МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 год, том 31, номер 11, стр. 47-60

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ВОЗРАСТОМ МОЩНОСТЕЙ

Н.Н. Оленев[1,2]

[1] ВЦ ФИЦ ИУ РАН nolenev@mail.ru
[2] Российский университет дружбы народов

DOI: 10.1134/S0234087919110042

Динамика дифференцированных по моментам создания и ограниченных по возрасту производственных мощностей на микроуровне задает производственную функцию на макроуровне. Микроописание основано на гипотезе о падающей с постоянным темпом мощности и постоянном числе рабочих мест от момента создания производственной единицы до ее ликвидации при превышении предельного возраста. Аналитическое выражение для эндогенной производственной функции с заданным максимальным возрастом мощностей получено на характерных режимах экспоненциального роста с постоянной долей новых мощностей. Рассмотрен переходный режим роста с меняющейся приростной фондоемкостью новых мощностей. Параметры производственной функции можно определить и при значительных изменениях в доле новых мощностей в суммарной мощности, которые происходили в экономике России. Для этого в численных расчетах производственной функции использована исходная микроэкономическая модель динамики производственных мощностей. Параметры оценены косвенно на основе сравнения результатов расчетов по модели со статистическими данными 1970–2017 гг. Полученное значение среднего предельного возраста мощностей A=25 для экономики России объясняет исчезновение в 2017 г. инфляции издержек. Идентификация параметров эндогенной производственной функции показала также, что значение средней приростной фондоемкости для всей экономики России значительно снизилось с 1970 г. по 2017 г. Снижение объясняется увеличением доли сырьевых отраслей в выпуске.

Ключевые слова: эндогенная производственная функция, производственная мощность, идентификация параметров, экономика России, предельный возраст мощностей, приростная фондоемкость.

IDENTIFICATION OF A PRODUCTION FUNCTION WITH AGE LIMIT FOR PRODUCTION CAPACITIES

N.N. Olenev[1,2]

[1] Dorodnicyn Computing Centre, FRC CSC RAS
[2] RUDN University

The micro-level dynamics of the age-limited vintage production capacity sets a macro-level production function. The micro-description is based on the hypothesis of a capacity falling at a constant rate and a constant number of workplaces from the moment the production unit is created to its liquidation when the age limit is exceeded. An analytical expression for the endogenous production function with a given maximum age of capacity was obtained in characteristic exponential growth modes with a constant share of new capacity. It is conceded a transitional growth mode with a changing incremental capital intensity of the new capacities. The parameters of the production function can be determined even with significant changes in the share of new capacities in the total capacity that occurred in the Russian economy. For this, the initial microeconomic model of production capacity dynamics was used in numerical calculations of the production function. The parameters are estimated indirectly on the basis of a comparison of the results of calculations by the model with statistical data 1970–2017. The obtained value of the average age limit of capacities A = 25 for the Russian economy explains the vanishing of cost inflation in 2017. Identification of the parameters of the endogenous production function also showed that the value of the average incremental capital intensity for the entire Russian economy decreased significantly from 1970 to 2017. The decrease is explained by the increase in the share of primary industries in output.

Key words: endogenous production function, production capacity, identification of parameters, Russian economy, age limit of capacities, incremental capital intensity.

1. Введение

Предельный возраст производственных мощностей входит в параметры производственной функции [1]. Классическую производственную функцию идентифицируют по временным рядам выпуска и производственных факторов. Агрегированная производственная функция зависит от внешних параметров модели, ее идентификация представляет собой сложную задачу и может быть решена за счет высокоскоростных расчетов [2].

В настоящей работе компактно представлен вывод аналитического выражения агрегированной производственной функции с учетом предельного возраста мощностей [1] для характерных режимов роста. В отличие от [1] используем новое уравнение для динамики приростной фондоемкости. В [1, 3, 4] представлены результаты идентификации новой производственной функции для ряда стран. Поскольку экономика России в 1970-2017 гг. не была на характерном режиме роста, производственную функцию при идентификации находим численно, используя исходное микроописание динамики мощностей. Представлены результаты и процедура идентификации производственной функции, дана экономическая интерпретация.

Первым задачу получения агрегированной производственной функции по исходному распределению производственных возможностей фирм отрасли поставил Х. Хаутеккер [5]. Он показал, что производственная функция

Кобба-Дугласа получается из распределения Парето на микроуровне. В [6] рассмотрена обратная операция по получению исходного распределения для классической производственной функции CES. Понятие производственной мощности (максимально возможного выпуска) ввел Л. Йохансен [7], он применил его вместо понятия капитала в построении производственных функций конкретных отраслей экономики Норвегии и Швеции [8].

А.А. Петров и И.Г. Поспелов систематически применяли в макромоделях экономики агрегированные по распределению мощностей производственные функции [9]. А.А. Шананин в [10] провел исследование агрегированных производственных функций многих переменных, установил однозначность производственных функций и функций прибыли. В [11] получен новый класс агрегированных производственных функций для падающей с постоянным темпом мощности с фиксированным числом рабочих мест.

Другое направление исследований агрегированных производственных функций использует капитал в качестве производственного фактора. В [12] форма производственной функции на макроуровне выводится из распределения идей на микроуровне. В [13] уровень общей факторной производительности производственной функции зависит от распределения особых шоков на микроуровне, вызывающих создание и ликвидацию рабочих мест. В [14] показано, что технологическое меню [12] есть специальный случай понятия множества поддержки, выяснена связь производственных функций и технологических меню. «Модель идей» генерирует CES-функцию.

Эти два направления дают эквивалентные результаты, если коэффициент фондоемкости не меняется. В настоящей работе коэффициент фондоемкости меняется, что дает существенное отличие от другого направления.

2. Производственные функции, представимые распределением производственных мощностей по технологиям

Настоящая работа является естественным продолжением [11]. Напомним здесь основные результаты [11], а также укажем на их применение.

Гипотеза 0. *В каждый момент времени t число рабочих мест на производственной единице фиксировано с момента ее создания $\tau \le t$, а производственная мощность $m(t,\tau)$ уменьшается с постоянным темпом $\mu > 0$.*

В соответствии с гипотезой 0 мощность $m(t,\tau) = J(\tau)\exp(-\mu(t-\tau))$ падает, а трудоемкость $\lambda(t,\tau) = \nu(\tau)\exp(\mu(t-\tau))$ растет. Здесь $J(\tau)$ – начальная мощность, $\nu(\tau)$ – начальная трудоемкость в момент создания τ.

2.1. Агрегированная производственная функция. В случае гипотезы 0 производственная функция [9] $f(t,x) = Y(t)/M(t)$ (загрузка суммарной мощности) на сбалансированном росте имеет вид [11]

$$f(t,x)=1-\left[1-\left(1-\varepsilon-\mu/\sigma\right)x/\nu(t)\right]^{(1-\varepsilon-\mu/\sigma)}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon \geq 0$ – темп научно-технического прогресса, наименьшая трудоемкость

$$d\nu/dt=-\varepsilon\sigma(t)\nu(t), \qquad \nu(0)=\nu_0, \qquad (2)$$

а доля новых мощностей $\sigma(t)=J(t)/M(t)$ на сбалансированном росте $Y(t)$ $J(t)$, $M(t)\sim\exp(\gamma t)$ постоянна: $\sigma=\mathrm{const}$. В замкнутой экономике

$$Y(t) = C(t) + b\,J(t), \qquad (3)$$

где b – коэффициент приростной фондоемкости, $C(t)$ – потребление. Поэтому на сбалансированном росте $C(t)\sim\exp(\gamma t)$, если $b=\mathrm{const}$.

2.2. Задача косвенной идентификации модели экономики. Пусть N внешних параметров заданы на гиперкубе размерности N: $\mathbf{a}^-\leq\mathbf{a}\leq\mathbf{a}^+$. Пусть часть макропоказателей имеет статистические аналоги: $X_i^{stat}(t)$, $t=t_0,...,t_n$, $i=1,...,M$. В качестве критерия близости расчетных и статистических временных рядов используют индекс несовпадения Тейла:

$$T_i=\sqrt{\left(\sum_{t=t_0}^{t_n}\left(X_i(t)-X_i^{stat}(t)\right)^2\right)\Big/\left(\sum_{t=t_0}^{t_n}\left(X_i(t)\right)^2+\left(X_i^{stat}(t)\right)^2\right)}. \qquad (4)$$

Свертка критериев близости (4) может быть такой:

$$S=\prod_{i=1}^{M}\left(1-T_i\right)\to\max_{\mathbf{a}^-\leq\mathbf{a}\leq\mathbf{a}^+}.$$

2.3. Прогноз конца 2006 г. о кризисе в экономике России 2008 г. Модель с производственными мощностями, дифференцированными по моментам создания, наводит на мысль, что рост экономики после кризиса 1998 г. был связан с загрузкой старых мощностей. В конце 2006 г. была рассмотрена задача идентификации динамической модели экономики типа Рамсея [15]. В результате ее решения [15, с.98] был предсказан кризис 2008 г. Если бы на этот прогноз среагировали сразу же, то можно было избежать падения ВВП в 2009 г. и последующей стагнации за счет перехода к росту путем создания новых более производительных мощностей.

3. Динамика производственных мощностей с ограничением по возрасту

Теперь в отличие от гипотезы 0 будем предполагать, что производственные мощности имеют некий предельный возраст $A(t)<\infty$, после которого они не используются. Это естественное ограничение для расчетов.

Гипотеза 1. Число рабочих мест на производственной единице остается неизменным с момента ее создания $\tau \le t$ до момента ликвидации $\tau + A(t)$, где $A(t)$ – максимальный возраст мощностей, а производственная мощность $m(t,\tau)$ уменьшается с постоянным темпом $\mu > 0$.

Тогда суммарная мощность $M(t) = \int_{t-A(t)}^{t} J(\tau)\exp(-\mu(t-\tau))d\tau$ описывается дифференциально-разностным уравнением

$$dM(t)/dt = J(t) - \mu M(t) - (1 - dA(t)/dt)J(t - A(t))\exp(-\mu A(t)), \qquad (5)$$

где скорость изменения предельного возраста мощностей ограничена сверху: $A(t)/dt \le 1$, поскольку выбывшие мощности не возвращаются.

Производственная функция задается неявно [1] по условию оптимальной загрузки мощностей трудовыми ресурсами $L(t)$, начиная с наиболее производительных в нулевом возрасте до возраста $\theta(t, L(t)) \le A(t)$:

$$Y(t) = \int_{t-\theta(t,L(t))}^{t} J(\tau)\exp(-\mu(t-\tau))d\tau, \qquad L(t) = \int_{t-\theta(t,L(t))}^{t} \nu(\tau)J(\tau)d\tau. \qquad (6)$$

4. Производственная функция с ограничением по возрасту $A = \text{const}$

Здесь переформулированы утверждения [1, с.146–148].

4.1. Связь темпа роста мощностей γ с параметрами σ, μ и A. Непосредственно из уравнения для суммарной мощности (5) вытекает

Лемма 1. *Если задан предельный возраст мощностей* $A = \text{const} > 0$*, а суммарная мощность* $M(t)$ *растет с постоянным темпом* γ*, при этом сохраняя долю новых мощностей* σ *постоянной:*

$$M(t) = M_0 \exp(\gamma t), \quad \sigma = J(t)/M(t) = \text{const},$$

то темп роста суммарной мощности γ *определяется соотношением*

$$\gamma = \varphi(\sigma, A) - \mu, \qquad (7)$$

где $\varphi(\sigma, A)$ *– единственное действительное решение*

$$1 - \varphi/\sigma = \exp(-\varphi A) \qquad (8)$$

на интервале $\varphi \in (0, \sigma)$ *при условии существования решения* $A > 1/\sigma$.

4.2. Производственная функция на сбалансированном росте. На основе леммы 1 здесь может быть сформулирована

Теорема 1. *Пусть на режиме сбалансированного роста с темпом* γ

$$M(t)=M_0\exp(\gamma t),\quad Y(t)=Y_0\exp(\gamma t),\quad J(t)=J_0\exp(\gamma t),\quad C(t)=C_0\exp(\gamma t) \qquad (9)$$

в замкнутой экономике (3) выполнены следующие условия:

а) верна гипотеза 1 о фиксированном числе рабочих мест и падении мощности с темпом μ *до некоего предельного возраста* $A(t)$*;*

б) фиксирован максимальный возраст мощностей $A(t)=A=\text{const}$*;*

в) фиксирован коэффициент приростной фондоемкости $b(t)$=b=const*;*

г) уменьшается наименьшая трудоемкость $\nu(t)$ *вследствие научно-технического прогресса в соответствии с* (2): $d\nu(t)/dt=-\varepsilon\sigma(t)\nu(t)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *доля новых мощностей постоянна:* $\sigma(t)=J(t)/M(t)=\sigma=\text{const}$*;*

2) *динамика суммарной производственной мощности* (5) *на сбалансированном росте* (9) *задает связь темпа роста* γ *с параметрами производственной функции* σ,μ,A *как неявную функцию* $\gamma=\gamma(\sigma,\mu,A)$ *от этих параметров* (7), (8);

3) *соотношения* (6) *дают следующее выражение для производственной функции* $Y(t)\ =\ M(t)f(t,x)$*:*

$$f(t,x)=\left\{1-\left[1-\left(\gamma/\sigma-\varepsilon\right)x/\nu(t)\right]^{(\gamma+\mu)/(\gamma-\varepsilon\sigma)}\right\}\sigma/\left(\gamma+\mu\right); \qquad (10)$$

4) *отношение средней трудоемкости мощностей к наименьшей постоянно:* $x/\nu(t)=L(t)/\left(M(t)\nu(t)\right)=\text{const}$.

В соответствии с теоремой 1 производственная функция содержит параметры $\mu,\varepsilon,\sigma,A,\nu(t)$, причем для определения γ через μ,σ,A используется трансцендентное уравнение (8) и равенство (7). Если из (7), (8) исключить $\sigma=(\gamma+\mu)/(1-\exp(-(\gamma+\mu)A))$ и подставить в (10), то полученный вид будет удобен для исследования золотого правила роста Солоу [11].

4.3. Связь с полученной ранее производственной функцией. Из теоремы 1 вытекает справедливость следующих двух ее следствий.

Следствие 1. *Новая производственная функция на сбалансированном росте* (10), (7), (8) *с учетом ограничения мощностей по максимальному возрасту A и с фиксированным коэффициентом приростной фондоемкости b при* $A\to\infty$ *дает производственную функцию с неограниченными по возрасту мощностями* (1).

Следствие 2. *На сбалансированном росте* (9) *с темпом* γ *с фиксированным коэффициентом приростной фондоемкости b и с заданным макси-*

мальным возрастом мощностей A число занятых в экономике трудящихся $L(t)$ *за счет научно-технического прогресса* (2) *в силу утверждения* 4 *теоремы* 1 *растет с меньшим темпом* $\eta = \gamma - \varepsilon\sigma$, *чем остальные объемные макропоказатели, при этом средний уровень потребления занятых растет с темпом* $\xi = \varepsilon\sigma$, $L(t) = L_0 \exp\left((\gamma - \varepsilon\sigma)t\right)$, $c(t) = C(t) / L(t) = c_0 \exp\left(\varepsilon\sigma t\right)$.

4.4. Производственная функция на переходном режиме роста с уменьшающимся коэффициентом приростной фондоемкости $b(t)$**.** В [3, 4, 1] при идентификации параметров изучаемой модели отмечено, что для многих стран мира характерен режим роста не с постоянным, а с изменяющимся коэффициентом приростной фондоемкости $b(t)$. Это справедливо и для экономики России 1970–2017 гг.

Численные эксперименты [4] показали, что динамика макроэкономических показателей лучше отражает статистику, если предположить, что темп изменения коэффициента приростной фондоемкости $b(t)$ пропорционален доле новых мощностей $\sigma(t)$, то есть изменение $b(t)$ похоже по форме на изменение наименьшей трудоемкости $\nu(t)$ в соответствии с (2):

$$db(t)\big/dt = -\beta\sigma(t)b(t), \qquad b(0) = b_0. \tag{11}$$

На основе утверждения 3 из работы [1, с.147,148] и леммы 1 в условиях изменения $b(t)$ в соответствии с (11) здесь сформулирована новая

Теорема 2. *Пусть в замкнутой экономике* (3) *с меняющейся фондоемкостью* $Y(t) = C(t) + b(t)\,J(t)$, *на режиме роста суммарной мощности и ВВП с темпом* γ,

$$M(t) = M_0 \exp(\gamma t), \quad Y(t) = Y_0 \exp(\gamma t), \tag{12}$$

выполнены следующие условия:

а) коэффициент приростной фондоемкости $b(t)$ *уменьшается в соответствии с* (11) *с темпом* $\beta\sigma(t)$, *где* $\beta = \text{const} > 0$;

б) доля новых мощностей фиксирована,

$$\sigma(t) = J(t) / M(t) = \sigma = \text{const}; \tag{13}$$

в) верна гипотеза 1 *о фиксированном числе рабочих мест и падении мощности с темпом* μ *до достижения предельного возраста* $A(t)$;

г) фиксирован максимальный возраст мощностей $A(t) = A = \text{const}$;

д) *уменьшается наименьшая трудоемкость* $\nu(t)$ *вследствие научно-технического прогресса в соответствии с уравнением* (2).

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) *производственная функция* $f(t,x)$ *(загрузка суммарной мощности) на переходном режиме* (12), (11), (13) *имеет вид* (10), (7), (8);

2) *отношение средней трудоемкости к наименьшей* $x/\nu(t)=\text{const}$;

3) *темп роста числа трудящихся, занятых в экономике,* $\eta=\gamma-\varepsilon\sigma$;

4) *доля потребления в выпуске* $C(t)/Y(t)$ *увеличивается, а доля накопления* $b(t)J(t))/Y(t)$ *уменьшается, при этом среднее потребление* $c(t)= =C(t)/L(t)$ *растет с темпом, превышающим его значение на сбалансированном росте* $\varepsilon\sigma$.

5. Результаты идентификации производственной функции

Аналитическое выражение для производственной функции получено для двух характерных режимов роста. Для российской экономики привычны переходные режимы. Параметры производственной функции по российским данным 1970–2017 гг. будем идентифицировать по исходной микромодели, предполагая вариабельность доли $\sigma(t)$ новых мощностей в суммарной мощности. Тем самым мы можем определить характерные для российской экономики значения параметров этой производственной функции.

5.1. Условие на среднюю загрузку мощности. По определению выпуск не превышает производственной мощности. В качестве суммарного выпуска в односекторной модели рассмотрим ВВП. Будем считать, что для каждого года *t* справедливо неравенство

$$Y(t)=\int_{t-X(t)}^{t} J(t)\exp(-\mu(t-\tau))d\tau \le \int_{t-A}^{t} J(t)\exp(-\mu(t-\tau))d\tau = M(t),$$

где $X(t)$ – максимальный возраст загрузки мощностей в году *t*, A – предельный возраст мощностей, который предполагается фиксированным.

В [16] показано, что в реальной экономике резервные мощности составляют порядка 30%. Учитывая переходный характер процессов в экономике России, полагаем среднюю загрузку мощностей здесь порядка 60%.

5.2. Результаты идентификации параметров модели. При косвенной идентификации параметров в качестве критерия близости статистических $L_s(t)$ и рассчитанных по модели $L(t)$ временных рядов числа занятых в экономике по российским данным 1970–2017 гг. использовалась модификация N_L критерия Тейла T_L:

$$N_L=1-T_L^2=2\left(\sum_{t=t_0}^{t_n} L(t)L_s(t)\right)\Big/\left(\sum_{t=t_0}^{t_n} L^2(t)+L_s^2(t)\right)\to \max_{\mathbf{a}^-\le\mathbf{a}\le\mathbf{a}^+}. \qquad (14)$$

При такой модификации параллельный расчет [2] значительно ускоряется, ибо расчет квадратного корня исключен. Искомые параметры **a** в (14) – это $b_0, \beta, \mu, \nu_0, \varepsilon, A, \gamma_0$. Лучшее значение критерия $N_L = 0.9283$ достигнуто при следующих значениях параметров: b_0=5.598 лет, β=0.430, μ=0.03155 лет$^{-1}$, ν_0=2.512 чел.лет на 1млн. руб. 2010 г., ε=0.3465, A=25 лет, γ_0=0.05 лет$^{-1}$, так что оценка начального распределения производственных мощностей $m(t_0, \tau) = J(t_0)\exp(-0.05(t_0 - \tau))$, где $0 \le t_0 - \tau \le A$ – возраст.

5.3. Макроэкономические показатели идентификации. Рис.1 оценивает качество идентификации модели по близости рассчитанных по модели и статистических временных рядов для числа занятых в экономике $L(t)$. Колебания отклонений связаны с жесткостью модели.

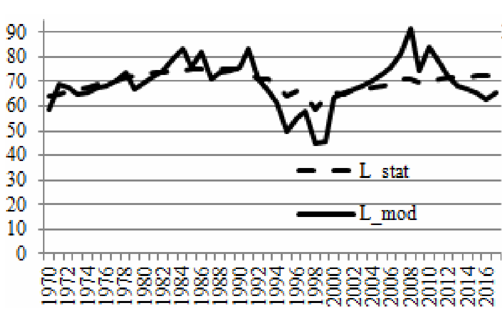

Рис.1. Расчет числа занятых по модели Lmod и статистика по числу занятых в экономике Lstat в 1970–2017 гг.

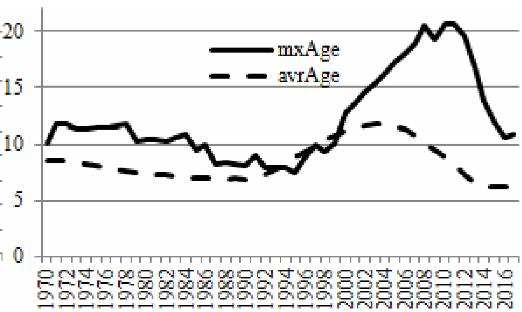

Рис.2. Расчет среднего возраста мощностей avrAge и максимального возраста их загрузки mxAge в 1970–2017 гг.

Рис.2 представляет оценку среднего возраста производственных мощностей *avrAge* и максимального возраста их загрузки *mxAge*. Последний возраст рассчитан из условия, что мощности загружаются трудовыми ресурсами, начиная с наименьшего возраста (с лучшей производительностью труда) до исчерпания трудовых ресурсов. В реальности частично загружаются все учитываемые мощности, а переход на новые мощности замедлен.

На рис.3 показана динамика производственной функции $f(t, x)$ (загрузки суммарной мощности) и доли накопления в ВВП в 1970–2017 гг. Видно, что доля накопления в ВВП в постсоветское время снизилась почти в три раза, а загрузка имеющихся мощностей к середине 90-х гг. XX в. упала в два раза, а затем выросла до обычного уровня в 60–70%.

Рис.4 показывает динамику доли $\sigma(t)$ новых мощностей в суммарной мощности в сравнении с фиксированным темпом μ падения мощностей вследствие износа. В середине 90-х гг. XX в. доля $\sigma(t)$ опускалась ниже μ, не обеспечивая возмещения даже физического износа мощностей.

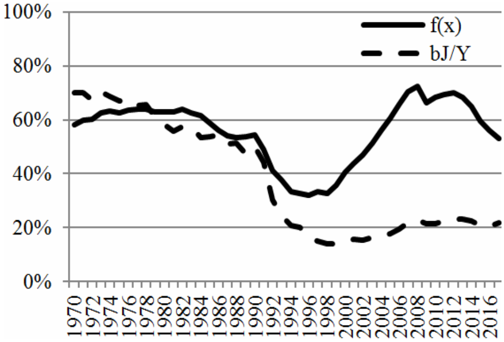

Рис.3. Загрузка производственных мощностей $f(x)$ и доля накопления в ВВП $b(t)J(t)/Y(t)$ в 1970–2017 гг.

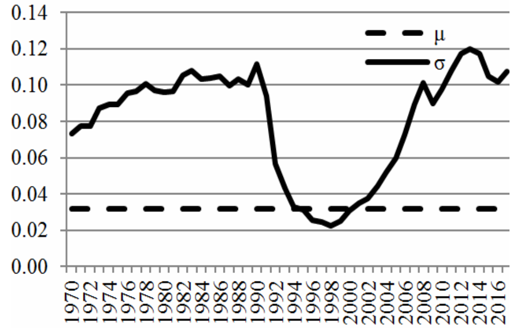

Рис.4. Доля новых мощностей в суммарной σ и темп деградации мощностей μ в 1970–2017 гг.

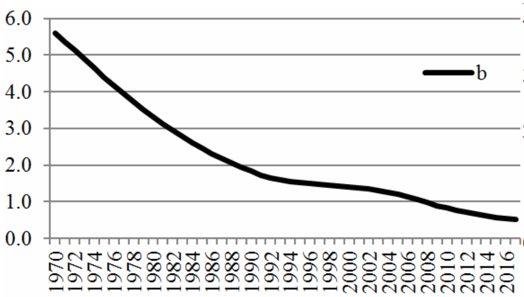

Рис.5. Коэффициент приростной фондоемкости b в 1970–2017 гг.

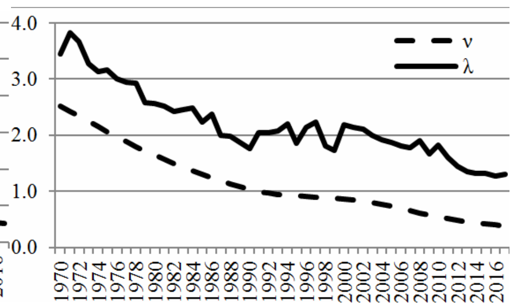

Рис.6. Трудоемкости наименьшая ν и средняя λ в 1970–2017 гг.

Рис.5 представляет динамическое снижение коэффициента приростной фондоемкости $b(t)$ в 1970–2017 гг. из-за роста доли сырьевых отраслей.

Рис.6 представляет оценку по модели динамики наименьшей трудоемкости ν и средней трудоемкости загруженных мощностей λ.

5.4. Микроэкономические показатели идентификации. Рис. 7 представляет распределение производственных мощностей $m(t,\tau)$ по моментам их создания τ для характерных лет $t = 1991$, 1997, 2008, 2010, 2015, 2017. Производственные мощности на этих графиках измеряются в трлн. руб. 2010 г. Черным цветом закрашены полностью загруженные мощности, а белым – резервные. В реальной экономике резервные мощности имеются для всех моментов их создания [16]. В $t = 1991$ г. доля новых мощностей упала. В дальнейшем, как видно на графике для $t = 1997$ г., это падение продолжилось. После 1998 г. загрузка старых мощностей перестала убывать. На графике $t = 2008$ г. видно, что загружены старые мощности, что были загружены в $t = 1997$ г. В $t = 2008$ г. загрузка мощностей достигла насыщения. Затем она начала сокращаться, см. $t = 2010$, 2015, 2017 гг. В реальной экономике резервные мощности частично используются, и поэтому они влияют на инфляцию издержек. Из графиков при $t =$ 2015, 2017 гг. видно, что толстый хвост мощностей в 2017 г. исчез, а значит, инфляция издержек с этого момента практически прекратилась.

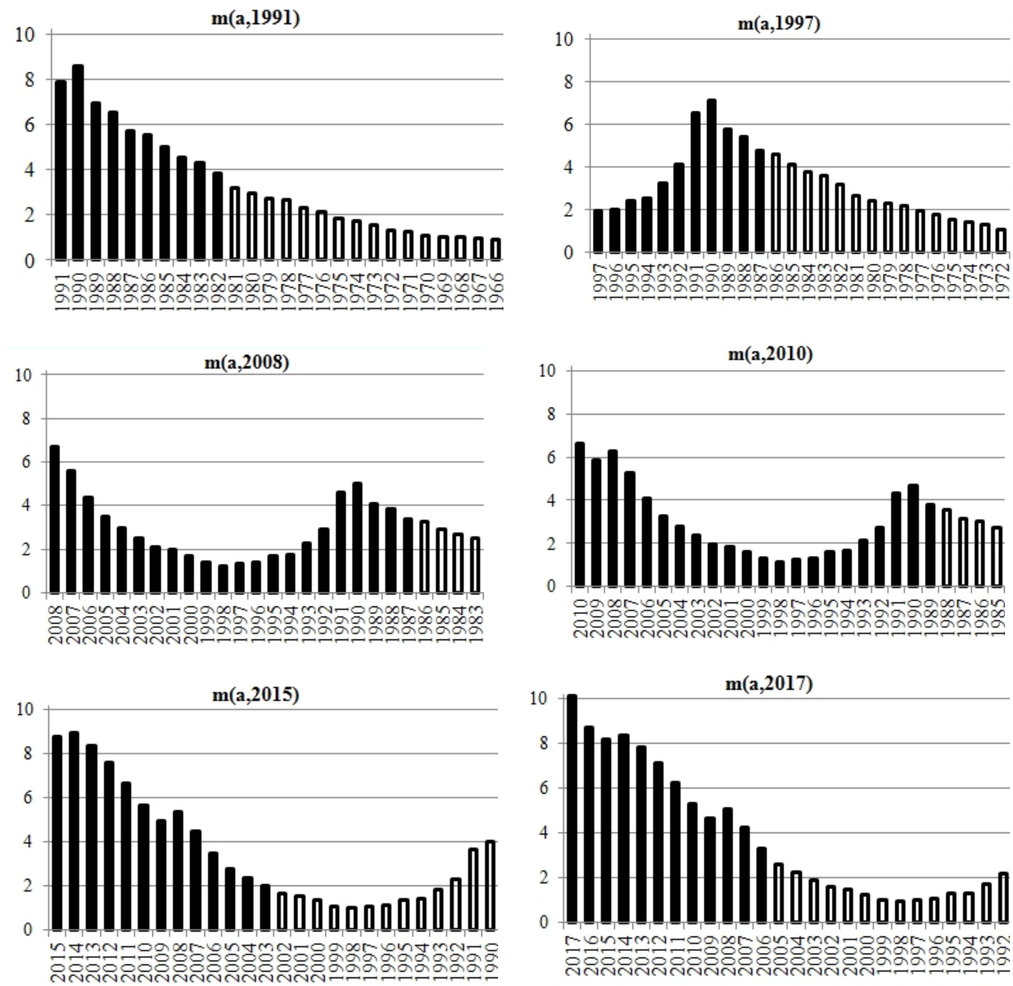

Рис.7. Распределение производственных мощностей $m(t,\tau)$ по годам создания τ (в трлн. руб. 2010 г.) в годы *t*=1991, 1997, 2008, 2010, 2015, 2017.

6. Заключение

Отметим здесь некоторые интересные экономические выводы из результатов идентификации параметров производственной функции, которые получены с помощью высокоскоростных расчетов на кластере. Во-первых, выводы из того, что в России средний максимальный возраст мощностей A составляет 25 лет (возраст инвестиций A + 1=26 лет).

1. Инфляция издержек, вызываемая ростом трудоемкости на старых мощностях, в 2017 г. закончилась (1991 + 26=2017). Старые мощности вышли из употребления, вместе с ними ушла инфляция издержек.

2. Для поддержки небольшой инфляции, необходимой для исправления структурных перекосов, можно повысить минимальную зарплату, тем самым сокращая смертность населения и увеличивая спрос на отечественную продукцию. Можно увеличить расходы бюджета.

3. Дальнейший рост без высокой инфляции возможен только за счет инвестиций в новые мощности, старые мощности загружать невыгодно.

4. Для ввода в строй производственных мощностей с новыми технологиями будет востребована наука.

5. Эмиссией денег можно стимулировать рост, инфляция ограничена.

6. Для загрузки новых производственных фондов надо готовить кадры.

7. Для перехода к сбалансированному росту при проведении экономической политики следует таргетировать (обеспечивать минимально необходимую) долю новых производственных мощностей σ, которая в силу следствия 2 из теоремы 1 связана с темпом экономического роста γ соотношением $\gamma = \varepsilon\sigma + \eta$, где η – темп прироста числа занятых в экономике. При подстановке полученных выше результатов идентификации мы получим минимально необходимый темп роста γ=0.049. Это значит, что в течение нескольких лет, до тех пор, пока не окрепнут частные инвестиции в экономику, понадобятся соответствующие государственные инвестиции, например, в инфраструктуру.

Во-вторых, предельный возраст мощностей – это дополнительное управление, и изложенные выше выводы справедливы при сложившемся в нашей стране условии его постоянства. Для достижения большего темпа роста российской экономики средний предельный возраст производственных мощностей надо снижать, принимая соответствующие меры.

Приложение 1

Доказательство теоремы 1. Утверждение 1 следует непосредственно из (9). Для получения утверждения 2 (другой формы представления леммы 1) достаточно разделить (5) на $M(t)$, найти производную от $M(t)$ в полученном уравнении в соответствии с (9) и воспользоваться утверждением 1. Выражение для производственной функции (10) утверждения 3 тоже непосредственно следует из подстановки в соотношения (6) постоянной доли новых мощностей σ. Поскольку на сбалансированном росте (9) величины $M(t)$ и $Y(t)$ растут с постоянным темпом, то $f(t,x) = \text{const}$, поэтому из (10) следует утверждение 4, что завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. В соответствии с леммой 1 темп роста γ (7) определяется соотношением (8). Уравнение (8) имеет единственное положительное решение, если производная левой части этого уравнения больше производной правой части при $\varphi = 0$, что обеспечивает условие $A > 1/\sigma$ леммы 1. Утверждение 1 следует из подстановки (7), (8) в параметрическое выражение для производственной функции (6). В результате получим соотношение (10). Утверждение 2 следует из определения производственной функции $Y(t) = M(t) f(t, x)$ и равенств (10), (12). Утверждение 3 следует из утверждения 2, условия (13) и уравнения (2) для динамики наименьшей трудоемкости. Для доказательства утверждения 4 заметим, что из условия (13) следует, что темп роста новых мощностей $J(t)$ совпадает с темпом роста суммарной мощности $M(t)$, а в силу (11), (12) доля накопления в выпуске падает $b(t)J(t)/Y(t) = (b_0 J_0 / Y_0)\exp(-\beta\sigma t)$, соответственно, доля потребления $C(t)/Y(t) = 1 - b(t)J(t)/Y(t)$ растет. Среднее потребление на переходном режиме в силу утверждения 2 определяется соотношением

$$c(t) = \left(f(x/\nu(t)) - \sigma b_0 \exp\left(-\beta\sigma t\right)\right)\nu(t)\Big/\left(\nu_0 x\right)\exp\left(\varepsilon\sigma t\right),$$

то есть среднее потребление на переходном режиме (при $x/\nu(t) = \mathrm{const}$) растет быстрее, чем на режиме сбалансированного роста (9). Что и завершает доказательство теоремы 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Н.Н. Оленев*. Производственная функция с учетом ограничения производственных мощностей по возрасту // Труды МФТИ, 2017, т.9, №3(35), с.143–150.
   N.N. Olenev Proizvodstvennaia funktsyia s uchetom ogranicheniia proizvodstvennykh moshchnostri po vozrastu // Trudy MFTI, 2017, t.9, №3(35), s.143–150.
2. *С.А. Немнюгин*. Введение в программирование на кластерах. – М.: 2016, 247 с.
   S.A. Nemniugin. Vvedenie v programmirovanie na klasterakh. – M.: 2016, 247 s.
3. *N. Olenev*. Economy of Greece: an evaluation of real sector // Bulletin of Political Economy, Serials Publ., 2016, v.10, №1, p.25–37.
4. *N. Olenev*. Identification of an aggregate production function for Polish economy // Quantitative Methods in Economics, 2019, v.19, №4, p.430-439.
5. *H.S. Houthakker*. The Pareto distribution and the Cobb-Douglas production function in activity analysis // Review of Econ. Studies, 1955–56, v.23(1), №60, p.27–31.
6. *D. Levhari.* A note of Houthakker's aggregate production function in a multifirm industry // Econometrica, 1968, v.36, №1, p.151–154.
7. *L. Johansen.* Production functions and the concept of capacity // Recherches recentes sur la fonction de production, Collection. Econ. math. et economet., 1968, v.2, p.49–72.

8. *L. Johansen.* Production functions: an integration of micro and macro, short run and long run aspects / Contributions to economic analysis, v.75, Amsterdam, London, North-Holland publ. co., 1972, 274 p.
9. *А.А. Петров, И.Г. Поспелов*. Системный анализ развивающейся экономики: к теории производственных функций.I // Изв. АН СССР, Техн. киб., 1979, № 2, с.18–27.
A.A. Petrov, I.G. Pospelov. Sistemnyj analiz razvivayushchejsya ekonomiki: k teorii proizvodstvennykh funktsii. I // Izv. AN SSSR, Tekhn. kib., 1979, № 2, c.18–27.
10. *А.А. Шананин*. Исследование одного класса производственных функций, возникающих при макроописании экономических систем // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1984, т.24, №12, с.1799–1811.
англ. пер.: *A.A. Shananin*. Investigation of a class of production functions arising in the macro description of economic systems // USSR Comput. Math. & Math. Phys. (GB), 1984, v.24, №6, p.127–134.
11. *Н.Н. Оленев, А.А. Петров, И.Г. Поспелов.* Модель процесса изменения мощности и производственная функция отрасли хозяйства / Математическое моделирование: Проц. в сложн. экон. и эколог. сист. – М.: Наука, 1986, с.46–60.
N.N. Olenev, A.A. Petrov, I.G. Pospelov. Model protsessa izmeneniia moshchnosti i proizvodstvennaia funktsiya otrasli khozyaistva / Matematicheskoe modelirovanie: Prots. v slozhn. ekon. i ekolog. sist. – M.: Nauka, 1986, s.46–60.
12. *C.I. Jones*. The shape of production function and the direction of technical change // Quarterly Journal of Economics, 2005, v.120, №2, p.517–549.
13. *R. Lagos*. A model of TFP // Review of Economic Studies, 2006, v.73, p.983–1007.
14. *V. Matveenko*. Anatomy of production functions: a technological menu and a choice of the best technology // Econ. Bull., 2010, v.30, №3, p.1906–1913.
15. *Н.Н. Оленев, Р.В. Печенкин, А.М. Чернецов.* Параллельное программирование в MATLAB и его приложения. – М.: ВЦ РАН, 2007, 120 с.
N.N. Olenev, R.V. Pechenkin, A.M. Chernecov. Parallelnoe programmirovanie v MATLAB i ego prilozheniya. – M.: VC RAN, 2007, 120 s.
16. *Н.Н. Оленев.* Модель жизненного цикла основных фондов и производственная функция, учитывающая резервы мощностей // Мат. мод., 1995, т.7, №7, с.19–33.
N.N. Olenev. Model zhiznennogo tsikla osnovnyh fondov i proizvodstvennaya funktsiya, uchityvayushchaya rezervy moshchnostej // Mat. mod., 1995, t.7, №7, s.19–33.

Поступила в редакцию 20.05.2019
После доработки 20.05.2019
Принята к публикации 01.07.2019