

ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ СКОРОСТИ НА ОСНОВЕ РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА

© 2019 г. *А.В. Александров, Л.В. Дородницын*, А.П. Дубень*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

* Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

anatoly.v.alexandrov@gmail.com, dorodn@cs.msu.su, alexey.duben@gmail.com

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 18-01-00726-А РФФИ.

DOI: 10.1134/S0234087919100046

В работе исследуется стохастический метод генерации искусственных трехмерных, бездивергентных, однородных и изотропных полей скорости, основанный на рандомизированном спектральном методе. Анализируются статистические и спектральные свойства турбулентных полей, построенных с помощью данного генератора. Валидационный LES расчет, использующий полученные турбулентные поля в качестве начальных условий, демонстрирует хорошее совпадение результатов с экспериментальными данными.

Ключевые слова: синтетическая турбулентность, рандомизированный спектральный метод, однородная изотропная турбулентность.

GENERATION OF THREE-DIMENSIONAL HOMOGENEOUS ISOTROPIC TURBULENT VELOCITY FIELDS BASED ON THE RANDOMIZED SPECTRAL METHOD

A.V. Alexandrov, L.W. Dorodnicyn, A.P. Duben*

Keldysh Institute for Applied Mathematics RAS, Moscow

* Lomonosov Moscow State University

In this study, a stochastic method for generation of artificial three-dimensional, divergence-free, homogeneous and isotropic velocity fields is examined. The technique is based on the Randomized Spectral Method. The turbulent fields constructed by this generator are analyzed in the view of statistical and spectral properties. A LES-based computation which imposes the obtained turbulent fields as initial conditions is used for validation and exhibits a good agreement with the experimental data.

Key words: synthetic turbulence, randomized spectral method, homogeneous isotropic turbulence.

1. Введение

В настоящее время для проведения численного моделирования турбулентных течений с высокими числами Рейнольдса всё чаще и чаще используются искусственно сгенерированные турбулентные поля, обладающие заданными статистическими и физическими характеристиками. Данное направление начато в 1970 году Крайчнаном [1]. Высокая вычислительная стоимость DNS и LES расчетов существенно ограничивает их применение для расчета турбулентных течений возле сложных конфигураций в полной постановке. Это стимулирует использование синтетических турбулентных полей в качестве граничных условий для упрощенных конфигураций, включающих лишь чувствительные области потока, где необходима высокая точность, свойственная вихреразрешающим методикам. Такой подход весьма актуален, например, в задачах аэроакустики [2–6]. Синтетически сгенерированные турбулентные поля могут использоваться также в качестве начальных условий для верификации и валидации RANS/LES кодов [7], когда экспериментально известны свойства турбулентного течения на последующие моменты времени. В последнее время повышенное внимание уделяется применению искусственно сгенерированных турбулентных полей в качестве входных нестационарных граничных условий при расчетах турбулентных течений гибридными RANS/LES подходами [8–10].

Простейшим способом задания случайного турбулентного поля в качестве входных граничных условий для области LES является использование «белого шума» [11]. Однако на практике это приводит к быстрому затуханию сгенерированных пульсаций вниз по потоку.

В настоящий момент принято считать [10], что синтетическое турбулентное поле на входной границе LES должно обладать следующим рядом свойств, которые известны о реальном физическом турбулентном поле.

Должна выполняться бездивергентность турбулентных пульсаций скорости – как в несжимаемой жидкости, так и в газе при дозвуковом режиме обтекания.

Требуется совпадение статистических характеристик: одноточечных моментов 1-го, 2-го и 3-го порядков, двухточечных корреляций второго порядка.

Должен воспроизводиться энергетический спектр турбулентности.

Нежелательно появление паразитных артефактов: нефизических акустических волн или ложной периодичности хаотических полей.

Наконец, для практического использования важны простота и невысокая вычислительная стоимость алгоритма, так как метод должен позволять

генерировать нестационарные реализации турбулентного поля “на лету” во время LES расчета.

В настоящей работе рассматриваются спектральные методы построения однородного изотропного синтетического турбулентного поля скорости. Изотропия и однородность понимаются здесь в смысле инвариантности статистических характеристик относительно поворота и переноса соответственно.

Идея построения однородного изотропного синтетического турбулентного поля скорости на основе спектрального представления впервые встречается в [1]. Автор предложил представить пульсации скорости в точке в виде суммы фурье-гармоник. Метод обеспечивал бездивергентность и изотропию поля. Оставшиеся свободные параметры Крайчнан предлагал определять стохастически, на основе модельного энергетического спектра. В дальнейшем этот подход получил развитие в целом ряде работ [3, 7–9].

Карвейт и др. [2] использовали комплексные моды с фиксированными волновыми числами, задавая амплитуды в соответствии с энергетическим спектром фон-Кармана Пао. В работе исследовалась, среди прочего, проблема низких волновых чисел, отвечающих энергонесущим масштабам турбулентности. Авторы предпочли располагать волновые числа с равным шагом по логарифмической шкале, отказавшись от стохастического выбора параметров, в силу небольшого числа используемых мод.

Необходимо заметить, что стохастический выбор параметров метода лучше соответствует природе турбулентности. Детерминированное задание параметров может привести, в частности, к возникновению нефизической периодичности и других паразитных артефактов. Тем не менее, в дальнейшем именно подход с детерминированным выбором волновых чисел и/или амплитуд мод оказался наиболее распространенным [3, 7, 9, 12].

Одновременно с детерминистическими методиками развивался подход с полностью стохастическим выбором параметров, основанный на рандомизированном спектральном методе (PCM), предложенном в работах [13–15]. Для задач аэроакустики в [5, 6] был исследован метод генерации синтетического двумерного гауссова изотропного турбулентного поля. Достоинством метода являлось хорошее воспроизведение заданных спектральных и корреляционных характеристик турбулентности сгенерированными полями.

В настоящей работе данный стохастический спектральный метод практически реализован в трехмерном случае. Свойства турбулентных полей, сгенерированных с помощью предложенного метода, исследуются численно. Анализируются статистические свойства, необходимые для использова-

ния таких полей в качестве граничных условий. На основе полей скорости, полученных с помощью предложенного генератора, численно решалась задача о затухании однородной изотропной турбулентности в кубе. Результаты сравнивались с экспериментальными данными [16], которые широко используются для валидации подобных моделей.

2. Описание метода

Рассмотрим формальное разложение поля скоростей на фоновую и пульсационную составляющие:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}'(\mathbf{x}).$$

Будем считать, что из расчета RANS известно осредненное поле скоростей $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, а также средние характеристики турбулентности, прежде всего кинетическая энергия турбулентности σ^2 и скорость ее диссипации ε . Помимо этого предположим, что нам известен энергетический спектр турбулентности $E(k)$ такой, что

$$\int_{k_{\min}}^{k_{\max}} E(k) dk = \sigma^2, \quad 2\nu \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} k^2 E(k) dk = \varepsilon, \quad (1)$$

где k_{\max} и k_{\min} – максимальное и минимальное разрешимые волновые числа.

Поле турбулентных пульсаций скорости $\mathbf{u}'(\mathbf{x})$ реализуется в виде суммы гармоник, в случае трехмерной однородной изотропной турбулентности имеющей вид

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \frac{3\sigma}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}^n(\mathbf{x}). \quad (2)$$

Каждая гармоника представляется формулой

$$\mathbf{u}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) \left[\boldsymbol{\xi}^n \sin(k_n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k_n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) \right], \quad (3)$$

где $k_n, \boldsymbol{\omega}^n, \boldsymbol{\xi}^n, \boldsymbol{\eta}^n$ – случайные числа и векторы. Матрица $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})$ размерности 3×3 с элементами $q_{jl} = \delta_{jl} - \omega_j \omega_l$, где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – единичный вектор, равномерно распределенный по сфере, обеспечивает бездивергентность поля скорости $\text{div } \mathbf{u}^n = 0$. Два независимых случайных трехмерных вектора $\boldsymbol{\xi}^n$ и $\boldsymbol{\eta}^n$ имеют стандартное гауссовское распределение $N(0,1)$. Волновые числа $k = k_n \in [k_{\min}, k_{\max}]$ составляют набор независимых случайных вели-

чин, распределенных с плотностью вероятности, определяемой энергетическим спектром: $\rho(k) = E(k)/\sigma^2$.

В качестве $E(k)$ можно выбрать, например, модифицированный спектр Кармана-Пао из [9], задаваемый формулой

$$E(k) = A \frac{(k/k_e)^4}{(1 + (k/k_e)^2)^{17/6}} f_\eta f_{\text{cut}},$$

где $f_\eta(k)$ и $f_{\text{cut}}(k)$ – эмпирические функции, отвечающие за стремление к нулю $E(k)$ с приближением к колмогоровскому масштабу и минимально разрешимому на сетке масштабу, отвечающему k_{max} , соответственно. Так, функция $f_\eta(k)$ имеет вид [16]

$$f_\eta(k) = \exp\left\{-\left(12k/k_\eta\right)^2\right\},$$

где $k_\eta = 2\pi\varepsilon^{1/4}v^{-3/4}$. Параметры A и k_e могут определяться по заданным σ^2 и ε согласно формуле (1), по примеру [5]. В настоящей работе рассматривался спектр Кармана-Пао с $f_{\text{cut}} \equiv 1$. Кроме того, в валидационных расчетах использовался табличный, известный из эксперимента [16], спектр.

В описанном методе построения турбулентного поля, в отличие от большинства спектральных методов [2–4, 8, 9], волновые числа и амплитуды гармоник задаются стохастически. Наиболее близкий метод [12] привязан к гауссову распределению волнового вектора и не позволяет строить поле по определенному энергетическому спектру.

Хотя зависимость от времени в данной работе не рассматривалась, она может быть добавлена так, как это делалось в [5] для двумерного варианта генератора турбулентных полей скорости, основанного на рандомизированном спектральном методе.

Поле, генерируемое предложенным методом РСМ, требует большого количества гармоник для корректного воспроизведения энергетического спектра $E(k)$, поскольку точность стохастических методов теоретически не превышает $O(N^{-1/2})$. Трудоемкость метода можно снизить, используя декомпозицию интервала волновых чисел $[k_{\text{min}}, k_{\text{max}}]$ на энергетически равные интервалы. При этом в каждом интервале происходит независимый выбор волновых чисел. Как указано в [6], при разделении спектра на части моделирование спектра и разыгрывание случайных чисел становится менее трудоемкой задачей благодаря тому, что каждое случайное число с большей вероятностью попадет в область, принадлежащую спектру, за счет того, что

набор случайных выборок будет более равномерно представлять все участки спектра. Это позволяет повысить точность алгоритма при заданной вычислительной стоимости.

В связи с этим, наряду с описанным выше, авторами рассматривался метод с разбиениями, в котором интервал волновых чисел $[k_{\min}, k_{\max}]$ делится на подинтервалы $I_n = [k_{n-1}, k_n]$ с равной энергией. В каждом интервале I_n случайным образом выбиралось одинаковое количество волновых чисел. Таким образом, поле турбулентных скоростей записывается, вместо (2), в виде двойной суммы

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}) = \frac{3\sigma}{\sqrt{2N}} \sum_{n=1}^{N_G} \sum_{m=1}^M \mathbf{u}^{nm}(\mathbf{x}), \quad N = MN_G. \quad (4)$$

Отдельная гармоника строится так же, как в (3)

$$\mathbf{u}^{nm}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^{nm}) \left[\boldsymbol{\xi}^{nm} \sin(k_{nm}(\boldsymbol{\omega}^{nm} \cdot \mathbf{x})) + \boldsymbol{\eta}^{nm} \cos(k_{nm}(\boldsymbol{\omega}^{nm} \cdot \mathbf{x})) \right], \quad (5)$$

с единственной разницей, что волновые числа из каждой группы случайно распределены внутри своего интервала ($k = k_{nm} \in I_n$) с локальной плотностью вероятности, соответствующей $E(k)$.

3. Анализ численных реализаций трехмерного турбулентного поля скорости

Свойства описанного РСМ-генератора исследовались на примере искусственно сгенерированного однородного изотропного турбулентного поля в кубе с безразмерной стороной 2π , на сетках 32^3 и 64^3 узлов. Для розыгрыша случайных величин применялся метод исключения Неймана; нормально распределённые величины моделировались по схеме Бокса-Мюллера.

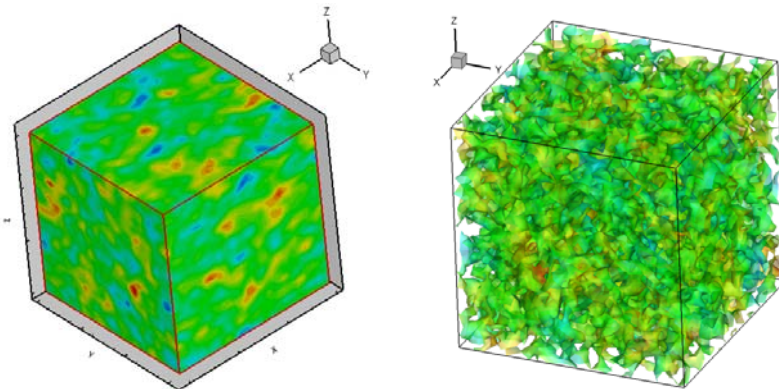


Рис.1. Сгенерированное поле скорости (слева) и Q-критерий (справа).

Пример реализации поля скорости и поверхность уровня соответствующего Q-критерия показаны на рис.1 для РСМ (2),(3) на сетке 32^3 . На рисунке поля скорости видно наличие разномасштабных турбулентных структур, которые обычно отсутствуют в полях, полученных с помощью наиболее близкого метода [12]. Приведенный Q-критерий визуально соответствует режиму развитой изотропной турбулентности.

3.1. Статистические моменты. Свойства турбулентного поля скоростей характеризуются его одно- и двухточечными статистическими моментами. Для оценки моментов вычислялось множество реализаций турбулентного поля, строившегося на основе простого РСМ (2),(3) либо модифицированного РСМ (4),(5): $\mathbf{u}' = \mathbf{u}^{(s)}$. Затем для искомой величины $\varphi(\mathbf{x})$ проводилось осреднение по классической формуле

$$\langle \varphi(\mathbf{x}) \rangle_{N_s} = \frac{1}{N_s} \sum_{s=1}^{N_s} \varphi^{(s)}(\mathbf{x}).$$

В [17] авторами исследовались одноточечные моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков. Показана сходимость средних значений трех компонент скорости $\langle u_x \rangle, \langle u_y \rangle, \langle u_z \rangle$, их квадратов $\langle u_x^2 \rangle, \langle u_y^2 \rangle, \langle u_z^2 \rangle$ и кубов $\langle u_x^3 \rangle, \langle u_y^3 \rangle, \langle u_z^3 \rangle$ по числу реализаций к их теоретическим значениям, определяемым соотношениями:

$$\langle u_j \rangle = 0, \quad \langle u_j u_l \rangle = \frac{2}{3} \sigma^2 \delta_{jl}, \quad \langle u_i u_j u_l \rangle = 0.$$

Ключевую роль в описании свойств турбулентности играет тензор двухточечных корреляций скоростей, составленный из моментов второго порядка. В изотропном случае компоненты тензора полностью определяются продольной и поперечной корреляционными функциями Кармана-Ховарта [18], в декартовых координатах задаваемыми, соответственно, как

$$f(r) = \frac{\langle u_x(r, 0, 0) u_x(0, 0, 0) \rangle}{\langle u_x^2(0, 0, 0) \rangle} \quad \text{и} \quad g(r) = \frac{\langle u_y(r, 0, 0) u_y(0, 0, 0) \rangle}{\langle u_y^2(0, 0, 0) \rangle}.$$

На рис.2 приведены зависимости этих величин от номера узла (расстояния r) для 5000 реализаций поля, полученных простым РСМ (2),(3). Расчетные данные сравниваются с теоретическими формулами: в трехмерном случае изотропной турбулентности продольная и поперечная корреляционные функции имеют вид

$$f(r) = \frac{3}{2\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{2}{k^3 r^3} E(k) [\sin(kr) - kr \cos(kr)] dk,$$

$$g(r) = \frac{3}{2\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{k^3 r^3} E(k) [(k^2 r^2 - 1) \sin(kr) + kr \cos(kr)] dk.$$

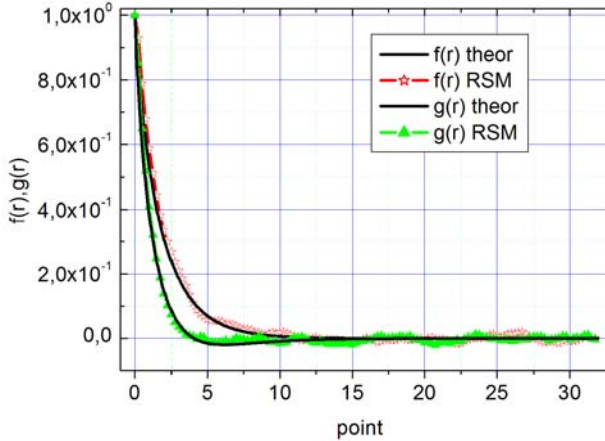


Рис.2. Продольная и поперечная корреляционные функции Кармана-Ховарта.

Корреляции – как теоретические, так и расчетные – по определению обращаются в единицу при $r = 0$. Далее наблюдается хорошее воспроизведение формы пиков, обеспечивающее совпадение тейлоровских масштабов турбулентности, обеих функций вблизи нуля и незначительные случайные отклонения расчетных функций от теоретических с ростом r .

Изложенные результаты показывают, что рассматриваемый метод корректен с точки зрения сходимости к корреляционным функциям, хотя высокая точность достигается при большом количестве испытаний. Использование модифицированного РСМ позволяет ускорить сходимость по числу реализаций турбулентного поля.

Для однородной турбулентности вводятся интегралы корреляционных функций по расстоянию:

$$I_f = \int_0^{\infty} f(r) dr, \quad I_g = \int_0^{\infty} g(r) dr.$$

Согласно теории, отношение этих интегралов $I_f/I_g=2$. На рис.3 показана зависимость указанной величины от числа реализаций модифицированного РСМ для 1000 гармоник с разбиением на 100 групп. Видно, что теоретическое значение воспроизводится с хорошей точностью начиная с 1000 реализаций.

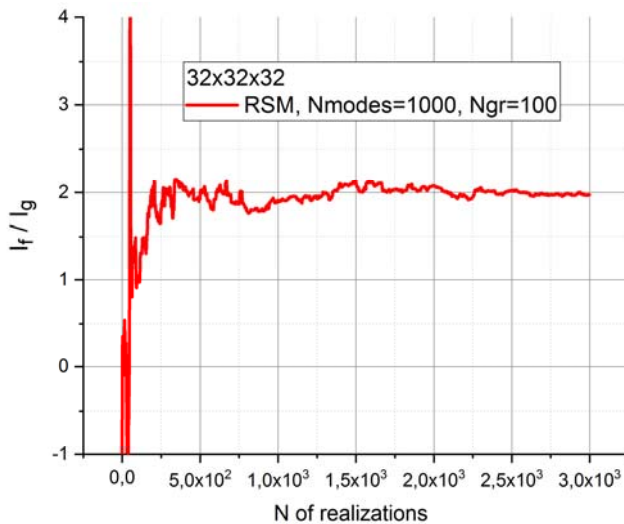


Рис.3. Отношение интегралов продольной и поперечной корреляционных функций.

3.3. Энергетический спектр. Синтетическое поле скоростей строится в согласии с заданной спектральной плотностью турбулентной энергии $E(k)$. Оценим, насколько энергетические спектры, получаемые по результатам численных реализаций, близки к исходному спектру.

На рис.4 приведены энергетические спектры турбулентных полей скорости, сгенерированных на сетке 32^3 с использованием $N=1000$ гармоник на основе спектрального метода из [7] и рандомизированного спектрального метода с разбиением на 100 групп из настоящей работы. Видно, что в инерционном интервале оба численных спектра очень близки к исходному спектру Кармана-Пао, отмеченному черной линией. В энергонесущем диапазоне, вблизи максимума плотности, два численных спектра, будучи похожи друг на друга, заметно отличаются от кривой Кармана-Пао. Это связано, по-видимому, с систематической ошибкой дискретного преобразования Фурье на низких волновых числах. Заметим, что аналогичное отклонение присутствует и у других авторов, исследовавших СМ на примере данного теста [7].

Модифицированный РСМ воспроизводит энергетический спектр лучше, чем простейший, при одинаковом числе гармоник. Это видно на рис.5, где два поля скорости генерировались на сетке 32^3 для $N=1000$ гармоник без разбиения волновых чисел на группы и с использованием 100 групп. Преимущества разбиения проявляются как в энергонесущем диапазоне, так и особенно на высоких гармониках.

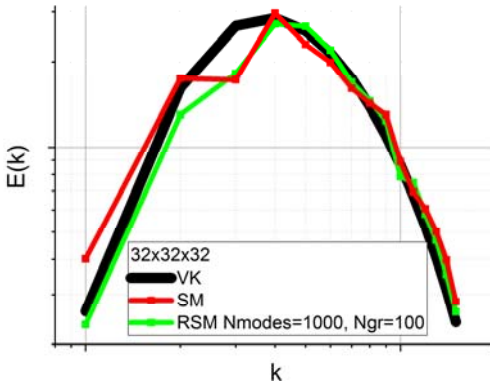


Рис.4. Энергетический спектр полей, полученных на основе PCM и метода [7].

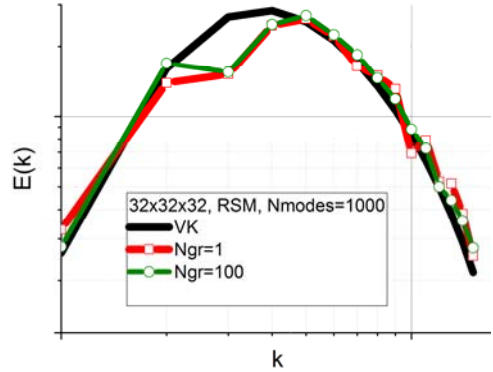


Рис.5. Энергетический спектр полей, полученных на основе простого и модифицированного PCM.

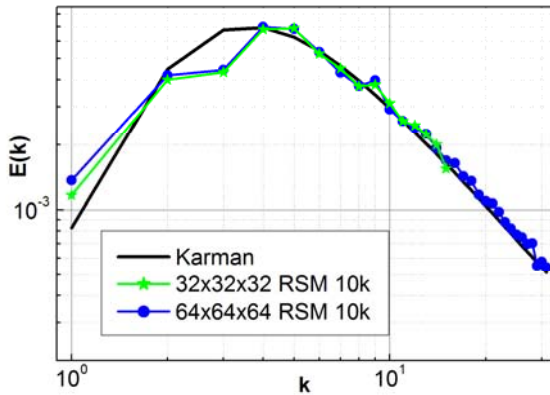


Рис.6. Энергетический спектр полей, полученных на основе PCM на сетках 32^3 и 64^3 узлов.

На рис.6 приведены энергетические спектры турбулентных полей скорости, сгенерированных рандомизированным спектральным методом без разбиения (2),(3) с использованием 10000 гармоник, на двух сетках: 32^3 и 64^3 узлов – в сравнении со спектром Кармана-Пао. Видно, что в диапазоне инерционного интервала, разрешаемого на сетке 64^3 и не разрешаемого на сетке 32^3 , соответствие исходному спектру очень хорошее, а в остальной области различие между двумя сеточными реализациями минимально.

Энергетический спектр, очевидно, воспроизводится тем лучше, чем большее количество гармоник участвует в поле, сгенерированном рандомизированным спектральным методом. Этот факт подтверждают расчеты [17], где применялся простой вариант PCM и бралось до 10000 гармоник. Модифицированный PCM, как показали дальнейшие тесты, сходится быстрее.

4. Валидационный расчет

Одним из широко используемых тестов для валидации вихреразрешающих вычислительных алгоритмов, реализующих тот или иной LES подход, является классическая задача о затухании однородной изотропной турбулентности, экспериментально исследованная в [16].

Описанный выше генератор использовался для задания начального турбулентного поля в виде распределения трех компонент вектора скорости, которое строилось по экспериментальному энергетическому спектру на некий момент времени. Далее проводился расчет эволюции данного распределения методом LES с подсеточной моделью Смагоринского [19] на основе уравнений динамики идеального газа. При низких скоростях не ожидается существенного отличия поведения среды от случая несжимаемой жидкости.

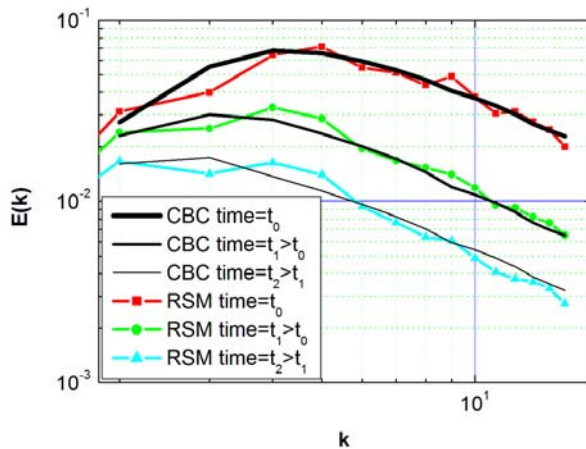


Рис.7. Энергетические спектры поля скорости задачи о затухании однородной изотропной турбулентности (CBC – экспериментальные, RSM – расчетные данные) на три момента времени.

Для проведения расчета использовался вычислительный алгоритм, реализованный в программном комплексе NOISEtte [20], неоднократно валидированный [21, 22] применительно к вихреразрешающему моделированию. Расчетная область представляет собой куб со сторонами $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. На всех гранях ставились условия периодичности. Расчеты велись на равномерной изотропной сетке с шагом $2\pi/32$. Число Рейнольдса, рассчитанное по соответствующей экспериментальной высоте канала, взятой в качестве характерного размера, и по скоростному масштабу, рассчитанному из кинетической энергии турбулентности удельного объема, составляло $Re=1620$.

Для проведения расчета использовалась центрально-разностная схема повышенной точности для аппроксимации конвективных потоков и 4-х ста-

дейная явная схема Рунге-Кутты для интегрирования по времени. Максимальное число Куранта во всей области не превышало 0.9.

Энергетические спектры строились на начальный и два последующих момента времени, соответствующих эксперименту из [16]. На рис.7 приведено сравнение расчетных и экспериментальных (СВС) данных. Видно, что начальное распределение (на момент времени t_0), сгенерированное с помощью предложенного в настоящей работе метода, достаточно близко соответствует эксперименту. Значительная погрешность наблюдается лишь для третьей гармоники ($k=3$) и связана, по всей видимости, с ошибкой трехмерного дискретного преобразования Фурье на низких модах.

В процессе эволюции начального распределения, на моменты времени t_1 и t_2 расчетные спектры остаются достаточно близкими к экспериментальным на большей части инерционного интервала (начиная от $k=6$); превышение относительно эталонного значения наблюдается при $k=4, 5$.

На основании представленных результатов можно говорить о том, что предложенная в статье методика позволяет генерировать нестационарные изотропные турбулентные поля, имеющие характеристики, которые более чем приемлемо совпадают с соответствующими экспериментальными значениями, сопоставимые аналогичным данным расчетов других авторов [7].

5. Заключение

Проведенные численные исследования свойств трехмерных изотропных турбулентных полей скорости, построенных на основе предложенного генератора, демонстрируют хорошее совпадение статистических характеристик как с теоретическими, так и с экспериментальными данными. Поэтому данный генератор, полученный обобщением на трехмерный случай РСМ метода из [5, 6], может стать базой для дальнейшего использования полей, полученных на его основе, при задании нестационарных входных граничных условий для LES расчетов.

Дальнейшее развитие предложенного способа генерации синтетических турбулентных полей скорости может заключаться в его адаптации к анизотропному случаю, что было бы актуальным для большинства инженерных задач. В ряде работ синтетическое анизотропное поле приводится к изотропному виду и обратно путем масштабирования тензора рейнольдсовых напряжений [12] либо его разложения Холецкого [8, 9]. Обе методики полностью совместимы с настоящей технологией РСМ.

Еще одно направление развития может заключаться в разработке гибридного РСМ-СМ подхода, при котором детерминированный спектральный метод будет использоваться для построения энергонесущих гармоник, а моды из инерционного интервала будут строиться на основе РСМ метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field // *Phys. Fluids*, 1970, v.13, №1, p.22–31.
2. M. Karweit, Ph. Blanc-Benon, D. Juve, and G. Comte-Bellot. Simulation of the propagation of an acoustic wave through a turbulent velocity field: A study of phase variance // *J. Acoust. Soc. Am.*, 1991, v.89, №1.
3. W. Bechara, C. Bailly, P. Lafon, S.M. Candel. Stochastic approach to noise modeling for free turbulent flows // *AIAA J.*, 1994, v.32, №3, p.455–463.
4. C. Bailly, D. Juve. A stochastic approach to compute subsonic-noise using linearized Euler's equations // *AIAA 99-1872*, A99-27849.
5. И.А. Боровская. Моделирование однородных случайных полей по заданному спектру в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 2007, т.19, №7, с.67–76;
I.A. Borovskaya. Modelirovanie odnorodnykh sluchainykh polei po zadannomu spektru v zadachakh aeroakustiki // *Matem. Mod.*, 2007, v.19, №7, p.67–76.
6. И.А. Боровская, Т.К. Козубская, О. Курбанмуратов, К.К. Сабельфельд. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их использовании в задачах аэроакустики // *Матем. моделирование*, 2007, т.19, №10, с.76–88;
I.A. Borovskaya, T.K. Kozubskaya, O. Kurbanmuradov, K.K. Sabelfeld. O modelirovanii odnorodnykh sluchainykh polei i signalov i ikh ispolzovanii v zadachakh aeroakustiki // *Matem. Mod.*, 2007, v.19, №10, p.76–88.
7. T. Saad, D. Cline, R. Stoll, J.C. Sutherland. Scalable tools for generating synthetic isotropic turbulence with arbitrary spectra // *AIAA J.*, 2016, v.55, №18, p.327–331.
8. Д.Ю. Адамьян. Метод генерации синтетической турбулентности на входных границах для расчета турбулентных течений в рамках вихреразрешающих подходов. – Санкт-Петербург: 2011, диссерт. ... канд. физ.-мат. наук.
D.Iu. Adamian. Metod generatsii sinteticheskoi turbulentnosti na vkhodnykh granitsakh dlia rascheta turbulentnykh techenii v ramkakh vikhherazreshaiushchikh podkhodov. – Sankt-Peterburg: 2011, dissert. ... kand. fiz.-mat. nauk.
9. M.L. Shur, P.R. Spalart, M.K. Strelets, A.K. Travin. Synthetic turbulence generators for RANS-LES interfaces in zonal simulations of aerodynamic and aeroacoustic problems // *Flow Turbulence Combust.*, 2014, v.93, №1, p.63–92. DOI 10.1007/s10494-014-9534-8
10. N.S. Dhamankar, G.A. Blaisdell, A.S. Lyrintzis. Overview of turbulent inflow boundary conditions for Large-Eddy Simulations // *AIAA J.*, 2018, v.56, №4, p.1317–1334.
11. P. Batten, U. Goldberg, and S. Chakravarthy. Interfacing statistical turbulence closures with Large-Eddy Simulation // *AIAA J.*, 2004, v.42, №3, p.485–492.
12. A. Smirnov, S. Shi, I. Celik. Random flow generation technique for Large Eddy Simulations and Particle-Dynamics Modeling // *J. Fluids Eng.*, 2001, v.123, №2, p.359–371.
13. К.К. Сабельфельд. Методы Монте-Карло в краевых задачах. – Новосибирск: Наука, 1989, 280 с.;
англ. пер.: K.K. Sabelfeld. Monte Carlo Methods in boundary value problems. Springer, Heidelberg–Berlin–New York, 1991.
14. O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld. Stochastic spectral and Fourier-wavelet methods for vector Gaussian random fields // *Monte Carlo Methods Appl.*, 2006, v.12, №5–6, p.395–445.
15. O. Kurbanmuradov, K. Sabelfeld, P.R. Kramer. Randomized spectral and Fourier-wavelet

- methods for multidimensional Gaussian random vector fields // *J. Comput. Phys.*, 2013, v.245, p.218–234.
16. *G. Comte-Bellot and S. Corrsin*. Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated ‘isotropic’ turbulence // *J. Fluid Mech.*, 1971, v.48, part 2, p.273–337.
 17. *А.В. Александров, Л.В. Дородницын, А.П. Дубень*. Генерация трехмерных турбулентных полей скорости на основе рандомизированного спектрального метода // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, №221, 16 с.;
A.V. Aleksandrov, L.V. Dorodnitsyn, A.P. Duben. Generatsiia trekhmernykh turbulentnykh polei skorosti na osnove randomizirovannogo spektralnogo metoda // Preprinty IPM im. M.V. Keldysha, 2018, №221, 16 s.
 18. *И.О. Хинце*. Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963, 680 с.
J.O. Hinze. Turbulence: An Introduction to Its Mechanism and Theory. 2nd Edition. McGraw Hill, New York, 1959, 586 p.
 19. *J. Smagorinsky*. General Circulation Experiments with the Primitive Equations. I. The Basic Experiment // *Month. Wea. Rev.*, 1963, v.91, p.99–164.
 20. *И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская*. Параллельный программный комплекс NOISEtte для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Выч. мет. и программирование*, 2012, т.13, №3, с.110–125;
I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya. Parallel research code NOISEtte for large-scale CFD and CAA simulations // *Vychisl. Metody Programm.*, 2012, v.13, No.3, p.110–125.
 21. *А.П. Дубень*. Вычислительные технологии для моделирования сложных пристеночных турбулентных течений на неструктурированных сетках // *Матем. моделирование*, т.25, №9, 2013, с.4–16;
англ. пер.: *A.P. Duben*. Computational technologies for simulation of complex near-wall turbulent flows using unstructured meshes // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2014, v.6, №2, p.162–171. doi: 10.1134/S2070048214020045
 22. *А.П. Дубень, Т.К. Козубская, Д.В. Потанов*. Моделирование нестационарных изотропных турбулентных течений на неструктурированных сетках с использованием реберно-ориентированных алгоритмов // *Матем. моделир.*, 2017, т.29, №5, с.27–45;
A.P. Duben, T.K. Kozubskaya, D.V. Potanov. Modelirovanie nestatsionarnykh izotropnykh turbulentnykh techenii na nestrukturirovannykh setkakh s ispolzovaniem reberno-orientirovannykh algoritmov // *Matem. modelir.*, 2017, t.29, №5, s.27–45;

Поступила в редакцию 04.03.2019

После доработки 25.06.2019

Принята к публикации 01.07.2019