

СРАВНЕНИЕ ТОЧНОСТИ СХЕМ ГАЛЕРКИНА С РАЗРЫВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧ С ВОЛНОЙ И С ВИХРЕМ

© 2019 г. *И.С. Босняков*

ФГУП «Центральный аэрогидродинамический институт» им. проф. Н.Е. Жуковского igor.bosnyakov@tsagi.ru

Работа выполнена в рамках Соглашения о предоставлении субсидии № 14.628.21.0007 с Министерством науки и высшего образования РФ, уникальный идентификатор проекта RFMEFI62817X0007.

DOI: 10.1134/S0234087919100022

В данной работе рассматриваются схемы Галеркина с разрывными функциями, построенные на базисах с полиномами Лежандра степени $K=0, \dots, 5$. Схемы, записанные для уравнения переноса, исследуются на амплитудную и дисперсионную ошибку. Определяется предельное соотношение шага расчётной сетки и волнового числа, при котором в задаче с гармоническим колебанием обеспечивается заданная точность решения. Проводятся расчёты акустической волны программой для полных уравнений Эйлера. Несмотря на отличие постановки, показана пригодность аналитических оценок для практического случая. Другая задача рассматривает плоское невязкое вихревое течение. Практическая оценка потребной густоты сетки для неё даётся на основе решения модельной задачи в вязкой постановке. Во всех рассмотренных задачах указывается связь шага сетки и порядка численной схемы. Результаты данной работы могут быть использованы при построении расчётных сеток для задач, рассчитываемых с помощью схем Галёркина.

Ключевые слова: разрывный метод Галёркина, уравнение переноса, уравнения Эйлера, акустическая волна, вихрь.

ACCURACY COMPARISON FOR DISCONTINUOUS GALERKIN SCHEMES IN THE CASE OF WAVE AND VORTEX

I.S. Bosnyakov

Zhukovsky Central Aerohydrodynamic Institute (TsAGI)

igor.bosnyakov@tsagi.ru

This study considers discontinuous Galerkin schemes with Legendre polynomial basis of degree $K=0, \dots, 5$. The scheme build for convection equation is studied in sense of ampli-

tude and dispersion error. The relation between wave number and cell size is determined to provide the desired solution accuracy in task with wave. The computations for acoustic wave are performed with the solver for full Euler equations. Despite different problem statement, the analytical estimates for the relation prove practical applicability. The other test considers inviscid vortex flow. The practical estimate of mesh density is based on the solution of model vortex flow with viscosity. The relation between scheme order and mesh density is pointed for all testcases. The results of this paper can be used in building meshes for tasks intended to be solved with discontinuous Galerkin approach.

Key words: discontinuous Galerkin method, convection equation, Euler equations, acoustic wave, vortex.

1. Введение

Метод Галеркина с разрывными функциями (РМГ) является одним из современных методов вычислительной аэродинамики. Его отличительной особенностью является возможность реализации схемы высокого порядка точности на компактном шаблоне, использующем саму ячейку и её непосредственных соседей.

Известно две волны исследований, направленных на индустриализацию этого подхода. Им были посвящены совместные с ЕС проекты IDHOM [1] и TILDA. В рамках первого проекта основным препятствием стала низкая робастность вычислительной схемы в задачах стационарного обтекания газом со скачками уплотнения. Второй проект рассматривал задачи для LES/DNS и был многообещающим, однако потребовал недоступные на момент исследования вычислительные мощности. По его результатам можно говорить о возможности дальнейшего развития РМГ. При этом основной вектор развития остаётся прежним: повышение точности расчётов при минимизации вычислительных и сопутствующих затрат.

При численном моделировании обычно приходится выяснять, насколько подробной следует взять расчётную сетку, чтобы получить решение с заданной точностью. В этой связи рассматривают задачу для гармонических колебаний. Исследуется амплитудная и дисперсионная ошибка, вносимая в решение численной схемой [2]. Для этого используется задача Коши с уравнением переноса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a = \text{const} > 0, \quad u(x, 0) = \exp(-ikx). \quad (1)$$

Здесь $u(x, t)$ – искомая функция, t соответствует времени, x формирует непрерывное множество $\Omega: x \in [a, b]$. На границах задаётся периодическое граничное условие. Точным решением данной задачи является функция $u = \exp(ik(x - at))$.

Если заменить пространственную производную разностной формулой, то на сетке с шагом h решение разностной задачи примет вид

$$u(x, t) = \exp(-d(kh)t) \exp(-ik(x - a^*t)).$$

Такое решение характеризуется коэффициентом затухания гармоник $d(kh)$ и «схемной» фазовой скоростью a^* . Точному аналитическому решению будет соответствовать случай с $d = 0$ и $a^* = a$. В противном случае можно говорить о накоплении фазовой или амплитудной ошибки за выбранное время $t = t_0$. Следовательно, можно попробовать найти соотношение kh , при котором обеспечивается заданная точность решения при t_0 .

Применение описанной техники усложняется, когда разностная формула записывается с помощью РМГ. Основное отличие лежит в записи разностной схемы через коэффициенты разложения при базисных функциях. Получение выражений для амплитудных и дисперсионных ошибок схемы РМГ, а также поиск оптимальных соотношений kh изложены в начале работы. Полученные оценки далее тестируются в расчёте с акустической волной в рамках полных уравнений Эйлера. Затем показывается пример решения задачи о плоском вихревом движении в невязкой сжимаемой жидкости. Для него также проводится определение параметров расчётной сетки, обеспечивающих заданную точность.

2. Оптимизация амплитудных ошибок

Для уравнения (1) записывается численная схема РМГ. Для этого область определения задачи разбивается на непересекающиеся ячейки Ω_l так, что $\Omega = \bigcup \Omega_l$. Функция u представляется в виде разложения по полиномиальному функциональному базису $\{\varphi_j\}$, состоящему из K_f функций с максимальной степенью полиномов K :

$$u = \sum_{j=1}^{K_f} u_j \varphi_j(\xi). \quad (2)$$

Базисные функции $\{\varphi_j\}$ определяются как нормированные полиномы Лежандра на отрезке $\Omega_{ref} : \xi \in [-1, 1]$. Пусть центр Ω_l соответствует x_l , тогда коэффициенты разложения u_j в Ω_l получаются из скалярного произведения как

$$u_j^l = \int_{\Omega_{ref}} u(x_l + \xi \cdot h/2) \varphi(\xi) d\xi. \quad (3)$$

Скалярная проекция исходного уравнения (1) на элементы полиномиального базиса приводит к появлению $K + 1$ уравнений для коэффициентов в каждой ячейке (подробно см. [3]):

$$\frac{h}{2a} \frac{\partial u_i}{\partial t} = \int_{\Omega_{ref}} u \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} d\xi + \hat{u} \varphi_i|_{\Omega_{ref}^-} - \hat{u} \varphi_i|_{\Omega_{ref}^+}, \quad (4)$$

где \hat{u} соответствует значениям функции u на границах ячейки, там где решение претерпевает разрыв. Для вычисления значения на границах здесь применяется противопоточная схема. В случае $a > 0$ это означает, что решение на грани берется из ячейки, прилегающей к ней слева:

$$\hat{u}^l = \sum_{j=0}^{K_f} u_j^l \cdot \varphi_j(1).$$

Решение задачи содержит в себе $\exp(ikx)$, и таким образом, в силу (2) устанавливается связь для коэффициентов разложения в соседних ячейках:

$$u_j^{l-1} = \exp(-ikh) \cdot u_j^l.$$

Подстановка этих выражений в (4) позволяет записать разностные формулы в матричном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_l}{\partial t} + aA(kh)\mathbf{u}_l = 0. \quad (5)$$

Здесь используется запись вектора коэффициентов разложения $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{K_f})^T$. Оператор $A(kh)$ является матрицей с элементами:

$$A_{ij} = \frac{2}{h} \left[- \int_{\Omega_{ref}} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \varphi_j d\xi - \exp(-ikh) \varphi_j(1) \varphi_i(-1) + \varphi_j(1) \varphi_i(1) \right].$$

Начальное условие из (1) записывается для коэффициентов разложения следующим образом:

$$u_j^l = e^{iklh} \cdot \alpha_j, \quad \alpha_j = \int_{\Omega_{ref}} \exp(ik\xi \cdot h/2) \varphi_j(\xi) d\xi, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6)$$

Решение задачи (5), (6) теперь можно записать через собственные зна-

чения $\lambda_m(kh)/h$ и векторы \mathbf{v}_m матрицы A . Пусть c_m являются коэффициентами разложения вектора \mathbf{a} по базису, состоящему из собственных векторов \mathbf{v}_m . Тогда

$$\mathbf{u}_l = \exp(iklh) \sum_{m=0}^{K_f} c_m \mathbf{v}_m \exp(a\lambda_m t / h), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (7)$$

Представление решения в виде функции $u(x, t)$, таким образом, будет определяться суммой вкладов от всех собственных мод, каждой из которых присуща своя амплитудная и дисперсионная ошибка.

$$u(x, t) = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \sum_{m=0}^{K_f} |c_m \mathbf{v}_m \cdot \boldsymbol{\varphi}| \exp(i\theta) \exp(-ad_m t) \exp(ik(lh - a_m t)), \quad (8)$$

$$\theta = \arg(c_m \mathbf{v}_m \cdot \boldsymbol{\varphi}).$$

Здесь $a_m = a \operatorname{Im} \lambda_m(kh)/kh$ формирует «схемную» фазовую скорость для каждой собственной моды \mathbf{v}_m . В свою очередь функция $d_m = \operatorname{Re} \lambda_m(kh)/h$ определяет амплитудную ошибку. Отличие фазовых скоростей каждой из собственных мод \mathbf{v}_m иллюстрируется функцией $r_m = a_m / a - 1$.

В качестве примера рассматривается схема, записанная для случая $K=2$. Базисные функции и соответствующая им матрица A показаны ниже в (9). Собственные числа и векторы матрицы A вычисляются с помощью средств Wolfram Mathematica. Некоторые итоговые выражения совпадают с выписанными в [4]. Графики функций r_m и d_m в зависимости от значения kh показываются на рис.1. Как видно из графиков, величина d_m для всех мод является неотрицательной, и это свидетельствует об устойчивости численной схемы. Для первой моды $m=1$ колебаний «схемная» фазовая скорость практически совпадает с точной (1) при определенных значениях kh .

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ \sqrt{1.5} \xi \\ \sqrt{5/8} (3\xi^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$A(kh) = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 1 - \exp(-ikh) & \sqrt{3}(1 - \exp(-ikh)) & \sqrt{5}(1 - \exp(-ikh)) \\ -\sqrt{3}(1 - \exp(-ikh)) & 3(1 + \exp(-ikh)) & \sqrt{15}(1 + \exp(-ikh)) \\ \sqrt{5}(1 - \exp(-ikh)) & -\sqrt{15}(1 + \exp(-ikh)) & 5(1 - \exp(-ikh)) \end{pmatrix}.$$

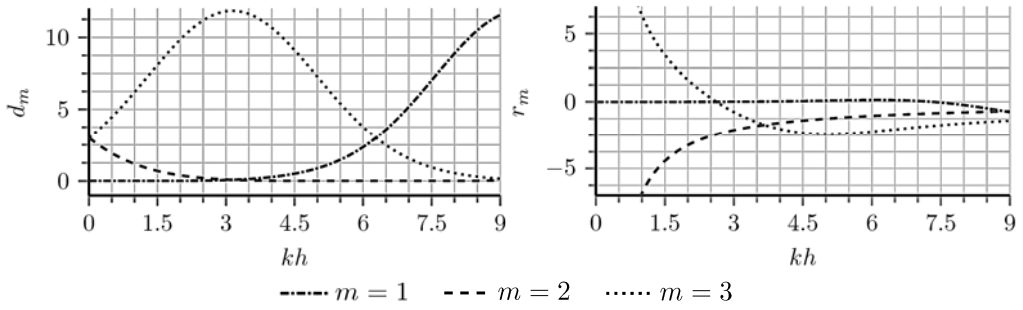


Рис.1. Графики функций (слева) диффузии d_m и (справа) дисперсии r_m (9).

Для второй и третьей моды колебаний свойственны сильная схемная «дисперсия» и большой коэффициент диссипации. Их вклад в решение определяется коэффициентами c_m , зависимость которых от kh демонстрируется на графиках рис.2. Как видно из этих графиков, до значения $kh \sim 1$ (ячейка равна примерно $1/6$ длины волны) в решении присутствует практически только мода $m=1$.

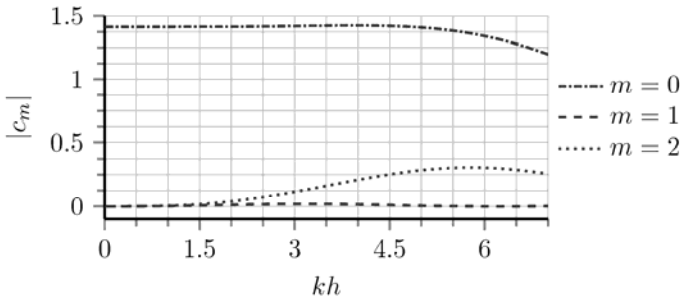


Рис.2. Графики амплитуд собственных мод схемы (5).

Аналогично, для других значений $K=0, \dots, 5$ основной вклад в численное решение определяется главной модой колебаний. Графики соответствующих функций r и d показываются ниже на рис.3. На графиках произведено масштабирование по осям. Вообще говоря, если брать, например, для графика $K=5$ значение по оси абсцисс, равное 1, то это будет соответствовать $kh=6$.

Аналогично [3], для выбранного k оценивается предельное значение шага сетки h , при котором амплитудная ошибка остаётся в заданном ограничении. В качестве примера допустим, что расчётная сетка является достаточно подробной и решение определяется только главной собственной модой оператора A . Амплитудная ошибка ε связывается с коэффициентом диффузии d как $\exp(-adt) > (1 - \varepsilon)$. В случае $a = 1.5, t_0 = 60, \varepsilon = 0.1$, получается, что $d < 0.0012$, для $a = 0.5$ $d < 0.0035$. Воспользовавшись графиками

для коэффициента диффузии рис.3, можно найти соответствующее предельное значение kh и шаг сетки h : см. табл.1. (в скобках указано число ячеек на длину волны, при условии $k = 2\pi$). Как видно из таблицы, при больших порядках схемы ($K > 3$) требуемое число ячеек сетки уменьшается мало. Таким образом, загроуление сеток при увеличении порядка схемы может терять смысл.

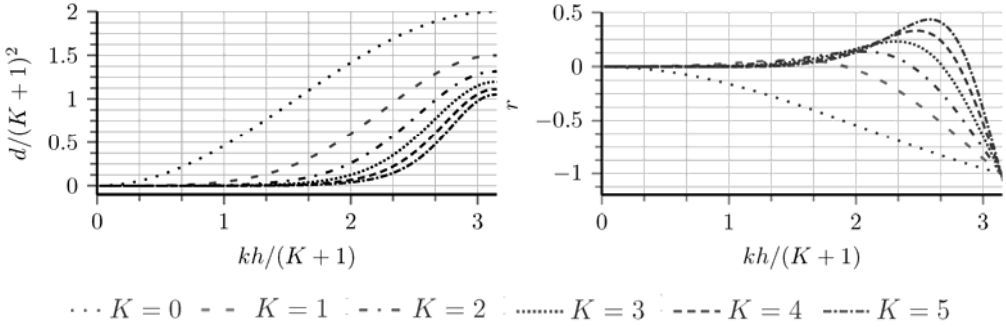


Рис.3. Графики функций (слева) диффузии d и (справа) дисперсии r для $K=1, \dots, 5$.

Таблица 1. Предельные значения kh

kh (1/h)	$K=0$	$K=1$	$K=2$	$K=3$	$K=4$	$K=5$
$a=0.5$	0.08 (79)	0.72 (9)	1.77 (3.5)	3.04(2.1)	4.45(1.4)	5.95(1.1)
$a=1.5$	0.05 (126)	0.54 (12)	1.46 (4.3)	2.62(2.4)	3.93(1.6)	5.35(1.2)

3. Акустическая волна

Ниже рассмотрен случай практической оптимизации амплитудных ошибок на примере расчёта акустической волны. Применяются схемы с разным максимальным порядком базисных полиномов: $K = 3, 4, 5$. Здесь проводится численный расчёт с помощью разработанной в ЦАГИ программы [5]. В отличие от предыдущего пункта, здесь рассматриваются полные (сжимаемые) уравнения Эйлера. Уравнения дискретизируются подходом РМГ со схемой Роу для конвективных потоков.

Описание теста воспроизводится по [6]. Рассматривается невязкий сжимаемый газ. Трубка длиной $L = 200$ лежит вдоль оси x от начала координат. Базовое аэродинамическое поле задаётся соотношениями

$$\begin{cases} p_a = 1/\gamma, & \rho_a = 1 \quad (c_a = \sqrt{\gamma p_a / \rho_a} = 1), \\ u_a = M_a = 0.5, & v_a = 0, \quad w_a = 0. \end{cases} \quad (10)$$

На левой границе расчётной области вводится синусоидальное возмущение малой амплитуды с длиной волны 1 ($k = 2\pi$). Возмущается только один

инвариант Римана, переносимый вдоль характеристики $dx/dt = u_a + c_a$. Общий вид решения при этом задаётся соотношениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} u + \frac{2c}{\gamma-1} = z_+(x, t) = \left(u_a + \frac{2c_a}{\gamma-1} \right) + \varepsilon \sin[2\pi(x - (u_a + c_a)t)], \\ u - \frac{2c}{\gamma-1} = z_-(x, t) = \left(u_a - \frac{2c_a}{\gamma-1} \right), \\ \frac{p}{\rho^\gamma} = z_0(x, t) = \frac{p_a}{\rho_a^\gamma}, \end{array} \right. \quad (11)$$

где $\varepsilon = 10^{-3}$ – амплитуда волны. Из указанных параметров находятся значения плотности, скорости и давления газа. Полученные по этим формулам поля дополнительно используются в качестве начального условия. Выражения (11) являются аналитическим решением задачи, поставленной для линеаризованных уравнений Эйлера. Однако точное решение задачи для полных уравнений имеет более сложный вид. Из-за отличия скоростей в разных точках бегущей волны, её профиль будет менять свою форму (см. [7]). Форма возмущения u' в бесконечной волне будет определяться соотношением (формула получена В. Жвикоком):

$$u'(x, t) = \frac{\varepsilon}{2} \sin \left[2\pi \left[x - \left(u_a + c_a + \frac{\gamma+1}{2} u'(x, t) \right) t \right] \right]. \quad (12)$$

Расчёты задачи проведены с помощью РМГ на базисах $K = 3, 4, 5$. Область определения задачи разбивается вдоль оси x равномерно. Используемый набор сеток является вложенным и даёт соотношения длины волны и шага сетки как $kh = \pi \cdot 2^r$, $r = -3, \dots, 3$.

Схема интегрирования по времени выбирается предварительно. Контрольный расчёт включал сравнение явной одношаговой схемы и пятишаговой схема Рунге-Кутта класса SSP [8]. Было определено, что схема высокого порядка работает быстрее, при этом сохраняет форму решения. Таким образом, в большинстве случаев используется именно эта схема. Расчёты проводятся до момента $t = 60$ и это обуславливает продвижение возмущения на расстояние $x = (u_a + c_a)t = 1.5 \cdot 60 = 90$ от границы расчетной области.

При достаточном разрешении сетки на участке правее $x = 90$ форма сигнала с большой точностью совпадает с (12): см. рис.4. Как видно из графиков, при соблюдении условия на соотношение kh , см. табл.1, амплитуд-

ная ошибка не превышает $\varepsilon = 0.1$ (пунктирная линия на графике). При приближении kh к нулю численное решение выходит на точное (см., например, график K4, $kh = \pi/2$).

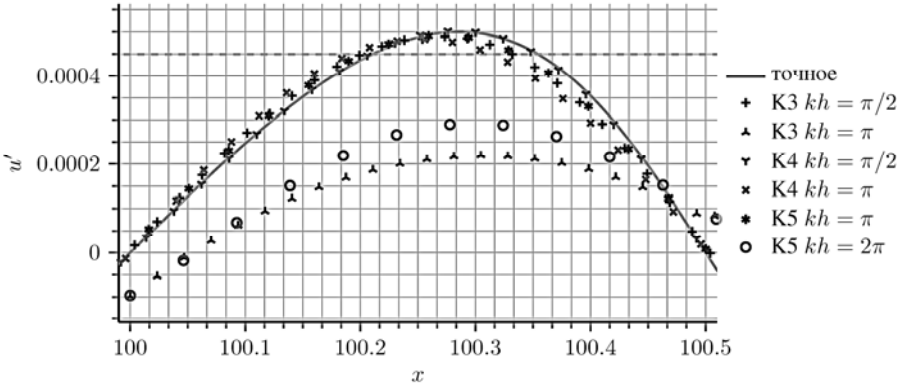


Рис.4. Форма пульсаций u' при $t = 60$.

4. Двумерное вихревое течение

В заключение рассматривается плоское осесимметричное течение с вихрем в вязком сжимаемом газе. Такое течение может сохраняться без изменений сколь угодно долго. Однако при расчёте на качество результатов влияют амплитудные и дисперсионные ошибки численной схемы. Здесь становится затруднительным применение методики для гармонического сигнала и предлагается альтернативный подход.

Для численного расчёта ставится нестационарная краевая задача. Решается полная система уравнений Эйлера для сжимаемого газа. Расчётная область представляется коробкой с сечением в виде квадрата со стороной 100 м и толщиной в одну ячейку. В качестве начального условия задаются распределения плотности, трёх компонент скорости и давления. Они соответствуют вихрю, расположенному в центре расчётной области:

$$v_{\tau} = \frac{\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{r}{r^2 + r_c^2}, \quad p = \left[p_{\infty}^{(\kappa-1)/\kappa} - \frac{\kappa-1}{\kappa} \frac{\rho_{\infty}}{\rho_{\infty}^{1/\kappa}} \frac{\Gamma^2}{8\pi^2} \frac{1}{r^2 + r_c^2} \right]^{\kappa/(\kappa-1)}, \quad (13)$$

$$\rho = \rho_{\infty} (p/p_{\infty})^{1/\kappa},$$

где $\Gamma = 300 \text{ м}^2/\text{с}$, $r_c = 2 \text{ м}$. (Параметры вихря соответствуют следу за среднемагистральным пассажирским самолётом.) График этой зависимости проиллюстрирован на рисунке 5 сплошной кривой.

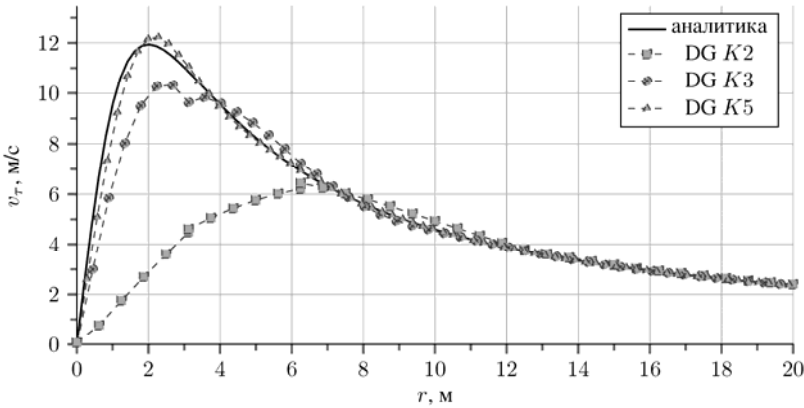


Рис.5. Зависимость окружной скорости в вихре от расстояния до центра вихря: по формуле (13) и в расчётах при $t=100$ с на сетке с 32 ячейками на сторону.

Расчёты проводятся на системе вложенных сеток с разбиением от 16×16 до 512×512 методом Галеркина с полиномами степени $K = 1, \dots, 5$. Нестационарный расчёт ведётся до $t = 100$ с. Примеры распределений окружной скорости в вихре для разных K на сетке 32×32 также показываются на рис.5. Здесь получается, что ячейка сетки соответствует полутора радиусам ядра вихря. Решение с $K = 2$ демонстрирует увеличение радиуса ядра и уменьшение максимума окружной скорости. Решение с $K = 5$ даёт распределение, очень близкое к аналитическому, при этом наблюдается незначительное, порядка 1%, завышение максимума скорости. Получается что при $K=5$ структура течения воспроизводится на сетках с шагом, большим характерного размера течения ($h > r_c$).

Течения в расчётах получаются близкими к осесимметричным, кроме случаев очень грубых сеток. Поэтому для оценки амплитудной ошибки используется отнесенное значение максимума окружной скорости в вихре:

$$\varepsilon = \left| 1 - v_{tmax}(t) / v_{tmax}(0) \right|. \quad (14)$$

Профиль скорости (13) является точным решением поставленной задачи в любой момент времени. Течение с этим распределением является устойчивым к радиальным возмущениям по критерию Релея, таким образом, ошибки округления не должны приводить к росту физической неустойчивости. Максимальная окружная скорость в ядре вихря составляет $v_{tmax}(0) \approx 11.937$ м/с и используется в (14) при подсчёте погрешности ε .

Все полученные результаты расчетов, таким образом, можно изобразить в виде графиков зависимости ошибки ε от числа степеней свободы N_{DOF} : рис.6.

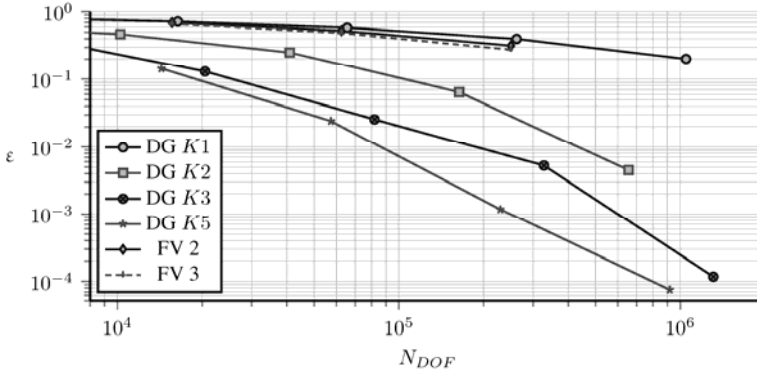


Рис.6. Зависимость ошибки ε от числа степеней свободы N_{DOF} .

Степени свободы вводятся из-за разного числа уравнений, решаемых в одной ячейке с помощью разных РМГ и позволяют корректно проводить оценки вычислительных затрат. Здесь N_{DOF} определяется как произведение числа ячеек на число базисных функций $K_{FDG} = (K + 1)(K + 2)(K + 3) / 6$ (формально проведены трехмерные расчёты). Дополнительно на графиках приводятся результаты, полученные с помощью коммерческого конечно-объёмного кода с аппроксимацией конвективных потоков схемами второго и третьего порядков. Для него число степеней свободы приравнивается числу ячеек. Как видно из представленных графиков, величина ε падает с ростом числа степеней свободы.

Логично ставится вопрос, какой уровень ε можно считать приемлемым. Для ответа на него привлекается решение модельной задачи: одномерной осесимметричной задачи с вихрем (13) для вязких несжимаемых уравнений Навье-Стокса. В ней меняется молекулярная вязкость и вследствие уменьшения максимальной скорости получается оценка для ε : см. табл.2.

Таблица 2. Оценка потребной величины ε на основе решения вязкой задачи.

$\nu, \text{ м}^2/\text{с}$	0.0100	0.0050	0.0010	0.0005	0.0001	0.00001
ε	0.2687	0.1715	0.0458	0.0240	0.0048	0.0005

Данная оценка применяется следующим образом. Если расчёт рассматривает течение с молекулярной вязкостью $10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, то амплитудная ошибка схемы не должна превышать $\varepsilon = 0.0005$. В противном случае «схемная вязкость» будет превалировать над молекулярной. Отсюда следует рекомендация на шаг расчётной сетки.

Из графиков рис.6 видно, что значение $\varepsilon = 0.0005$ получается для $K = 5$ при $N_{DOF} = 3.5 \times 10^5$, что соответствует $r_c/h \approx 1.6$. Для $K = 3$ требуемая точность достигается при $N_{DOF} = 8 \times 10^5$ или $r_c/h = 4$. Оценка для $K = 1$, получен-

ная экстраполяцией, даёт значение $N_{DOF} = 2 \times 10^7$ и $r_c/h \approx 45$. В итоге повторяется ситуация, когда для обеспечения одинаковой точности решения размер сеток на высоких порядках схемы отличается между собой меньше, чем при низких порядках. Т.е. для проведения расчётов схемами РМГ высокого порядка точности можно использовать практически одни и те же расчётные сетки, в то время как для схем 2-го и 3-го порядка их нужно сильно мельчить.

5. Заключение

В работе получены графики коэффициента диффузии и функции дисперсии для схемы РМГ, записанной для одномерного уравнения переноса. На основе этих графиков произведена оптимизация амплитудной ошибки для задач с гармоническими колебаниями и получены предельные соотношения длины волны и шага сетки kh , на которых достигается заданная точность решения.

Практическое испытание на задаче с акустической волной и полными уравнениями Эйлера показало пригодность аналитических оценок размеров потребных расчётных сеток. Так, для обеспечения точности амплитуды колебаний в 10% для схемы с $K = 5$ шаг сетки примерно равен полной длине волны, в то время как для $K = 3$ требуется не менее 3 ячеек сетки на полную длину волны.

В заключительной части рассмотрено невязкое двумерное вихревое течение. Здесь введен практический критерий точности, основанный на решении модельной вязкой задачи. Амплитудная ошибка численной схемы не должна превышать действия вязкости в модельной задаче. На основе этого критерия и проведенных расчётов показано, что для проведения достоверных расчётов вихревых следов за самолётами требуется следующая густота сеток: для $K = 1$: 45 ячеек на ядро вихря, $K = 3$: 4 ячейки, $K = 5$: 1.6 ячейки.

Во всех случаях при повышении порядка схемы требуется меньшая расчётная сетка. Однако переход от $K = 1$ к $K = 3$ приводит к уменьшению шага сетки более чем на порядок. В то же время переход от $K = 3$ к $K = 4$ и $K = 5$ уменьшает размер сетки незначительно. Таким образом, на практике для больших $K > 3$ можно использовать одни и те же расчётные сетки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Industrialization of High-Order Methods-A Top-Down Approach: Results of a Collaborative Research Project Funded by the European Union 2010-2014 / Ed. N. Kroll, C. Hirsch, F. Bassi, C. Johnston, K. Hillewaert // Springer, 2015

2. *М.В. Липавский, А.Д. Савельев, А.И. Толстых, Д.А. Широбоков.* Мультиоператорные схемы до 18-го порядка точности с приложениями к задачам неустойчивости и акустики струй // Ученые записки ЦАГИ, 2012, т.43, № 3.
англ. пер. *M.V. Lipavskii, A.D. Savel'ev, A.I. Tolstykh, D.A. Shirobokov* Multioperator schemes up to the 18th order of accuracy with applications to problems of instability and jet acoustics // TsAGI Science Journal, 2012, v.43, № 3.
3. *R.C. Moura, S.J. Sherwin, J. Peiró.* Linear dispersion-diffusion analysis and its application to under-resolved turbulence simulations using discontinuous Galerkin spectral/hp methods // J. Comput. Phys., 2015, v.298, p.659-710.
4. *S.J. Sherwin.* Dispersion analysis of the continuous and discontinuous Galerkin formulations // Discontinuous Galerkin Methods. - Springer, Berlin, Heidelberg, 2000, p.425-431.
5. *С.М. Босняков, С.В. Михайлов, В.Ю. Подаруев, А.И. Трошин.* Нестационарный разрывный метод Галеркина высокого порядка точности для моделирования турбулентных течений // Матем. моделирование, 2018, т.30, №5, с.37–56;
англ. пер.: *S.M. Bosnyakov, S.V. Mikhaylov V.Yu. Podaruev, A.I. Troshin.* Unsteady Discontinuous Galerkin Method of a High Order of Accuracy for Modeling Turbulent Flows// Mathematical Models and Computer Simulations , 2019, v.11, №1, p.22–34.
6. *С.В. Михайлов, А.Н. Морозов, В.Ю. Подаруев, А.В. Волков, В.В. Власенко.* Верификация численной схемы разрывного метода Галеркина применительно к линеаризованным уравнениям Эйлера // Результаты фундаментальных исследований в прикладных задачах авиастроения. – М.: 2016, с.228-239;
S.V. Mihaylov, A.N. Morozov, V.Yu. Podaruev, A.V. Wolkov, V.V. Vlasenko. Verifikatsiia chislennoi skhemy razryvnogo metoda Galerkina primenitelno k linearizovannym uravneniiam Eulera // Rezultaty fundamentalnykh issledovaniy v prikladnykh zadachakh avias-troeniia. – М.: 2016, s.228-239.
7. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1988;
англ. пер. *L.D. Landau, E.M. Lifshitz.* Fluid Mechanics. V. 6 (2nd ed.) Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-08-033933-7.
8. *B. Cockburn, C.-W. Shu.* The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V // J. Comput. Phys, 1998, v.141, №2, p.199-224.

Поступила в редакцию 04.03.2019

После доработки 04.03.2019

Принята к публикации 08.04.2019