой турбулентности [1], в которых, по существу, моделируются одни и те же физические процессы, ответственные за генерацию и поддержание турбулентности. При этом использование существующих моделей в области перехода от ламинарного течения к турбулентному является актуальной проблемой.

Рассмотрим движение вязкой несжимаемой жидкости в некоторой области Ω с границей $\partial\Omega$. Оно описывается уравнениями Навье-Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_k \frac{\partial V_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} - \nu \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_k^2} &= 0, \\ \frac{\partial V_k}{\partial x_k} &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где V_i – компоненты поля скоростей ($i=1,2,3$), x_i – декартовы координаты точек области течения, ρ – плотность, P – давление, ν – кинематическая вязкость. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Представим поле скоростей в виде $V_i = U_i + u_i$, где $U_i(t, x) = \langle V_i \rangle$ – компоненты скорости, усредненные по ансамблю реализаций течения, а u_i – случайные пульсации компонент скорости, для которых $\langle u_i \rangle = 0$. Из уравнений (1) стандартным способом [1] находятся уравнения Рейнольдса для компонент осредненной скорости $U_i(t, x)$ и тензора корреляций пульсаций скорости $\tau_{ij}(t, x) = \langle u_i(t, x) u_j(t, x) \rangle$ (далее будем также называть их напряжениями Рейнольдса):

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\tau_{ik} - \nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = 0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial t} + \tau_{ik} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \tau_{jk} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} + U_k \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_k} - \nu \frac{\partial^2 \tau_{ij}}{\partial x_k^2} &= \frac{1}{\rho} \left\langle p \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\rangle - \\ - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right\rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p u_j \rangle - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \langle p u_i \rangle - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle u_i u_j u_k \rangle. \end{aligned} \tag{3}$$

В этих уравнениях $p = P - \langle P \rangle$ – пульсация давления. При этом осредненное давление $\langle P \rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \langle P \rangle}{\partial x_k^2} = -\rho \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (U_i U_j + \tau_{ij}), \quad (4)$$

которое следует из уравнения (2) и условия несжимаемости $\partial U_k / \partial x_k = 0$.

Уравнения (2) и (3) являются исходным пунктом для построения большинства статистических моделей турбулентных течений. Например, в так называемых моделях второго порядка [1] члены в правых частях уравнений (3) выражаются некоторым приближенным способом через компоненты осредненной скорости U_i и тензор корреляций τ_{ij} .

2. Турбулентное течение в сдвиговом слое

В [2] подробно описано построение схемы замыкания цепочки уравнений Рейнольдса второго порядка. Для течения в плоском канале при постоянном градиенте давления уравнение (3) для компоненты тензора τ_{12} преобразуется к специальному виду и обладает некоторой особенностью. Математическое исследование, приведенное в работе [2], показало наличие второго решения при некоторых условиях, что соответствует возникновению нового режима течения (турбулентного). Повторим основные выкладки и идеи, используемые в [2], для другого простого течения – сдвигового слоя.

Под сдвиговым слоем подразумевается течение вязкой несжимаемой среды плоскими пластинами,двигающимися с постоянными скоростями, в отсутствии градиента давления. Будем считать, что пластина с координатой $x_2 = 0$ неподвижна, другая пластина движется со скоростью U_∞ , расстояние между пластинами равно h (рис.1).

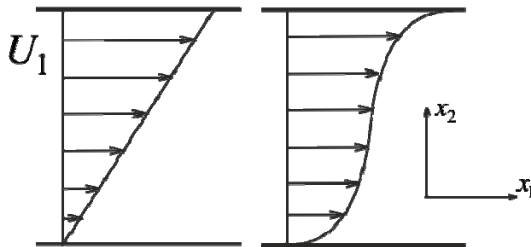


Рис.1. Ламинарный и турбулентный сдвиговый слой.

В данной задаче производные по направлениям x_1 и x_3 отсутствуют; также отсутствуют компоненты скорости U_2 и U_3 . В результате из (2), (3) получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\tau_{12} - \nu \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right) = 0, \quad (5)$$

$$\tau_{22} \frac{\partial U_1}{\partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 \tau_{12}}{\partial x_2^2} = I_1 + I_2, \quad (6)$$

$$I_1 = \frac{1}{\rho} \left\langle p \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \right\rangle - 2\nu \left\langle \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right\rangle, \quad (7)$$

$$I_2 = -\frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{1}{\rho} \langle p u_1 \rangle + \langle u_1 u_2^2 \rangle \right). \quad (8)$$

Из уравнения (5) следует, что стационарный профиль осредненной скорости полностью определяется компонентой $\tau_{12}(x_2)$ тензора корреляций. Следует отметить, что для ламинарного течения $\tau_{12} \equiv 0$, что соответствует линейному профилю осредненной скорости (рис.1). Для замыкания системы требуется выразить τ_{22} , I_1 и I_2 через U_1 и τ_{12} . Слагаемое I_2 описывает процесс диффузии корреляции τ_{12} [2]. Для этого слагаемого воспользуемся выражением [3]:

$$I_2 = \frac{d}{dx_2} \left(\nu_T \frac{d\tau_{12}}{dx_2} \right), \quad (9)$$

где ν_T – турбулентная вязкость, в общем случае зависящая от x_2 . Слагаемое I_1 описывает релаксационные процессы, приводящие к затуханию τ_{12} . Простое модельное выражение для I_1 , пригодное как для больших, так и для малых чисел Рейнольдса [1], может быть записано в виде

$$I_2 = -\frac{\nu}{h^2} \alpha \tau_{12} - \frac{\tau_{22}}{\nu_T} \tau_{12}, \quad \alpha = \text{const} > 0. \quad (10)$$

Подставляя выражения (9) и (10) в уравнение (6), получим

$$-\frac{d}{dx_2} \left((\nu + \nu_T) \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \right) + \tau_{22} \left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \frac{1}{\nu_T} \tau_{12} \right) + \frac{\nu}{h^2} \alpha \tau_{12} = 0. \quad (11)$$

Для диагонального элемента τ_{22} мы примем приближение, которое является упрощенным вариантом модели Невзглядова-Драйдена [4,5]:

$$|\tau_{12}| \sim e |dU_1 / dx_2|. \quad (12)$$

Здесь e – плотность кинетической энергии пульсаций. Предполагая далее, что турбулентность приближенно является локально изотропной, положим $\tau_{22} \sim e$. В результате получаем связь элементов тензора корреляций, приняв коэффициент пропорциональности зависящим от числа Рейнольдса:

$$\tau_{22} = -\frac{c^2}{\varepsilon} \frac{U_\infty}{h} \left(\frac{dU_1}{dx_2} \right)^{-1} \tau_{12}, \quad c = \text{const} > 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} = \frac{\nu}{U_\infty h}. \quad (13)$$

Уравнения (5) и (11), описывающие стационарное течение в канале, удобно записать в безразмерных переменных. С этой целью введем

$$y = \frac{x_2}{h}, \quad U = \frac{U_1}{U_\infty}, \quad \tau = \frac{\tau_{12}}{U_\infty^2}, \quad \gamma = \frac{\nu_T}{U_\infty h}. \quad (14)$$

Используя соотношение (13), приведем уравнения (5) и (11) к виду (штрих означает производную по y)

$$(\tau - \varepsilon U')' = 0, \quad (15)$$

$$-\varepsilon((\varepsilon + \gamma)\tau') - c^2 \frac{\tau}{U'} \left(U' + \frac{\tau}{\gamma} \right) + \varepsilon^2 \alpha \tau = 0 \quad (16)$$

с граничными условиями

$$U(0) = \tau(0) = \tau(1) = 0, \quad U(1) = 1. \quad (17)$$

Полученная система должна описывать течение в сдвиговом слое, как в ламинарном, так и в турбулентном случае. Заметим, что уравнение (16) всегда будет иметь тривиальное решение $\tau \equiv 0$. Как показано в [2], для определенного класса уравнений существует второе нетривиальное решение при выполнении условия, накладываемого на параметр ε . В рассматриваемом случае должно существовать некоторое ε_{cr} такое, что при выполнении условия $\varepsilon < \varepsilon_{cr}$ уравнение (16) будет обладать единственным отличным от тривиального решением. Именно при наличии второго решения будем говорить, что режим течения является турбулентным.

Предположим, что число Рейнольдса велико (реализуется режим развитой турбулентности) и выполняется неравенство $\varepsilon = \text{Re}^{-1} \ll 1$. Тогда, пренебрегая в (16) первым и третьим членами, получим оценку $\tau \approx -\gamma U'$, или в размерных величинах

$$\tau_{12} = -\nu_T \frac{dU_1}{dx_2}. \quad (18)$$

Это соотношение называется "гипотезой Буссинеска" и часто используется в моделях развитой турбулентности [1], где $\nu_T \sim \gamma$ называется турбулентной вязкостью. Вообще говоря, величина γ должна зависеть от интенсивности турбулентности. В частности, эта величина должна стремиться к нулю вместе с τ по мере стремления числа Рейнольдса к критическому значению. Однако роль этих членов в области перехода к турбулентному режиму мала, поэтому для простоты будем считать их некоторыми заданными функциями y , например:

$$\gamma = \gamma_0 y, \quad y < 0.5h, \quad \gamma = \gamma_0(h - y), \quad y > 0.5h, \quad \gamma_0 = \text{const} > 0. \quad (19)$$

Такая простая зависимость отражает следующие свойства течения: симметрию решения уравнения (11) относительно середины сдвигового слоя, обращение γ в нуль на стенках и максимум в центре течения.

Уравнения (15)-(17), дополненные выражением для турбулентной вязкости (19) и модельными параметрами α , c , γ , полностью определяют модель сдвигового слоя. Рассмотрим некоторые результаты. На рис.2 изображены профили скорости, рассчитанной путем решения системы (15)-(17) (сплошная линия), и экспериментальных данных из [6] при двух значениях числа Рейнольдса. Значения постоянных параметров при этом были: $\alpha = 3.6 \cdot 10^7$, $c = 2$, $\gamma_0 = 1.85 \cdot 10^{-2}$. Переход к турбулентному режиму происходил при $\varepsilon_{cr} = 3.3 \cdot 10^{-4}$, что соответствует значению $Re_{cr} = 3000$ и совпадает с критическим числом из [6]. При $\varepsilon > \varepsilon_{cr}$ профиль осредненной скорости всегда остается линейным.

Стоит отметить, что выбранное выражение для турбулентной вязкости не дает выполнения закона стенки для турбулентного пограничного слоя. И для определения, например, скорости в ламинарном подслое или в буферной зоне следует пользоваться различными пристеночными функциями [7]. Для того чтобы закон стенки выполнялся автоматически, дополним линейное выражение для γ множителем D_{vd} [8]:

$$\gamma = \gamma_0 y D_{vd}, \quad D_{vd} = (1 - \exp(-y_+ / A))^2. \quad (20)$$

Параметр γ_0 , а также новый параметр $A > 0$ при этом остаются постоянными при конкретном режиме, но не остаются постоянными при различных ε . Для более точной постановки стоит дополнить (20) зависимостями γ_0 и A от различных характеристик, например, ε или δ^* – толщины вытеснения. На рис.3 изображены рассчитанные (сплошная линия) и экспериментальные профили скорости (точки) с учетом (20). Значения параметров для двух рас-

смаатриваемых случаев: $\gamma_0 = 6.6 \cdot 10^{-2}$, $A=20$ для $Re=5800$, $\gamma_0 = 2.3 \cdot 10^{-2}$, $A=36$ для $Re=36000$. Критическое число Рейнольдса и все остальные параметры остались неизменными. На рис.4 показан профиль скорости в турбулентных переменных y_+ , U_+ в логарифмическом масштабе при $Re = 50000$.

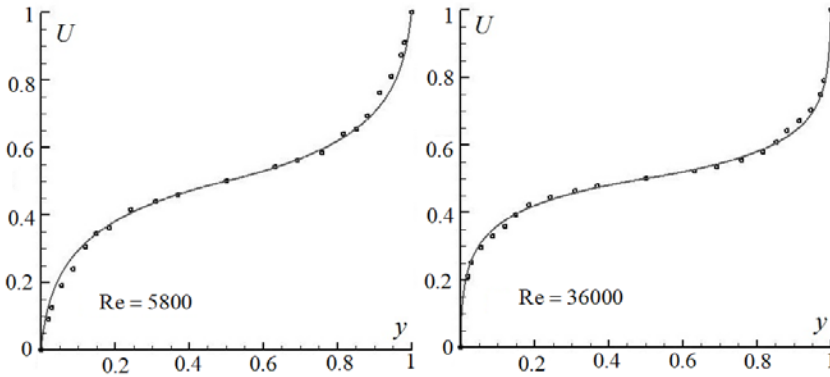


Рис.2. Экспериментальные и модельные профили осредненной скорости в сдвиговом слое при линейном законе для турбулентной вязкости.

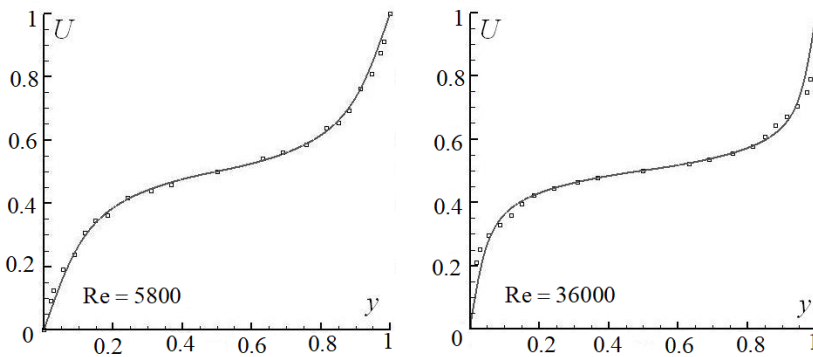


Рис.3. Профили осредненной скорости при зависимости (20) для турбулентной вязкости.

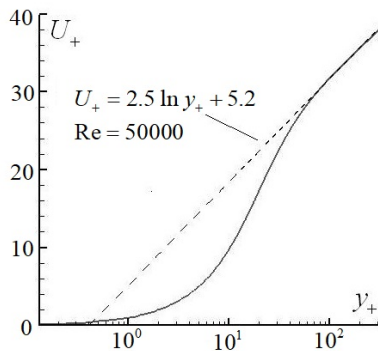


Рис.4. Профиль скорости в логарифмическом масштабе и закон стенки.

3. Турбулентное обтекание плоской пластины

Для моделирования течения вдоль плоской пластины будем пользоваться стандартной системой уравнений, описывающих вязкий теплопроводный идеальный газ. Система состоит из уравнения сохранения массы, импульса и энергии:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho U_1 \\ \rho U_1^2 + P \\ \rho U_1 U_2 \\ U_1(\rho E + p) \end{pmatrix}_{x_1} + \begin{pmatrix} \rho U_2 \\ \rho U_1 U_2 \\ \rho U_2^2 + P \\ U_2(\rho E + P) \end{pmatrix}_{x_2} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} \\ \Theta_1 \end{pmatrix}_{x_1} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{21} \\ \tau_{22} \\ \Theta_2 \end{pmatrix}_{x_2} = 0, \quad (21)$$

$$\Theta_i = U_1 \tau_{i1} + U_2 \tau_{i2} - q_i, \quad q_i = k \partial T / \partial x_i.$$

Здесь E – полная энергия единицы массы газа, P – давление, τ_{ij} – компоненты тензора вязких напряжений, k – коэффициент теплопроводности, T – температура. Как и в предыдущем случае, для описания турбулентного течения следует перейти к осредненным компонентам скорости и давлению. В результате этой процедуры в уравнениях Навье-Стокса возникают новые члены, называемые напряжениями Рейнольдса: $\rho \tau_{ij}^T \equiv \rho \langle u_i(t, x) u_j(t, x) \rangle$, где u_i – пульсация i -й компоненты скорости. Далее для краткости записи все компоненты скорости U_i и давление p считаем осредненными компонентами скорости и осредненным давлением, входящими в систему RANS [9].

В режиме развитой турбулентности разработано достаточное количество моделей, результаты которых хорошо согласуются с известными экспериментальными данными. В [8], например, представлена буссинескова алгебраическая модель турбулентного пограничного слоя на плоской пластине. К элементам тензора вязких напряжений добавляется напряжение Рейнольдса τ_{12} . Как было показано в предыдущем разделе, при больших числах Рейнольдса, уравнение (16) переходит в гипотезу Буссинеска (18) и наша бифуркационная модель должна переходить в буссинескову. По этой причине для рассматриваемой задачи ограничимся лишь напряжениями Рейнольдса τ_{12}^T и $\tau_{21}^T = \tau_{12}^T$. В итоге для осредненных величин система (21) примет вид

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho U_1 \\ \rho U_2 \\ \rho E \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \rho U_1 \\ \rho U_1^2 + p \\ \rho U_1 U_2 \\ U_1(\rho E + p) \end{pmatrix}_{x_1} + \begin{pmatrix} \rho U_2 \\ \rho U_1 U_2 \\ \rho U_2^2 + p \\ U_2(\rho E + p) \end{pmatrix}_{x_2} -$$

$$-\begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{11} \\ \tau_{12} - \rho\tau_{12}^T \\ \Theta_1 \end{pmatrix}_{x_1} - \begin{pmatrix} 0 \\ \tau_{21} - \rho\tau_{12}^T \\ \tau_{22} \\ \Theta_2 \end{pmatrix}_{x_2} = 0. \quad (22)$$

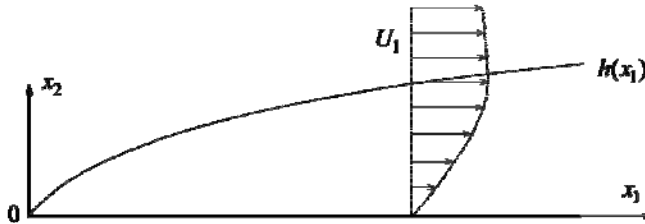


Рис.5. Пограничный слой на плоской пластине.

На рис.5 изображен пограничный слой на плоской пластине. В качестве критерия положения верхней границы h берется максимальное значение скорости при постоянной координате x_1 . Обычно рассматриваемое течение характеризуется числом Рейнольдса вдоль оси x_1 :

$$Re^x = x_1 U_\infty / \nu. \quad (23)$$

Здесь U_∞ – скорость набегающего потока, ν – кинематическая вязкость, которая в данном случае не является постоянной величиной, поскольку среда сжимаемая. По этой причине будем рассматривать плотность как некую осредненную по направлению x_2 величину

$$\bar{\rho}(x_1) = \frac{1}{h} \int_0^h \rho dx_2. \quad (24)$$

Помимо числа Рейнольдса Re^x введем дополнительное число Рейнольдса, которое и будет определять режим течения (ламинарный или турбулентный):

$$Re(x_1) = \frac{h(x_1) U_1(x_1, h)}{\nu(x_1)}. \quad (25)$$

Введенное число Рейнольдса также зависит от координаты x_1 , и его значение растет по движению вдоль пластины.

Для замыкания системы (22) следует ввести уравнения, связывающие напряжения Рейнольдса с другими переменными. Для этого рассмотрим уравнение (11), в которое не входит переменная x_1 в явном виде. Далее мы можем преобразовать его тем же образом, что и ранее, подставив зависимость (13) и перейдя к безразмерным переменным (14). Вместо скорости

U_∞ будем брать скорость на верхней границе погранслоя, то есть $U_1(x_1, h)$. Параметр $\varepsilon=1/Re$ определим как обратное число Рейнольдса (25). С учетом сказанного, мы опять приходим к уравнению (16) с граничными условиями (17), при этом для того, чтобы найти напряжения Рейнольдса во всей области, требуется решить семейство уравнений (16) с параметром x_1 , от которого и зависят функции $U'(y)$, $\gamma(y)$ и обратное число Рейнольдса ε .

Для численных расчетов введем прямоугольную сетку в прямоугольной области над пластиной. Количество решаемых уравнений (16) будет равно количеству ячеек вдоль оси x_1 . Опишем алгоритм перехода на новый временной слой $(n + 1)$.

На слое n известно распределение плотности, компонент осредненных скоростей, давления и полной энергии. Предположим, что размер сетки по оси x_1 равен N . Для каждого $i = \overline{1, N}$ (каждому i соответствует вертикальный слой ячеек от пластины до верхней границы рассматриваемой прямоугольной области) найдем:

- положение верхней границы погранслоя h_i из условия $U_1(h) = \max(U_1(x_{1i}))$;
- среднее значение для кинематической вязкости ν_i с помощью (24);
- значение обратного числа Рейнольдса ε с помощью (25);
- распределение турбулентной вязкости $\gamma_i(y)$ на каждом из отрезков $[0, 1]$ (выражение для нее будет приведено ниже);
- производная безразмерной компоненты скорости $U'_i(y)$ на каждом из отрезков $[0, 1]$.

Далее для каждого i требуется N раз решить уравнение (16) с граничными условиями (17). В результате описанной процедуры во всей области погранслоя мы нашли значения элемента τ_{12}^T тензора корреляций. Для перехода на новый временной слой можно воспользоваться стандартными схемами решения системы (21). Требуется лишь внести корректировки в тензор вязких напряжений. Здесь применяется (явный) метод конечных объемов первого порядка точности по времени и пространству. Для вычисления потоков консервативных переменных через грани используется стандартная схема Роу [10].

В качестве выражения для турбулентной вязкости возьмем предложенную в [8] зависимость (рис.6):

$$\nu_T = KU_* \min\{x_2 D, \delta^* \gamma_{hl}\}, \quad D = \left[1 - \exp\left(-\frac{x_2 U_*}{\nu A}\right) \right]^3,$$

$$\gamma_{hl} = \left[1 + 5.5 \left(\frac{x_2}{h} \right)^6 \right]^{-1}, \quad K = 0.41, \quad A = 12. \quad (26)$$

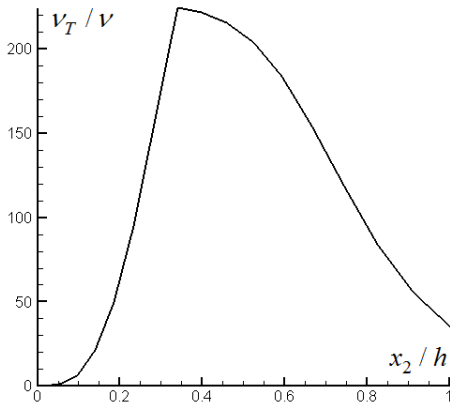


Рис.6. Турбулентная вязкость (26).

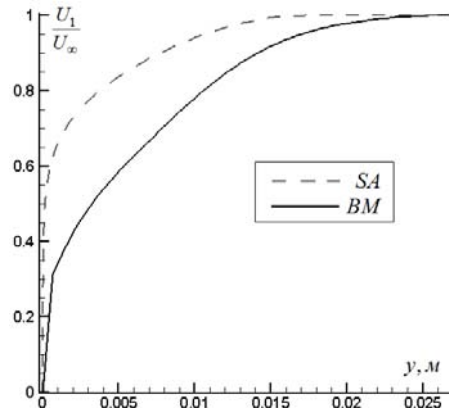


Рис.7. Тестовый (SA) и рассчитанный описанной бифуркационной моделью (BM) профили скорости турбулентного пограничного слоя на плоской пластине.

Здесь используются стандартные характеристики пограничного слоя на плоской пластине: U_* – скорость трения, δ^* – толщина вытеснения [11]. Они тоже требуют вычисления на каждом временном шаге для каждого $i = \overline{1, N}$.

Результаты расчета течения изложенным методом изображены ниже. На рис.7 изображены рассчитанный и тестовый [12] профили скорости при $x_1 = 1.17 \text{ м}$ (координата начала пластины $x_1 = 0.2$). Плоская пластина длиной $L = 1.0 \text{ м}$ обтекалась воздухом со следующими параметрами: $M = 0.2$, $\text{Re}^L = 5 \cdot 10^6$, $T = 300 \text{ К}$.

Видно, что профили скорости сильно отличаются и модель требует доработки. Тем не менее, следует отметить, что описанный алгоритм уже обладает некоторыми полезными свойствами. Критическое значение параметра ε_{cr} зависит в основном от постоянных параметров α и c . Меняя их, мы легко сдвигаем вдоль пластины точку перехода от ламинарного режима к турбулентному. Имеет место примерное соотношение критического числа Рейнольдса от этих параметров $\text{Re}_{cr} \approx \sqrt{\alpha/c}$, что сильно упрощает подбор модельных параметров. Для примера на рис.8 (сверху) изображено распределение компоненты скорости U_1 для ламинарного режима течения. Ниже изображено распределение напряжений Рейнольдса τ_{12}^T , получаемое решени-

ем уравнения (16) в соответствии с описанной выше процедурой. В результате область течения разделяется на ламинарную и турбулентную подобласти.

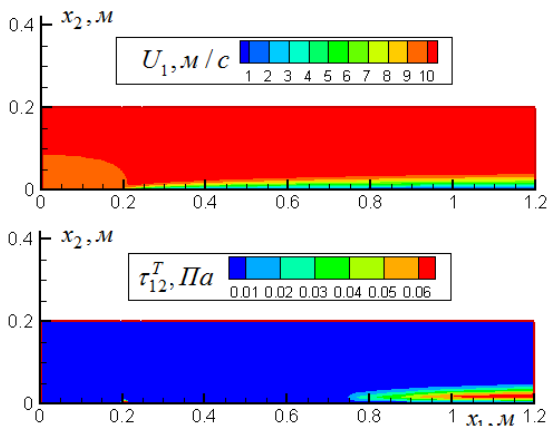


Рис.8. Поле ламинарной скорости при обтекании плоской пластины и соответствующее ему распределение напряжений Рейнольдса.

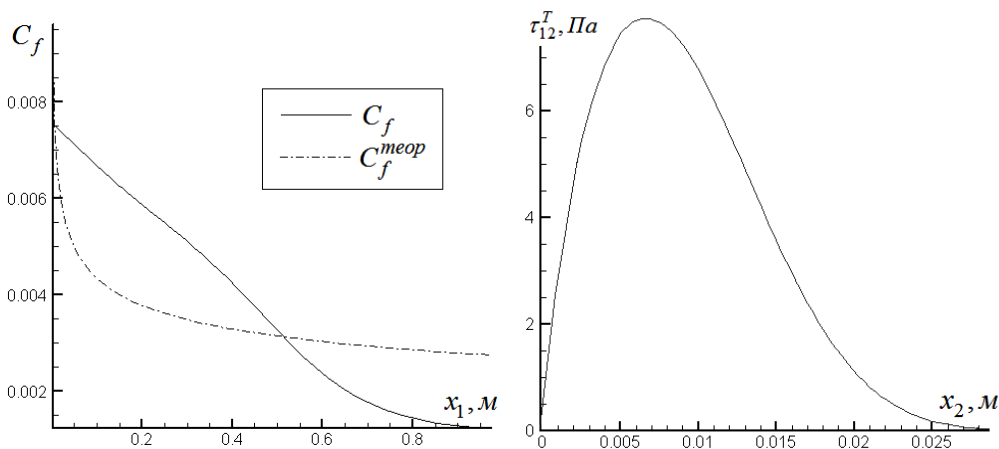


Рис.9. Коэффициент локального сопротивления пластины (слева) и распределение напряжения Рейнольдса (справа).

В зоне больших чисел Рейнольдса, как было показано в предыдущем разделе, уравнение (16) переходит в гипотезу Буссинеска. Поэтому результаты, получаемые с помощью бифуркационной модели, в режиме развитой турбулентности должны согласовываться с результатами, полученными на основе буссинесковских моделей, таких как [8]. Наконец, на рис.9 представлено сравнение локального коэффициента сопротивления с теоретической кривой, а также распределение напряжения Рейнольдса, соответствующее профилю скорости, изображенному на рис.7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Турбулентность. Принципы и применения (под ред. Фроста У. и Моулдена Т.). – М.: Мир, 1980;
Handbook of Turbulence. Volume 1. Fundamentals and applications (edited by Walter Frost and Trevor Moulden). – Plenum Press, 1977.
2. *Зубарев Д.Н., Морозов В.Г., Трошкин О.В.* Турбулентность как неравновесный фазовый переход // ТМФ, 1992, т.92, №2, с.293-311;
Zubarev D.N., Morozov V.G., Troshkin O.V. Turbulence as a nonequilibrium phase transition // Theoretical and Mathematical Physics, 1992, v.92, p.896-908.
3. *Hanjalic K., Launder B.E.* Fully developed asymmetric flow in a plane channel // J. Fluid Mech., 1972, v.16, p.1119-1130.
4. *Невзглыдов В.Г.* К феноменологической теории турбулентности // ДАН СССР, 1945, т.47, №3, с.169-173.
Nevezglyadov V.G. К феноменологической теории турбулентности // DAN SSSR. 1945, t.47, №3, s.169-173.
5. *Dryden H.L.* Recent advances in the mechanics of boundary layer flow // Advances in Applied Mechanics. – N.-Y.: Academic Press, 1948, v.1, p.1-40.
6. *Reichardt H.* Über die Geschwindigkeitsverteilung in einer geradlinigen Couetteströmung. Z. angew // Math. Mech., 1956, v.36, p.26-29.
7. *Мурзинов И.Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равновесно диссоциирующего воздуха // Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, №2, с.184-188;
Murzinov I.N. Laminarnyi pogranchnyi sloi na sfere v giperzvukovom potoke ravnovesno dissotsiiruiushchego vozdukha // Izv. AN SSSR. MZhG, 1966, №2, s.184-188.
8. *Кузьминов А.В., Латин В.Н., Черный С.Г.* Метод расчета турбулентных течений несжимаемой жидкости на основе двухслойной k-ε модели // Вычислительные технологии, 2001, т.6, №5, с.73-86.
Kuzminov A.V., Lapin V.N., Chernyi S.G. Metod rascheta turbulentnikh techenii neszhimaemoi zhidkosti na osnove dvukhsloinoi k-ε modeli // Vichislitelnie tekhnologii. 2001, t.6, №5, s.73-86.
9. *Латин Ю.В., Гарбарук А.В., Стрелец М.Х.* Алгебраические модели турбулентности для пристенных канонических течений // Научно-технич. ведомости, 2004, №5, с.23-36.
Lapin Y.V., Garbaruk A.V., Streletz M.H. Algebraicheskie modeli turbulentnosti dlia pristennykh kanonicheskikh techenii // Nauchno-tekhnich. vedomosti. 2004, №5, s.23-36.
10. *Reynolds O.* On the Dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion // Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A, 1894, v.186, p.123-164.
11. *Roe P.L.* Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes // J. Comp. Phys., 1981, v.43, p.357-372.
12. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – М.: Наука, 1974;
Schlichting G. Boundary layer theory. McGraw-Hill College, 1969.
13. Langley Research Center Turbulence Modeling Resource // [electronic resource]. – Access reference: http://turbmodels.larc.nasa.gov/flatplate_sa.html.

Поступила в редакцию 12.02.18

После доработки 12.02.18

Принята к публикации 12.03.18