

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, ИНДУЦИРОВАННЫХ КОЛЕБАНИЕМ ТЕЛ В ПОТОКЕ

© 2019 г. *И.В. Абалакин<sup>1</sup>, В.А. Вершков<sup>2</sup>, Н.С. Жданова<sup>1</sup>,  
Т.К. Козубская<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

<sup>2</sup>Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского

ilya.abalakin@gmail.com; nat.zhdanova@gmail.com

Проведенные исследования выполнены при поддержке Российского научного фонда (Проект РНФ 16-11-10350).

DOI: 10.1134/S0234087919100083

Представлены две вычислительные методики, не требующие изменения топологии сетки, для моделирования течения около колеблющихся тел. Первая методика использует метод погруженных границ, вторая – метод деформируемых сеток. Возможности этих двух подходов демонстрируются на примере решения модельных задач в двумерной постановке по расчету акустических полей, генерируемых в дозвуковом потоке осциллирующим цилиндром – как одиночным, так и в присутствии неподвижного тела цилиндрической формы.

Ключевые слова: течение вязкого газа, сжимаемый газ, акустическое поле, колебание цилиндра, математическое моделирование, метод погруженных границ, деформируемая сетка, вычислительная аэроакустика.

### NUMERICAL SIMULATION OF ACOUSTIC FIELDS INDUCED BY FLOW PAST OSCILLATING SOLID

*I.V. Abalakin<sup>1</sup>, V.A. Vershkov<sup>2</sup>, N.S. Zhdanova<sup>1</sup>, T.K. Kozubskaya<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

<sup>2</sup>Central Aerohydrodynamic Institute

The paper presents two computational techniques that do not require a change in the topology of the mesh, to simulate the flow around oscillating bodies. The first technique uses the immersed boundary method, the second – the method of deformed meshes. The capabilities of these two approaches are demonstrated by solving model problems in a two-dimensional formulation for simulating acoustic fields generated by an oscillating cylinder, both single and in the presence of a fixed cylindrical body, in subsonic flow.

Key words: compressible viscous flow, acoustic field, cylinder oscillation, mathematical modeling, immersed boundary condition, moving mesh, computational aeroacoustics.

## **Введение**

Исследование генерации и распространения акустического излучения представляет собой в наши дни актуальную задачу, напрямую связанную с улучшением экологической обстановки в населенных пунктах и на территориях промышленных предприятий.

При решении задач по снижению шума, производимого авиационной техникой, автомобилями и другими устройствами, может быть использован метод математического моделирования как одно из эффективных средств в дополнение к физическому эксперименту и теоретическим оценкам.

В авиации одним из акустических источников шума являются выпускаемые шасси самолёта, выдвигающиеся или задвигающиеся предкрылки и закрылки. То есть генерация звука обусловлена обтеканием конструкции с подвижными элементами.

При моделировании течения вокруг тел, движущихся с переменной скоростью, в методику численного моделирования необходимо включать специальные подходы для воспроизведения движения или, как минимум, его учёт. В последнем случае можно использовать математическое описание в неинерциальной системе отсчёта, связанной с движущимся препятствием и позволяющей работать на неизменной расчётной сетке. Однако этот подход неприемлем в общем случае, когда рассматривается система из двух и более тел, движущихся с разными скоростями, или одно из которых неподвижно относительно других. В настоящей работе разрабатываются два других подхода, основанных на методе погруженных границ и методе деформируемой сетки.

Метод погруженных границ основан на идее, предложенной в [1]. Она заключается в имитации алгебраического условия на границе твердого тела путём модификации системы уравнений газодинамики (или разностного шаблона ее аппроксимации) в точках сетки, находящихся в окрестности границы. При этом модифицированная математическая модель работает в односвязной области, включающей зону локализации препятствия. Соответственно и расчёт проводится во всей области, включая препятствие. Отказ от отслеживания границы раздела сред граничными узлами сетки даёт свободу для моделирования перемещений тела и его возможной деформации.

В настоящей работе применяется вариант метода погруженных границ, основанный на методе Бринкмана штрафных функций [2]. Метод Бринкмана штрафных функций успешно применяется для численного моделирования вязких как несжимаемых (например, [3–5]), так и сжимаемых течений (например, [6, 7]). Немногочисленные методики численного моделирования невязких

течений на основе этого метода представлены в [8] и работе авторов данной статьи [9]. Свойства течения в невязком случае определяются системой линейных уравнений Эйлера, а граничное условие непротекания (равенство нулю нормальной составляющей скорости на твердой поверхности) моделируется методом Бринкмана штрафных функций. Результаты численного моделирования акустических полей течения представлены в [10], где использован модифицированный метод Бринкмана, а именно объёмный метод штрафных функций (Volume Penalization Method).

Другим подходом к моделированию движения твердых тел, имеющих все шесть степеней свободы, является деформирование расчётной сетки. Существуют три основные разновидности алгоритмов этого подхода: метод деформации сеточных элементов без изменения топологии (см., например, [11]), метод вложенных сеток [12] и метод перестроения расчётной сетки на каждом шаге [13].

Первый метод заключается в том, что на каждом шаге по времени узлы расчётной сетки изменяют свои координаты по заранее заданным законам так, чтобы не изменилась общая топология расчётной сетки. В общем случае алгоритмы данного класса могут описывать движения лишь с относительно небольшой амплитудой.

В настоящей работе в качестве альтернативы методу погруженных границ представлен метод, относящийся к первому подходу. В нем узлы расчётной сетки меняют свои координаты так, чтобы не испортить качество сеточных элементов. Главной особенностью построенного алгоритма является возможность работать с гибридными сетками, а также возможность напрямую управлять движением каждого узла расчётной сетки.

Два рассматриваемых в статье подхода имеют принципиальные различия. При первом подходе, основанном на использовании метода Бринкмана штрафных функций, модифицируется сама математическая модель за счет добавления источников члена. Начальная задача при этом численно решается, вообще говоря, на неизменной сетке в односвязной области. Изменения сетки могут касаться лишь динамической сеточной адаптации, которая помогает снизить вычислительные затраты. Второй подход, наоборот, оставляет неизменной математическую модель и оперирует с сеточными технологиями для описания движущегося препятствия. В этом случае решается начально-краевая задача в многосвязной области. Из множества методов сеточной деформации мы выбираем метод движущейся сетки с сохранением её топологии, который представляется наиболее эффективным для рассмотрения задач с небольшими колебаниями тел.

В настоящей работе оба подхода используются для моделирования аку-

тических полей, генерируемых при дозвуковом обтекании вязким сжимаемым газом двумерного круглого цилиндра, колеблющегося под действием вынужденных сил в направлении, перпендикулярном набегающему потоку, а также тандема цилиндров, один из которых колеблется аналогичным образом.

### 1. Математическая модель

В качестве базовой математической модели в работе используется система уравнений Навье-Стокса для идеального сжимаемого газа. Запишем ее в виде законов сохранения относительно вектора искомых консервативных переменных  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T$  в векторном виде как

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathcal{F}(\mathbf{Q}) - \mathcal{F}^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q})) = \mathbf{S}(\mathbf{Q}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор скорости,  $\rho$  – плотность,  $p$  – давление,  $E = \rho \mathbf{u}^2 / 2 + \rho \varepsilon$  – полная энергия,  $\varepsilon$  – внутренняя энергия.

В системе (1) введены составные векторы  $\mathcal{F}$  и  $\mathcal{F}^v$ , каждая компонента которых  $\mathbf{F}_i$  и  $\mathbf{F}_i^v$  в координатном направлении  $x_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) представляет собой вектор потока конвективного переноса и вектор потока диффузии, соответственно. Оператор  $(\nabla \cdot)$  есть оператор взятия дивергенции по каждой компоненте составного вектора.

Система уравнений Навье-Стокса (1) замыкается уравнением состояния совершенного газа  $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$ , где  $\gamma = 1.4$  есть показатель адиабаты.

Векторы потоков конвективного переноса задаются как функции физических переменных  $\rho, \mathbf{u}, p$  следующим образом:

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) = (\rho u_i, \rho u_i \mathbf{u} + p \mathbf{I}, (E + p) u_i)^T, \quad (2)$$

где  $\mathbf{I}$  – единичная матрица. Векторы потоков диффузии определяются как функции физических переменных и их градиентов по формуле:

$$\mathbf{F}_i^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) = (0, \tau_{i1}, \tau_{i2}, \tau_{i3}, \tau_{ij} u_j + q_i)^T, \quad (3)$$

где компоненты вязкого тензора напряжений  $\tau_{ij}$  и вектора теплового потока  $q_i$  имеют вид

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right), \quad q_i = \frac{\mu \gamma}{\text{Pr}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_i}, \quad (4)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\mu$  – коэффициент молекулярной вязкости,  $Pr = 0.72$  – число Прандтля. Вектор  $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$  представляет собой источниковый член, описывающий влияние внешних сил, не связанных с процессами переноса искомым переменных  $\mathbf{Q}$ .

Для дальнейшей численной реализации систему уравнений (1) удобнее рассматривать в интегральной формулировке, записанной относительно произвольного движущегося объема  $V(t)$ . Для этого проинтегрируем систему (1) по движущемуся объёму  $V(t)$  с границей  $\partial V(t)$  в некоторый момент времени. После применения теоремы Остроградского – Гаусса и теоремы о производной по времени от интеграла по жидкому объёму [14] получаем смешанную эйлерово-лагранжеву (СЭЛ) формулировку системы уравнений Навье – Стокса

$$\frac{d}{dt} \int_V \mathbf{Q} dV + \int_{\partial V} \mathcal{F}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \nabla \cdot \mathcal{F}^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV + \int_V S(\mathbf{Q}) dV, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль к границе  $\partial V(t)$ , движущейся со скоростью  $\mathbf{v}$ , а компоненты составного вектора конвективного потока имеют вид

$$\mathbf{F}_i(\mathbf{Q}) = (\rho(u_i - v_i), \rho u_i(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + p\mathbf{I}, E(u_i - v_i) + pu_i)^T. \quad (6)$$

Система вида (5), (6) уже рассматривалась авторами в [15, 16] при расчёте шума от винта вертолета, где под скоростью  $\mathbf{v}$  понималась линейная скорость вращения лопасти винта (в системе координат, связанной с лопастью), и в [17, 18] при проведении расчётов на подвижной сетке (в частности, динамически адаптивной сетке), где скорость  $\mathbf{v}$  полагалась равной скорости движения сетки  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{r}$  – радиус вектор точки в расчётной области. В настоящей работе для моделирования движущихся объектов используются два подхода также на основе системы уравнений (1)-(6). Различие между ними состоит в разном определении источникового члена  $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$  и разном выборе скорости  $\mathbf{v}$ .

При проведении расчетов уравнения Навье-Стокса записывались в безразмерном виде относительно переменных:  $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/D$ ,  $\tilde{t} = tU_0/D$ ,  $\tilde{\rho} = \rho/\rho_0$ ,  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}/U_0$ ,  $\tilde{\mu} = \mu/\mu_0$ ,  $\tilde{p} = p/\rho_0 U_0^2$ .  $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/U_0^2$ , где  $\rho_0$ ,  $U_0$ ,  $\mu_0$  – характерные параметры течения (в задачах обтекания – параметры набегающего невозмущённого потока),  $D$  – геометрический характерный размер задачи. В безразмерных переменных вид системы уравнений не меняется за исключением замены коэффициента вязкости  $\mu$  на выражение  $\tilde{\mu}/Re$ , где  $Re = \rho_0 U_0 D / \mu_0$  – число Рейнольдса.

## 2. Метод Бринкмана штрафных функций

При использовании метода Бринкмана штрафных функций [6] как одного из вариантов метода погруженных границ в системе уравнений Навье-Стокса (5), (6) скорость  $\mathbf{v} = 0$ , т.е. используется абсолютная система координат. В качестве источников члена  $\mathbf{S}(\mathbf{Q})$  выбирается вектор-функция  $\mathbf{S}_\eta(\mathbf{Q})$ , которая работает только внутри области твёрдого тела и имеет следующий вид:

$$\mathbf{S}_\eta = \eta^{-1} \chi(0, \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}_B), 0)^T, \quad (7)$$

где  $\mathbf{u}_B$  – скорость движения тела,  $\eta \ll 1$  – штрафной параметр,  $\chi(t)$  – характеристическая функция, определяющая геометрическое положение обтекаемого тела,

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_B(t), \\ 0, & \mathbf{x} \in \Omega_F(t). \end{cases}$$

Здесь  $\bar{\Omega}_B$  – замкнутая область, занимаемая телом, включая его поверхность,  $\Omega_F$  – область течения.

С физической точки зрения метод Бринкмана штрафных функций можно интерпретировать как взаимодействие жидкой среды с твердым телом, рассматриваемым в приближении пористой среды с низкой проницаемостью  $\eta$ . С математической точки зрения наличие в системе (1) источников членов типа (7) определяет быструю релаксацию скорости (порядка  $\exp(-t/\eta)$ ,  $\eta \ll 1$ ) к нулевым условиям Дирихле в тех точках сетки, где характеристическая функция  $\chi$  отлична от нуля, в том числе и на границе твёрдого тела. В [3, 4] дается теоретическое обоснование сходимости решения  $\mathbf{Q}_\eta$  системы уравнений Навье-Стокса (1) с источником (7) к решению  $\mathbf{Q}$  системы уравнений (1) с источником  $\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = 0$  при стремлении параметра  $\eta$  к нулю.

## 3. Метод деформации расчетной сетки

При использовании метода деформации расчётной сетки в системе уравнений Навье-Стокса (5), (6) скорость  $\mathbf{v}$  полагается равной скорости движения узлов сетки, а источниковый член полагается равным нулю ( $\mathbf{S}(\mathbf{Q}) = 0$ ). Заметим, что подвижные сетки без изменения топологии могут быть востребованы и в случае применения метода погруженных границ. Дело в том, что эффективность этого подхода для описания движущегося

препятствия существенно повышается при использовании динамической сеточной адаптации к поверхности неявно заданного твёрдого тела. Наиболее подходящим типом адаптации при этом являются методы класса движущихся сеток, которые не меняют топологии исходной сетки.

**3.1. Алгоритм выделения зоны деформации и задания весовой функции.** В общем случае вся расчетная область разбивается на три подобласти: внутреннюю, буферную и внешнюю (рис.1). Внутренняя область примыкает к поверхности подвижного твёрдого тела. Предполагается, что все узлы расчётной сетки «заморожены» относительно окружаемого ими твердотельного препятствия и смещаются с ним вместе как единое целое, без движения друг относительно друга. В качестве внутренней области может рассматриваться, например, пограничный слой течения, покрываемый обычно в расчётах слоистой сеткой с регулярной структурой по нормали. Во внешней зоне все узлы расчетной сетки в процессе расчёта покоятся. В буферной же области узлы меняют свои координаты друг относительно друга по определенному закону, обеспечивая гладкий переход от внешней к внутренней зоне.

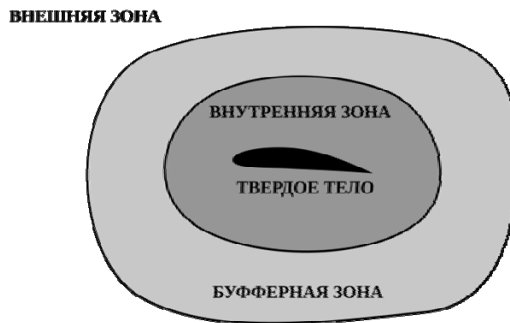


Рис.1. Подобласти деформации сетки.

Каждому узлу расчетной сетки присваивается значение весовой функции  $F(\mathbf{r}_i)$ , где  $\mathbf{r}_i$  – радиус-вектор сеточного узла  $i$  в абсолютной системе координат, которая отвечает за амплитуду деформации сеточного элемента и входит в уравнение сеточной деформации в виде коэффициента. Внутри движущейся как единое целое внутренней области значение весовой функции постоянно и равно единице  $F(\mathbf{r}_i) = 1$ . Во внешней зоне сетка неподвижна и весовая функция равна  $F(\mathbf{r}_i) = 0$ . В буферной же зоне весовая функция  $F(\mathbf{r}_i)$  имеет линейное распределение от 1 до 0 вдоль некоторого отрезка прямой между точкой  $\mathbf{R}_i^{int}$  внешней границы внутренней зоны и точкой  $\mathbf{R}_i^{ext}$  внутренней границы внешней зоны. В качестве такой прямой можно

выбирать, например, линию, соединяющую сеточный узел  $i$  с заданным центром тела, или нормаль к поверхности тела, проходящую через узел  $i$ . Линейное распределение весовой функции между внутренней и внешней областями обеспечивает монотонность смещения узлов и исключает возможность «перехлеста» узлов в буферной зоне. При линейном распределении значения весовой функции определяются согласно формуле

$$F(\mathbf{r}_i) = \max \left\{ 0, \min \left\{ 1, \frac{\mathbf{R}_i^{ext} - \mathbf{r}_i}{\mathbf{R}_i^{ext} - \mathbf{R}_i^{int}} \right\} \right\}. \quad (8)$$

Следует отметить, что, вообще говоря, можно использовать не только линейный, но и более сложные законы распределения.

В общем случае конфигурация и размеры внутренней и внешней областей задаются вручную, принимая во внимание особенности конкретной задачи и, в частности, амплитуду возможного движения тела. В качестве внешней границы буферной зоны удобно выбирать достаточно простую поверхность, задаваемую аналитически, – например, в форме цилиндра или сферы. В программном комплексе NOISEtte [19], который используется для проведения всех численных экспериментов, представленных в данной статье, реализована процедура проверки ограничений на каждом шаге по времени на допустимые границы буферной области. Эта процедура при необходимости меняет размеры зоны деформации на оптимальные.

**3.2. Алгоритм движения узлов в зоне деформации сетки.** После присвоения значения весовой функции  $F(\mathbf{r}_i)$  каждому узлу сетки в расчётной области выполняется поиск новой координаты узла на каждом шаге по времени. Результатом работы данного алгоритма является новая координата точки с учётом всех определяемых законом движения отклонений относительно её первоначального положения. В общем случае координата узла  $\mathbf{r}_i^{n+1}$  в момент времени  $t + \Delta t$  определяется положением узла  $\mathbf{r}_i^n$  на момент времени  $t$  и зависящей от вектора параметров смещения  $\mathbf{p}^n$  функцией  $G$ , умноженной на весовую функцию  $F(\mathbf{r}_i^n)$  типа (8),

$$\mathbf{r}_i^{n+1} = G(\mathbf{r}_i^n, \mathbf{p}^n) F(\mathbf{r}_i^n).$$

Функция смещения  $G$  определяется на основе заданного извне закона движения, описывающего перемещение. Более точно, эта функция определяется переносом и поворотом центра тяжести твёрдого тела и его вращением



$$G(\mathbf{r}^n, \mathbf{p}^n) = A_o(\varphi^n, \theta^n, \psi^n) \cdot (\mathbf{r}_R^n + \mathbf{s}) + A_{R'}(\varphi^m, \theta^m, \psi^m) \cdot A_o(\varphi^n, \theta^n, \psi^n) \cdot (\mathbf{r}^n - \mathbf{r}_R^n),$$

где  $\mathbf{r}^n$  – радиус-вектор узла (индекс  $i$  опускаем) в абсолютной системе координат  $(x, y, z)$  с центром в точке  $O$ . Вектор параметров смещения  $\mathbf{p}$  определяется как

$$\mathbf{p}^n = (\mathbf{r}_R^n, \mathbf{s}, \varphi^n, \theta^n, \psi^n, \varphi^m, \theta^m, \psi^m).$$

Здесь  $\mathbf{r}_R^n$  – радиус-вектор центра вращения, лежащий внутри тела,  $\mathbf{s}$  – вектор переноса,  $A_o$  – матрица поворота вокруг оси, проходящей через центр абсолютной системы координат,  $A_{R'}$  – матрица поворота вокруг оси, проходящей через центр  $R'$  системы координат  $(x', y', z')$ , связанной с телом. Центр новой системы координат  $R'$  задается радиус-вектором  $A_o \cdot (\mathbf{r}_R^n + \mathbf{s})$ . Матрицы поворотов зависят от углов Эйлера  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\psi$  в соответствующей системе координат, определяющих последовательные повороты вокруг осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

Несомненным преимуществом данного алгоритма является скорость его работы. За счет того, что буферная область ограничена, в процесс сеточной деформации вовлекается относительно небольшое по сравнению с общим числом ячеек количество узлов сетки.

Отметим, что изложенный алгоритм был впервые предложен в [20] для расчета движущихся лопастей вертолета. В настоящей работе данный алгоритм сформулирован для произвольного движения недеформируемого твердого тела.

#### 4. Численный метод

Аппроксимацию системы уравнений Навье-Стокса будем проводить на основе наиболее общей интегральной формы записи этой системы в СЭЛ форме (5), (6).

Запишем систему (5), (6) в дискретном виде для контрольного объема  $K_i$ , построенного вокруг сеточного узла  $i$  в рамках вершинно-центрированной формулировки,

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} \mathbf{Q} dV + \int_{\partial K_i} (\mathcal{F}(\mathbf{Q}) - \mathbf{v}\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{K_i} \nabla \cdot \mathcal{F}^v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}) dV + \int_{K_i} S(\mathbf{Q}) dV,$$

где  $\partial K_i$  – граница контрольного объема (или ячейки)  $K_i$ , а  $\mathbf{v}$  – вектор скорости движения грани, который отвечает за изменение во времени контрольного объема [18]. Численная схема метода конечных объемов при этом строится как

$$\frac{dK_i \mathbf{Q}_i}{dt} = - \sum_{j \in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij} + K_i \mathbf{S}(\mathbf{Q}_i), \quad \mathbf{h}_{ij} = \mathbf{h}_{ij}^c + \mathbf{h}_{ij}^v,$$

где  $|K_i|$  – объём ячейки  $K_i$ ,  $N_1(i)$  – множество сеточных узлов, соседних по отношению к узлу  $i$ ,  $\mathbf{h}_{ij}$  – численный поток, аппроксимирующий физический поток на границе между узлами  $i$  и  $j$ , состоящий из аппроксимации конвективных и вязких потоков  $\mathbf{h}_{ij}^c$  и  $\mathbf{h}_{ij}^v$  соответственно. Аппроксимация конвективного потока строится с использованием того или иного приближённого метода решения задачи о распаде разрыва. В настоящей работе используется метод Роу, при котором численный конвективный поток можно представить в виде суммы двух членов, соответствующих центрально-разностной и противопотоковой аппроксимациям, отвечающим за перенос и диссипацию соответственно:

$$\mathbf{h}_{ij}^c(t) = \underbrace{\frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_i) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_j)}{2} \cdot \mathbf{n}_{ij} - v_{ij} \frac{\mathbf{Q}_i + \mathbf{Q}_j}{2}}_{\text{перенос}} - \underbrace{\frac{\delta}{2} \mathbf{S}^{-1} |\Lambda - v_{ij} \mathbf{I}| \mathbf{S} (\mathbf{Q}_j - \mathbf{Q}_i)}_{\text{диссипация}}, \quad (9)$$

$$v_{ij}(t) = \frac{1}{|\mathbf{n}_{ij}|} \int_{\partial K_i(t) \cap \partial K_j(t)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{A}_{ij} = \frac{d\mathcal{F}}{d\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}_{ij}) = \mathbf{S}_{ij}^{-1} \Lambda_{ij} \mathbf{S}_{ij}.$$

Здесь  $\mathbf{A}_{ij}$  есть матрица якобиана, зависящая от значения вектора консервативных переменных  $\mathbf{Q}_{ij}$ , определенного на интерфейсе (или середине ребра)  $ij$ ,  $\Lambda_{ij}$  – диагональная матрица собственных значений Якобиана  $\mathbf{A}_{ij}$ ,  $\mathbf{n}_{ij}$  – ориентированная площадь грани  $ij$ ,  $\delta$  – параметр, контролирующей численную диссипацию.

Для повышения пространственного порядка аппроксимации конвективного потока схемы (9) используется реберно-ориентированная реконструкция на расширенном шаблоне [21, 22]. При таком подходе переменные  $\mathbf{Q}_i$  и  $\mathbf{Q}_j$  в (9) заменяются реконструированными слева и справа от грани ячейки значениями  $\mathbf{Q}_{ij}^-$  и  $\mathbf{Q}_{ij}^+$ , а матрицы  $\mathbf{S}$  и  $\Lambda$  не изменяются. Способ определения  $\mathbf{Q}_{ij}^-$  и  $\mathbf{Q}_{ij}^+$  определяет конкретную реберно-ориентированную схему. В случае схемы EBR5, которая была использована при проведении расчетов, представленных в настоящей статье, реконструкция приведена в [22].

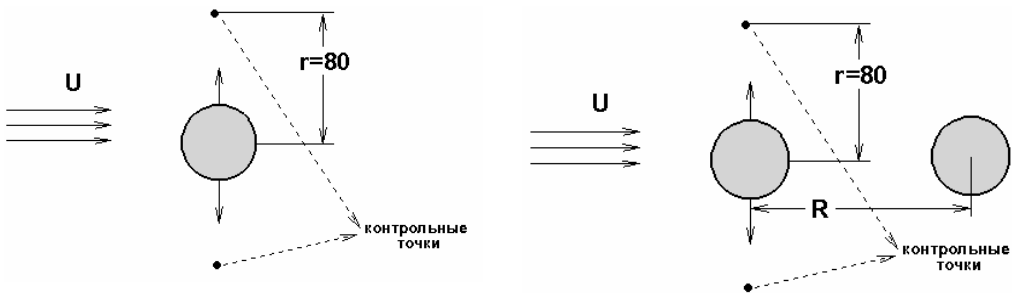
Аппроксимация вязких потоков  $\mathbf{h}_{ij}^v$  в уравнении Навье-Стокса проводится методом Галёркина на основе полиномов 1-го порядка как в случае покоящейся, так и в случае движущейся сетки.

При решении рассматриваемых в статье задач интегрирование по времени проводилось по неявной схеме Эйлера первого порядка для метода деформируемых сеток и по неявной трёхслойной схеме второго порядка – для метода Бринкмана штрафных функций.

## 5. Результаты численных экспериментов

Постановки всех рассмотренных в работе задач предложены в [10], где их численное решение получено с применением структурированных расчетных сеток. Для моделирования движения цилиндра в [10] применяется одна из разновидностей метода погруженных границ, предложенного в [7]. Численное решение задач получено двумя методами – методом погруженных границ (IBC – Immersed Boundary Condition) и методом деформируемых сеток (ММ – MovingMesh).

**5.1. Задача о колебании цилиндра в потоке.** В первой задаче рассматривается генерация звука колеблющимся двумерным цилиндром (см. рис.2 (слева)). Цилиндр с диаметром  $D=1$ , расположенный в начале координат, совершает гармонические колебания. Положение центра масс  $(x_c, y_c)$  цилиндра задается соотношениями:  $x_c=0$ ,  $y_c=A\sin(2\pi f_c t)$ , где амплитуда колебаний  $A=0.2$ , а их линейная частота  $f_c=0.15$ . Перпендикулярно направлению колебаний, слева на цилиндр набегают поток, характеризуемый числом Маха  $M=0.2$  и числом Рейнольдса  $Re=150$ .



**Рис.2.** Постановка задач об обтекании одного осциллирующего цилиндра (слева) и тандема цилиндров, один из которых осциллирует (справа).

Для проведения численного моделирования выбиралась расчетная область следующего размера:  $|x|<500$ ,  $|y|<500$ . Внутри нее строилась неструктурированная треугольная сетка со сгущением в окрестности цилиндра и числом узлов, приблизительно равным 550000. Линейный размер сеточного элемента в области максимального сгущения  $|x|<1$ ,  $|y|<1.5$  не превосходил величины 0.01. При численном моделировании методом погруженных границ расчетная сетка покрывает внутреннюю часть цилиндра, при использовании подвижных сеток узлы расчетной сетки определяют его поверхность.

В методе деформируемых сеток для данной задачи задана весовая функция  $F$ , которая в общем случае задается соотношением (8). Внутренняя и буферная зоны определены в виде концентрических окружностей радиусов  $R_1$  и  $R_2$  соответственно.

Результаты расчетов в обоих случаях показали, что при достижении времени  $t \sim 50$  вокруг цилиндра устанавливается периодическое течение, характеризующееся образованием звуковых волн.

Для оценки точности моделирования распространения и генерации звука проанализированы пульсации давления в контрольных точках, расположенных на окружности  $(r, \theta)$  с центром в начале координат, где радиус  $r = 80$  и угол  $\theta$  отсчитывается против часовой стрелки. В качестве референсных данных использованы результаты работы [10]. Их достоверность подтверждается хорошим согласованием с данными, полученными с применением согласованных с границей сеток.

Дополнительно был проведен расчет методом ИВС неподвижного цилиндра (частота  $f_c = 0$ ) с теми же параметрами набегающего потока, как и у колеблющегося цилиндра. Для верификации этого расчёта использовались данные из [23], в которой расчёты проводились с использованием согласованной с телом сетки<sup>1</sup>.

Здесь и далее числом Струхалиа  $St$  называется безразмерная частота схода вихрей с поверхности цилиндра, определяемая как основная частота в спектральном представлении распределения коэффициента подъёмной силы  $C_L$ .

Сила, действующая на тело со стороны жидкости, определяется по следующей формуле:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \oint_{\partial\Omega_B} (p \mathbf{n}_B - \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_B) dS = \\ &= \int_{\Omega_B} \frac{\partial \rho \mathbf{u}_B}{\partial t} dV + \int_{\Omega_B} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}_B \otimes \mathbf{u}_B) dV + \frac{1}{\eta} \int_{\Omega_B} \rho (\mathbf{u}_\eta - \mathbf{u}_B) dV, \end{aligned} \quad (10)$$

полученной с помощью разложения переменных по малому параметру  $\eta$ , аналогично асимптотическому анализу системы уравнений (1), (7), проведённому в [3, 6]. Формула (10) является обобщением для переменной скорости формулы, полученной в [6] для постоянной скорости.

В табл.1 суммированы характеристики, полученные при моделирова-

<sup>1</sup> Подробное сравнение результатов расчёта методом ИВС и классическим методом с использованием согласованной с телом сетки приведено в [24], где рассматривалась задача о моделировании нестационарного турбулентного течения около трёхмерного цилиндра.

нии одиночного цилиндра – колеблющегося и стационарного. Можно заметить, что число Струхала неподвижного цилиндра есть величина 0.184, совпадающая со значением, полученным в расчёте [23] (см. табл.1), а частота схода вихрей для подвижного цилиндра есть величина 0.150, совпадающая с частотой его вынужденных колебаний. Это связано с тем, что при колебании цилиндра срыв вихрей происходит в его крайнем верхнем и нижнем положении (для данных значений частоты и амплитуды). В данных, приведенных в табл.1, наблюдается значительное расхождение (более чем в два раза) среднеквадратичных значений коэффициента подъемной силы  $C_L^{r.m.s}$  колеблющегося и неподвижного цилиндров, но средний коэффициент силы сопротивления  $\bar{C}_D$  отличается незначительно.

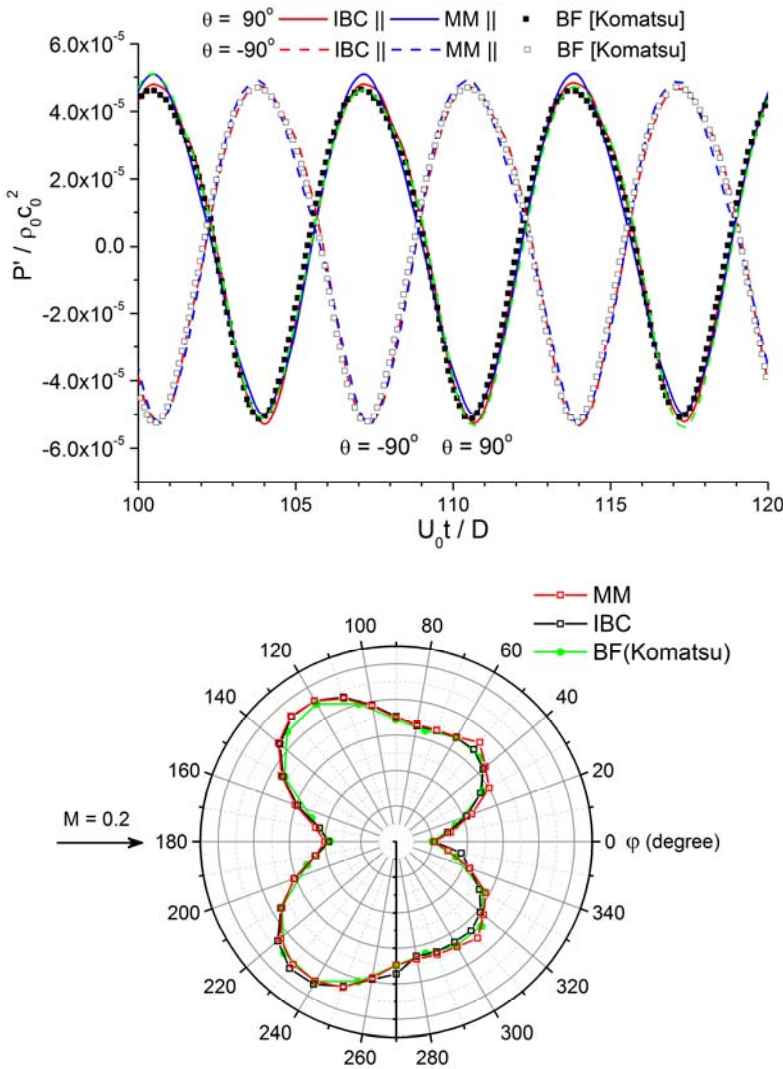
**Таблица 1.** Число Струхала  $St$ , безразмерная частота пульсаций давления  $U_0 f/D$  в точке  $(r, \theta) = (80, 90^\circ)$ , среднее значение коэффициента сопротивления  $\bar{C}_D$  и среднеквадратичное значение коэффициента подъемной силы  $C_L^{r.m.s}$  при различных режимах обтекания цилиндра.

	Подвижный цилиндр	Неподвижный цилиндр	Неподвижный цилиндр [22]
$St$	0.150	0.184	0.184
$U_0 f/D$	0.150	0.184	—
$\bar{C}_D$	1.29	1.33	1.31–1.33
$C_L^{r.m.s}$	0.16	0.37	0.35–0.36

На рис.3 (сверху) приведено распределение пульсаций давления в точке  $(r, \theta) = (80, 90^\circ)$ . Можно видеть строго периодическое поведение распределений с периодами, соответствующими безразмерным частотам, равным числам Струхала. На рис.3 (снизу) представлена диаграмма направленности при  $r = 80$ . Как видно из графиков, все характеристики хорошо согласуются с референсными данными.

**5.2. Задача о колебании цилиндра в потоке в присутствии неподвижного тела цилиндрической конфигурации.** Во второй задаче рассматривается генерация звука осциллирующим двумерным цилиндром в присутствии неподвижного цилиндра того же размера. Центры двух цилиндров располагаются на расстоянии  $R$  друг от друга. Цилиндр, расположенный слева,

совершает колебательные движения в направлении, перпендикулярном потоку, набегающему слева (см. рис.2 (справа)). Закон колебания задается аналогично предыдущей задаче. Число Маха  $M=0.2$  и число Рейнольдса  $Re=150$ .

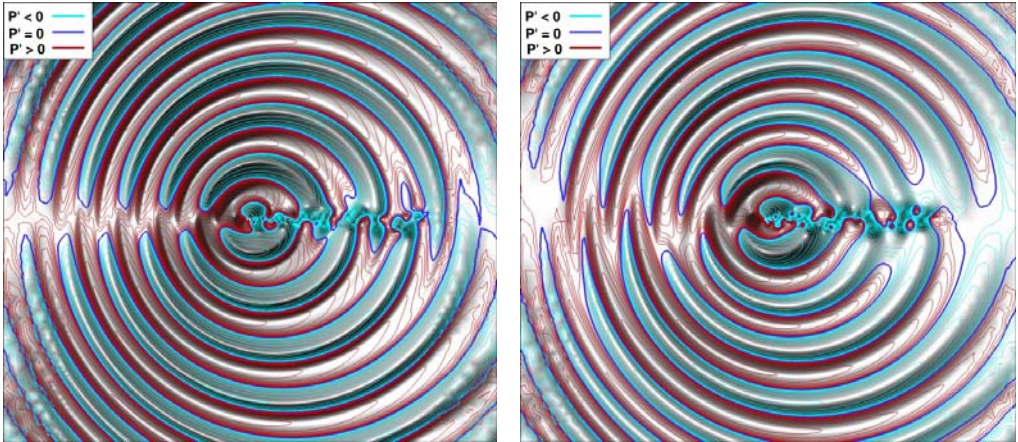


**Рис.3.** Характеристики звукового давления при моделировании обтекания осциллирующего цилиндра: пульсации давления (сверху) и диаграмма направленности (снизу).

Численное решение задачи получено для двух вариантов взаимного расположения цилиндров:  $R = 1.5D$  и  $R = 3D$ , при этом амплитуды колебаний цилиндра равны  $0.5D$  и  $0.2D$  соответственно, а их частота  $f_c = 0.184$ .

Параметры сгущения и размер расчетной сетки соответствуют сетке, использованной для предыдущей задачи.

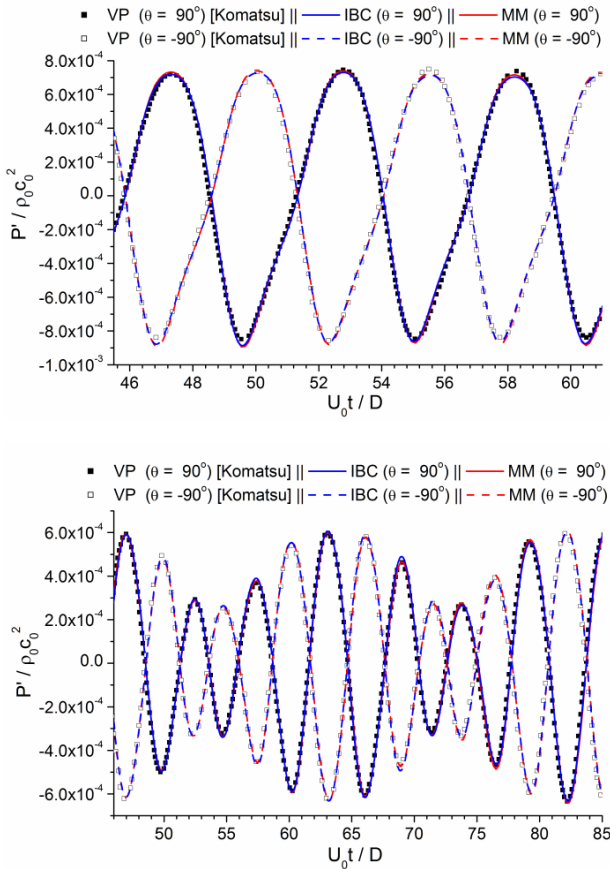
Граничные условия на поверхности неподвижного цилиндра в обоих случаях задаются традиционным подходом с применением согласованной с границей сетки. Это означает, что граница цилиндра справа описывается сеточными узлами, а требуемое граничное условие прилипания для скорости и адиабатическое граничное условие для температуры задается алгебраическими соотношениями в этих узлах



**Рис.4.** Распределение пульсаций давления при  $R = 1.5D$  (слева) и при  $R = 3D$  (справа)

Численный расчет проводился до времени  $t \sim 100$ . На рис.4 в виде численной ширен-визуализации и изолиний пульсаций давления представлены мгновенные поля течения, полученные в расчетах с помощью метода погруженных границ для двух различных взаимных положений цилиндров на момент времени, соответствующий максимальному положительному отклонению движущегося цилиндра. Можно заметить, что пространственное распределение акустической волны, генерируемой колеблющимся цилиндром, на фиксированный момент времени в случаях  $R = 1.5D$  и  $R = 3D$  имеют схожую структуру.

Но пульсации давления существенно различаются. Это видно на рис.5, где приведены распределения пульсаций давления по времени в фиксированной точке  $(r, \theta) = (80, \pm 90^\circ)$ . Так в случае  $R = 3D$  распределение пульсаций имеет многочастотную структуру.



**Рис.5.** Распределение пульсаций давления для задачи с  $R = 1.5D$  (сверху) и задачи с  $R = 3D$  (снизу).

Так же из вида распределений, приведённых на рис. 5, следует хорошее согласование результатов расчета, полученных разными методами, с референсными данными.

## Заключение

Расчёты осциллирующего цилиндра, проведенные по двум моделям, описывающим движение твердого тела, показали хорошее согласование результатов по акустическим пульсациям в дальнем поле. Из этого можно сделать вывод о пригодности этих двух подходов для моделирования движущихся тел. В заключение укажем на их преимущества и недостатки.

Первый подход заключается в модификации математической модели, описывающей течение вязкого сжимаемого газа, с целью имитации присутствия твердотельного препятствия. С математической точки зрения происходит замена начально-краевой задачи на задачу Коши в односвязной области.



Преимущество такого подхода заключается в возможности проведения расчёта при достаточно произвольном характере движения обтекаемого объекта. Сложности при этом могут быть численного характера. Они связаны с ужесточением требований для обеспечения устойчивости численного метода решения модифицированной системы, вызванных жёсткостью дискретных уравнений при малом коэффициенте проницаемости. Решением данной проблемы является уменьшение шага интегрирования по времени, что, в свою очередь, ведет к увеличению вычислительной стоимости расчета.

Второй подход не требует модификации системы уравнений Навье-Стокса. Получаемая при этом начально-краевая задача решается на деформируемой во времени сетке, обеспечивающей возможность движения исследуемого объекта. При этом не возникает проблем, связанных с неустойчивостью алгоритма и необходимостью уменьшать шаг по времени. Однако естественным ограничением данного подхода является воспроизведение лишь относительно малых движений, которые могут описываться деформированием сетки без изменения топологии.

Отметим, что оба подхода позволяют работать на одноблочной сетке и пригодны для расчета аэродинамических и акустических характеристик движущихся тел. Важным свойством обоих подходов является возможность эффективного распараллеливания. Выбор того или иного метода зависит от особенностей конкретной задачи, в частности, от ожидаемой траектории движения.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Peskin C.S.* Flow patterns around heart valves: a numerical method // *J. Comp. Phys.*, 1972, v.10, No. 2, p.252-271.
2. *Mittal R., Iaccarino G.* Immersed boundary Methods // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2005, v.37, p.239-261.
3. *Angot Ph., Bruneau C.-H., Fabrie P.* A penalization method to take into account obstacles in incompressible viscous flows // *Numer. Math.*, 1991, v.81, No. 4, p.497-520.
4. *Feireisl E., Neustupa J., Stebel J.* Convergence of a Brinkman-type penalization for compressible fluid flows // *J. Diff. Equ.*, 2011, v.250, No. 1, p.596-606.
5. *Vasilyev O.V., Kevlahanv N.K.-R.* Hybrid wavelet collocation–Brinkman penalization method for complex geometry flows // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2002, v.40, No. 3-4, p.531-538.
6. *Boiron O., Chiavassa G., Donat R.* A high-resolution penalization method for large Mach number flows in the presence of obstacles // *Comp. Fluids*, 2009, v.38, No. 3, p.703-714.
7. *Liu Q., Vasilyev O.V.* A Brinkman penalization method for compressible flows in complex geometries // *J. Comp. Phys.*, 2007, v.227, No. 2, p.946-966.
8. *Bae Y., Moon Y.J.* On the use of Brinkman penalization method for computation of acous-

- tic scattering from complex boundaries // *Comp. Fluids*, 2012, v.55, p.48-56.
9. *Абалакин И.В., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Метод погруженных границ для численного моделирования невязких сжимаемых течений // *ЖВМиМФ*, 2018, т.58, № 9.  
*Abalakin I.V., Zhdanova N.S., Kozubskaya T.K.* Immersed Boundary Method for Numerical Simulation of Inviscid Compressible Flows // *Comp. Math. Math. Phys.*, 2018, v.58, No. 9, p. 1411-1419.
  10. *Komatsu R., Iwakami W., Hattori Y.* Direct numerical simulation of aeroacoustic sound by volume penalization method // *Comput. Fluids*, 2016, v.130, p.24-36.
  11. *Mavriplis D.J.* Mesh generation and adaptivity for complex geometries and flows // *Handbook of Computational Fluid Mechanics* (Ed. Peyret R.) – Elsevier, 1996, p.417-459.
  12. *Renzoni P., et al.* EROS a common European Euler code for the analysis of the helicopter rotor flowfield // *Progress in Aerospace Sciences*, 2000, v.36, No. 5-6, p.437-485.
  13. *Steijl R., Barakos G.* Sliding mesh algorithm for CFD analysis of helicopter rotor–fuselage aerodynamics // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2008, v.58, No. 5, p.527-549.
  14. *Победря Б.Е., Георгиевский Д.В.* Основы механики сплошной среды. Курс лекций. — М.: Физматлит, 2006, 272 с.  
*Pobedria B.E., Georgievskii D.V.* Osnovy mekhaniki sploshnoi sredy. Kurs lektzii. — М.: Fizmatlit, 2006, 272 s.
  15. *Абалакин И.В., Аникин В.А., Бахвалов П.А., Бобков В.Г., Козубская Т.К.* Численное исследование аэродинамических и акустических свойств винта в кольце // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2016, № 3, с. 130-145.  
*Abalakin I.V., Anikin V.A., Bakhvalov P.A., Bobkov V.G., Kozubskaya T.K.* Numerical Investigation of the Aerodynamic and Acoustical Properties of a Shrouded Rotor // *Fluid Dynamics*, 2016, v.51, No. 3, p.419-433.
  16. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Бобков В.Г., Козубская Т.К., Аникин В.А.* Численное моделирование аэродинамических и акустических характеристик винта в кольце // *Матем. моделирование*, 2015, т.27, № 10, с.125-144.  
*Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Bobkov V.G., Kozubskaya T.K., Anikin V.A.* Numerical Simulation of Aerodynamic and Acoustic Characteristics of a Ducted Rotor // *Math. Models & Comp. Simul.*, 2016, v.8, No. 3, p.309-324.
  17. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Доронина О.А., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Моделирование аэродинамики движущегося тела, заданного погруженными границами на динамически адаптивной неструктурированной сетке // *Матем. моделирование*, 2018, т.30, № 5, с.57-75.  
*Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Doronina O.A., Zhdanova N.S., Kozubskaya T.K.* Simulating Aerodynamics of a Moving Body Specified by Immersed Boundaries on Dynamically Adaptive Unstructured Meshes // *MM & Comp.Simul.*, 2019, t.11, № 1, s.35-45.
  18. *Бахвалов П.А., Вершков В.А.* Реберно-ориентированные схемы на подвижных гибридных сетках в коде NOISEtte // *Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша*, 2018, №127.  
*Bakhvalov P.A., Vershkov V.A.* Reberno-orientirovannyye skhemy na podvizhnykh gibridnykh setkakh v kode NOISEtte. Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, 2018, №127.
  19. *Абалакин И.В., Бахвалов П.А., Горобец А.В., Дубень А.П., Козубская Т.К.* Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // *Выч. методы и программ.*, 2012, т.13, с.110-125.  
*Abalakin I.V., Bakhvalov P.A., Gorobets A.V., Duben A.P., Kozubskaya T.K.* Parallelnyy

- programmnyi kompleks NOISETTE dlia krupnomasshtabnykh raschetov zadach aerodinamiki i aeroakustiki // Vychislitelnye metody i programmirovaniye, 2012, t.13, s.110-125.
20. *Вершков В.А.* Алгоритм деформации сетки для учета циклического управления и маховых движений лопастей в задаче обтекания несущего винта вертолета // Научный вестник МГТУ ГА, 2019, т.22, № 2, с.62-74.  
*Vershkov V.A.* Algoritm deformatsii setki dlia ucheta tsiklicheskogo upravleniia i makhovyykh dvizhenii lopastei v zadache obtekaniia nesushchego vinta vertoleta // Nauchnyi vestnik MGTU GA, 2019, t.22, № 2, s.62-74.
21. *Бахвалов П.А., Козубская Т.К.* О построении реберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на гибридных неструктурированных сетках // ЖВМ и МФ., 2017, т.57, № 4, с. 682-701.  
*Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K.* Construction of edge-based 1-exact schemes for solving the Euler equations on hybrid unstructured meshes // Comp. Math.&Math. Phys., 2017, v.57, No. 4, p.680-697.
22. *Abalakin I., Bakhvalov P., Kozubskaya T.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // Int. J. Numer. Meth. Fluids, 2002, v.81, No. 6, p.331-356.
23. *Qu L., Norberg C., Davidson L., Peng S.-H., Wang F.* Quantitative numerical analysis of flow past a circular cylinder at Reynolds number between 50 and 200 // J. Fluid Struct., 2013, v.39, p.347-370.
24. *Абалакин И.В., Дубень А.П., Жданова Н.С., Козубская Т.К.* Моделирование нестационарного турбулентного течения вокруг цилиндра методом погруженных границ // Матем. моделирование, 2018, т. 30, № 5, с. 117-133  
*Abalakin I.V., Duben A.P., Zhdanova N.S., Kozubskaya T.K.* Simulating an Unsteady Turbulent Flow around a Cylinder by the Immersed Boundary Method // Mathematical Models and Computer Simulations, 2019, t.11, № 1, s.74-85.

Поступила в редакцию 04.03.2019

После доработки 23.05.2019

Принята к публикации 01.07.2019