

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КАБЕЛЬ-ТРОСА ПРИВЯЗНОЙ БЕСПИЛОТНОЙ ПЛАТФОРМЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК

© 2019 г. *В.М. Вишнеvский, Е.А. Михайлов*, Д.А. Тумченко,
А.М. Ширvанян*

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва
vishn@inbox.ru, dtumchenok@gmail.com, artshirvanyan@mail.ru

*МГУ имени М.В. Ломоносова, физический факультет
ea.mikhajlov@physics.msu.ru

DOI: 10.1134/S0234087919110054

Работа посвящена описанию математической модели привязной высотной беспилотной платформы, в которой электропитание двигательных установок и полезной нагрузки осуществляется от наземного источника энергии по кабель-тросу. Для выведенной системы дифференциальных уравнений определены величины и направления сил воздействия на беспилотный аппарат, что позволит произвести расчет необходимой мощности энергии, передаваемой с земли на борт, в зависимости от высоты подъема и ветровой нагрузки при проектировании привязной беспилотной платформы.

Ключевые слова: привязная телекоммуникационная платформа, система передачи энергии большой мощности, система дифференциальных уравнений, беспилотный летательный аппарат.

MATHEMATICAL MODEL OF THE OPERATION OF A TETHERED UNMANNED PLATFORM IN THE CASE OF WIND INFLUENCE

V.M. Vishnevsky, E.A. Mikhailov, D.A. Tumchenok, A.M. Shirvanyan*

Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS

*Lomonosov Moscow State University

The article is devoted to the description of a mathematical model of a tethered high-altitude unmanned platform in which the power supply of propulsion systems and payload is carried out from a ground-based energy source via a cable. The magnitudes and directions of the forces acting on the unmanned vehicle by the cable are determined from the concluded system of differential equations, which will allow to calculate the required power of energy transmitted from the ground to the side, depending on the lift height and the wind load.

Key words: tethered telecommunications platform, high power transmission system, differential equation system, unmanned aerial vehicle.

1. Введение

В настоящее время широкое развитие получили высотные платформы, реализуемые на автономных беспилотных летательных аппаратах, и подводные роботы. Основным недостатком автономных беспилотных летательных аппаратов (БПЛА) является ограниченное время функционирования, связанное с малым ресурсом аккумуляторов БПЛА, оснащенных электрическими двигателями или ограниченным запасом топлива для двигателей внутреннего сгорания [1]. В связи с этим такие БПЛА не могут быть эффективно использованы в системах, где требуется длительное время функционирования, например, в системах управления безопасностью и охраны от террористических угроз критически важных объектов (атомных станций, аэродромов, протяженных мостов, участков границы). Длительное функционирование могут обеспечивать привязные высотные беспилотные платформы, в которых электропитание двигателей и аппаратуры полезной нагрузки осуществляется от наземных источников энергии [2-5]. Возможность передачи энергии большой мощности (10-15 кВт) по кабелю с земли на борт БПЛА позволяет осуществлять подъем и удержание на высотах 200-300 м полезной телекоммуникационной нагрузки в течение длительного времени, ограниченного лишь надежностными характеристиками БПЛА [3-6]. Привязные высотные платформы занимают промежуточное положение между спутниковыми системами и наземными системами, оборудование которых (базовые станции сотовой связи, радиорелейное и радиолокационное оборудование и т.д.) располагается на высотных сооружениях. По сравнению с дорогостоящими спутниковыми системами, привязные высотные платформы обладают высокой экономичностью, а наземные телекоммуникационные системы превосходят по обширности зон телекоммуникационного и видео покрытия. Ввиду перспективности практического применения привязных беспилотных высотных платформ как в гражданских, так и в оборонных отраслях, в исследовательских центрах передовых стран мира ведутся интенсивные работы по проектированию и реализации таких платформ [7-9].

Дифференциальные уравнения равновесия привязи и расчет действующих сил были рассмотрены ранее для различных привязных объектов. В известных книгах [10, 11] рассмотрены задачи расчета сил привязных аэростатов. Привязным беспилотным подводным роботам также уделяется немалое внимание [12, 13]. В зарубежных статьях рассматриваются различные вариации задачи с привязными БПЛА: контроль натяжения кабеля, следование за движущимся транспортным средством и др. [1, 14, 15]. Однако в пе-

речисленных работах не рассматривались вопросы воздействия кабель-троса на беспилотный аппарат при ветровых нагрузках, что оказывает существенное влияние на функционирование привязной беспилотной платформы.

В настоящей работе рассмотрена слабо исследованная в мировой литературе модель функционирования привязной беспилотной платформы, учитывающая воздействие кабель-троса на БПЛА при наличии ветровой нагрузки. Исследование динамики изменения положения кабеля при ветровых нагрузках и определение соответствующих сил, действующих на беспилотный аппарат, является важным этапом проектирования привязной высотной платформы.

2. Математическая модель функционирования кабель-троса при воздействии ветра

При расчете сил, действующих на БПЛА при наличии ветра, необходимо учитывать силу тяжести, определяемую весом кабель-троса, взлетным весом БПЛА, и силу ветровой нагрузки. В отличие от известного в литературе вывода систем дифференциальных уравнений равновесия нити [10] в статье учитывается постоянное натяжение, создаваемое лебедкой, а также отклонение платформы по горизонтали и вертикали от целевой точки зависания. Также существенным отличием от частных решений, приведенных в книге, является неизвестность угла наклона кабеля, как в верхней точке, так и в нижней.

Рассмотрим беспилотный летательный аппарат, который снабжается электроэнергией, передаваемой по кабелю от наземного пункта питания. Предполагается, что нижний конец кабеля крепится с помощью лебедки, обеспечивающей постоянное натяжение нижнего конца кабеля T_0 (рис.1), а верхний конец шарнирно крепится к платформе. Платформа обеспечивает натяжение кабеля по всей его длине вплоть до лебедки.

Положение кабеля в пространстве будем задавать в прямоугольной системе координат (x, y, z) . Равновесное положение кабеля в системе координат $OXYZ$ задается двумя уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(z); \\ y = y(z), \end{cases} \quad (1)$$

где $z \in [0; H]$, H – высота подъема платформы.

Для расчета ветровой нагрузки на кабель предположим, что скорость ветра задается двумя детерминированными проекциями $v_x = v_x(z)$ и $v_y = v_y(z)$ на оси OX и OY соответственно. Проекция скорости ветра на вер-

тикальную ось OZ тождественно равна нулю. Скорость ветра не изменяется во времени. При расчете нагрузки будем учитывать только нормальную по отношению к оси кабеля ветровую нагрузку. Тангенциальную нагрузку будем считать равной нулю.

Рассмотрим элемент кабеля длиной ΔS (рис.2), имеющий координаты по оси OZ от z до $z + \Delta z$.

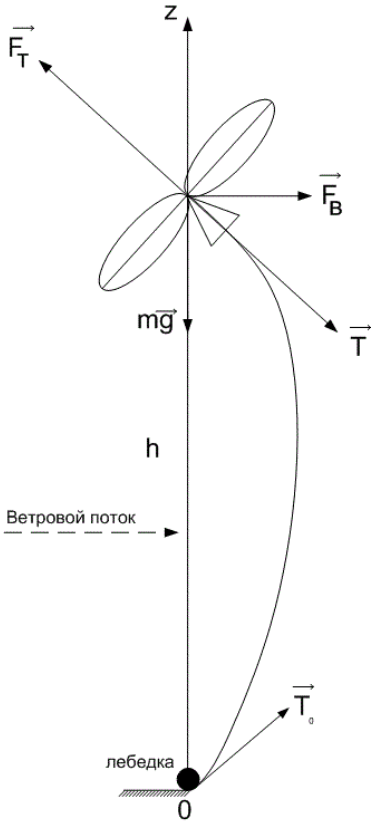


Рис.1. Схематическое изображение привязной высотной платформы и сил, действующих на нее.

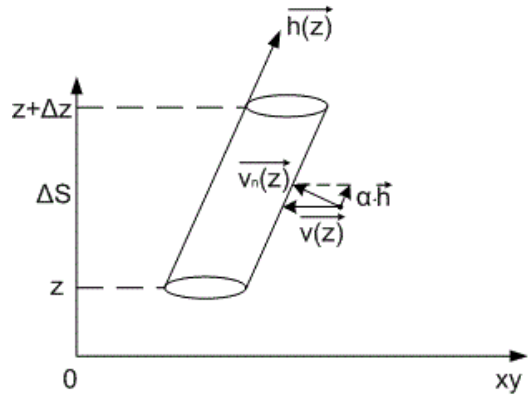


Рис.2. Элемент кабеля.

Его длина удовлетворяет равенству

$$\Delta S = \Delta z \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2} + o(\Delta z), \tag{2}$$

где $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(\Delta z)}{\Delta z} = 0$.

Вектор

$$\mathbf{h}(z) = \frac{dx(z)}{dz} \mathbf{i} + \frac{dy(z)}{dz} \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad (3)$$

где \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} – единичные векторы осей OX , OY и OZ соответственно, задает направление касательной к кабелю (рис.2). Скорость ветра выражается в виде

$$\mathbf{v}(z) = v_x(z)\mathbf{i} + v_y(z)\mathbf{j} + 0\mathbf{k}. \quad (4)$$

Нормальная составляющая скорости ветра к оси кабеля определяется из соотношения:

$$\mathbf{v}_n(z) = \mathbf{v}(z) + \alpha \cdot \mathbf{h}(z), \quad (5)$$

где α – некоторый коэффициент, характеризующий скорость ветра в направлении касательной.

Отсюда

$$\alpha = \frac{-\mathbf{v}(z) \cdot \mathbf{h}(z)}{h^2(z)}. \quad (6)$$

Учитывая, что

$$h^2(z) = 1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2, \quad (7)$$

получим

$$\alpha = \frac{-\mathbf{v}_x(z) \cdot \frac{dx(z)}{dz} - \mathbf{v}_y(z) \cdot \frac{dy(z)}{dz}}{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}. \quad (8)$$

Подставляя (3), (4), (8) в (5) и учитывая, что

$$|\mathbf{v}_n(z)| = \sqrt{\mathbf{v}_n(z) \cdot \mathbf{v}_n(z)}, \quad (9)$$

получим значение скорости ветра, действующего на элемент кабеля, в виде

$$|\mathbf{v}_n(z)| = \frac{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \left(v_x \cdot \frac{dy(z)}{dz} - v_y \cdot \frac{dx(z)}{dz}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}}. \quad (10)$$

Давление ветра на кабель вычисляется по формуле:

$$P_{sf} = A \cdot v^2, \quad (11)$$

где A – коэффициент аэродинамического сопротивления, кг/м^2 [16]; v – скорость ветра, м/с .

Нормальная ветровая нагрузка на элемент кабеля длины ΔS равна

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{z}) = A \cdot \mathbf{v}_n(\mathbf{z}) \cdot |\mathbf{v}_n(\mathbf{z})| \cdot \Delta S. \quad (12)$$

Подставляя (2), (10) в (12), получим

$$\mathbf{F}_n(\mathbf{z}) = \frac{A \cdot \Delta z \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + \left(v_x \cdot \frac{dy(z)}{dz} - v_y \cdot \frac{dx(z)}{dz} \right)^2}}{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} \cdot \left(\begin{array}{l} \left(v_x \cdot \left(1 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2 \right) - v_y \cdot \left(\frac{dx(z)}{dz} \cdot \frac{dy(z)}{dz} \right) \right) \cdot \mathbf{i} + \\ \left(v_y \cdot \left(1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 \right) - v_x \cdot \frac{dx(z)}{dz} \cdot \frac{dy(z)}{dz} \right) \cdot \mathbf{j} + \\ \left(-v_x \cdot \frac{dx(z)}{dz} - v_y \cdot \frac{dy(z)}{dz} \right) \cdot \mathbf{k} \end{array} \right) + o(z). \quad (13)$$

Проекция силы тяжести элемента кабеля длины ΔS отлична от нуля только на ось OZ и равна

$$F_g(z) = -\rho \cdot g \cdot \Delta S = -\rho \cdot g \cdot \Delta z \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} + o(z), \quad (14)$$

где ρ – линейная плотность провода (кг/м).

Запишем проекцию силы $T(z)$ на ось OX :

$$T_x(z) = -T(z) \cdot \cos \alpha. \quad (15)$$

Учитывая (2), получим

$$T_x(z) = -T(z) \cdot \frac{dx(z)/dz}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2}}. \quad (16)$$

Спроецируем остальные силы (рис.3) на ось OX и запишем уравнение равновесия сил, действующих на элемент кабеля длины ΔS :

$$\begin{aligned}
 & -T(z) \cdot \frac{dx(z)/dz}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}} + \\
 & + T(z + \Delta z) \cdot \frac{dx(z + \Delta z)/dz}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z + \Delta z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z + \Delta z)}{dz}\right)^2}} + F_{nx}(z) = o(z).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

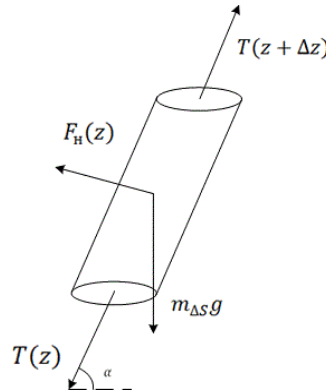


Рис.3. Силы, действующие на элемент кабеля.

Проекция на ось OY имеет вид

$$\begin{aligned}
 & -T(z) \cdot \frac{dy(z)/dz}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}} + \\
 & + T(z + \Delta z) \cdot \frac{dy(z + \Delta z)/dz}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z + \Delta z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z + \Delta z)}{dz}\right)^2}} + F_{ny}(z) = o(z).
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

Проекция на ось OZ имеет вид

$$-T(z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}} +$$

$$\begin{aligned}
 &+T(z+\Delta z) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dx(z+\Delta z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z+\Delta z)}{dz}\right)^2}}+ \\
 &+F_{nz}(z)-\rho \cdot g \cdot \Delta z \cdot \sqrt{1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}=o(z).
 \end{aligned} \tag{19}$$

Подставим в уравнения (17)–(19) величину нормальной ветровой нагрузки на элемент кабеля (12). Затем разделим на Δz и перейдем к пределу $\Delta z \rightarrow 0$. Тогда получим следующие проекции.

Проекция на ось OX :

$$\begin{aligned}
 &T \cdot \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dT}{dz} \cdot \frac{dx}{dz} - \frac{T \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \left(\frac{dx}{dz} \cdot \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \right)}{1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2} + \\
 &+ \frac{A \cdot \sqrt{v_x^2(z)+v_y^2(z)+\left(v_x(z) \cdot \frac{dy}{dz}-v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}} \cdot \\
 &\cdot \left(v_x(z) \cdot \left(1+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2 \right) - v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Проекция на ось OY :

$$\begin{aligned}
 &T \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + \frac{dT}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} - \frac{T \cdot \frac{dy}{dz} \cdot \left(\frac{dx}{dz} \cdot \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \right)}{1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2} + \\
 &+ \frac{A \cdot \sqrt{v_x^2(z)+v_y^2(z)+\left(v_x(z) \cdot \frac{dy}{dz}-v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}} \cdot \\
 &\cdot \left(v_y(z) \cdot \left(1+\left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 \right) - v_x(z) \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dy}{dz} \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{21}$$

Проекция на ось OZ :

$$\frac{dT}{dz} \frac{T \cdot \left(\frac{dx}{dz} \cdot \frac{d^2x}{dz^2} + \frac{dy}{dz} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \right) + A \cdot \sqrt{v_x^2(z) + v_y^2(z) + \left(v_x(z) \cdot \frac{dy}{dz} - v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz} \right)^2}}{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} + \frac{\rho \cdot g \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2}} = 0. \quad (22)$$

Здесь и далее аргумент z у производных и некоторых функций опущен для краткости написания. Тогда система уравнений (20)–(22) эквивалентна следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT}{dz} - \rho \cdot g = 0; \\ T \cdot \frac{d^2x}{dz^2} + \rho \cdot g \cdot \frac{dx}{dz} \cdot \left(1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2 \right) + \\ + A \cdot \sqrt{v_x^2(z) + v_y^2(z) + \left(v_x(z) \cdot \frac{dy}{dz} - v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz} \right)^2} \cdot \\ \cdot v_x(z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} = 0; \\ T \cdot \frac{d^2y}{dz^2} + \rho \cdot g \cdot \frac{dy}{dz} \cdot \left(1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2 \right) + \\ + A \cdot \sqrt{v_x^2(z) + v_y^2(z) + \left(v_x(z) \cdot \frac{dy}{dz} - v_y(z) \cdot \frac{dx}{dz} \right)^2} \cdot \\ \cdot v_y(z) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz} \right)^2} = 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

Положение равновесия кабеля описывается системой дифференциальных уравнений (23), из которых одно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, а два других – нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. Первое уравнение системы строго выводится из полученных ранее уравнений (20)–(22), что совпадает с уравнением положения нити, выведенным в [10].

Длина кабеля L описывается следующим дифференциальным уравнением первого порядка:

$$\frac{dL}{dz} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx(z)}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy(z)}{dz}\right)^2}, \quad (24)$$

с начальным условием $L(0) = 0$.

Таким образом, положение равновесия кабеля при горизонтальной скорости ветра и длина кабеля описываются системой нелинейных дифференциальных уравнений (23), (24).

Сложность рассматриваемой задачи заключается в том, что необходимо решать не задачу Коши, а краевую задачу, когда условия задаются при различных значениях аргумента z .

Полученная математическая модель будет использоваться в расчетах определения сил, действующих на платформу со стороны кабеля.

3. Решение системы дифференциальных уравнений

Совместим нижний конец кабеля с началом системы координат $OXYZ$. Предположим, что лебедка обеспечивает постоянное натяжение нижнего конца кабеля T_0 . Платформа с помощью системы управления удерживается в окрестности точки, расположенной по вертикали на заданной высоте. Необходимо оценить величину и направление силы, действующей от кабеля на беспилотный летательный аппарат при различной скорости ветра.

Для упрощения расчетов будем предполагать, что направление ветра совпадает с направлением оси OX , что позволяет рассматривать положение кабеля в плоскости OXZ . Систему уравнений (23), (24) запишем в виде

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dz} = \rho \cdot g; \\ \frac{dx_2}{dz} = x_3; \\ \frac{dx_3}{dz} = \frac{-\rho \cdot g \cdot x_3 \cdot (1 + x_3^2) - A \cdot v^2 \cdot \sqrt{1 + x_3^2}}{x_1}; \\ \frac{dx_4}{dz} = \sqrt{1 + x_3^2}. \end{cases} \quad (25)$$

Здесь z – текущая высота (м) элемента кабеля dx_2 над поверхностью Земли; x_1 – сила натяжения кабеля (Н); $\rho=0.005$ – линейная плотность провода (кг/м); $g=9.8$ – ускорение свободного падения (м/с²); x_2 – отклонение кабеля от вертикали (м); x_3 – тангенс угла наклона кабеля от вертикали; $A=0.003$ –

коэффициент аэродинамического сопротивления (кг/м^2) [16]; v – скорость ветра (м/с); x_4 – длина кабеля от лебедки до текущей высоты (м).

Для системы дифференциальных уравнений (25) заданы следующие условия: при $z = 0$ $x_1 = T_0 = 150 \text{ Н}$, $x_2 = 0$, $x_4 = 0$; при $z = h_{\text{vert}}$ $x_2 = x_{\text{zadan}}$. Поскольку при $z = 0$ значение x_3 не определено, то, учитывая структуру системы (25), удобно решить первое и третье уравнения системы с дополнительным условием:

$$\int_0^{z_{\text{max}}} x_3(z) dz = x_{\text{zadan}}. \quad (26)$$

После этого можно найти длину кабеля по формуле:

$$L = \int_0^{h_{\text{vert}}} \sqrt{1 + (x_3(z))^2} dz. \quad (27)$$

Используемый метод решения является, по сути, одной из вариаций метода стрельбы [17].

Решение для функции $x_1(z)$ может быть найдено аналитически так:

$$x_1(z) = x_1(0) + \rho g z. \quad (28)$$

Чтобы найти $x_3(z)$, разобьем интервал $0 < z < h_{\text{vert}}$ на N интервалов длины $\Delta z = h_{\text{vert}} / N$. Численное решение будем искать в точках $z_i = i \Delta z$, $i = 0, 1, \dots, N$.

В качестве начального значения функции x_3 , соответствующее $z_0 = 0$, бралось значение $(x_3)_0 = B$, которое варьировалось. Для решения будем использовать метод Рунге – Кутты четвертого порядка [17, 18]. На каждом i -м шаге ($i = 1, 2, \dots, N$) вычислим следующие коэффициенты:

$$k_1 = - \frac{-\rho g (x_3)_{(i-1)} (1 + ((x_3)_{(i-1)})^2) - A v^2 \sqrt{1 + ((x_3)_{(i-1)})^2}}{(x_1)_{(i-1)}}; \quad (29)$$

$$k_2 = - \frac{-\rho g [(x_3)_{(i-1)} + k_1 \Delta z / 2] (1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_1 \Delta z / 2)^2)}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z / 2} + \frac{A v^2 \sqrt{1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_1 \Delta z / 2)^2}}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z / 2}; \quad (30)$$

$$k_3 = -\frac{-\rho g[(x_3)_{(i-1)} + k_2 \Delta z / 2](1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_2 \Delta z / 2)^2)}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z / 2} + \frac{Av^2 \sqrt{(1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_2 \Delta z / 2)^2)}}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z / 2}; \quad (31)$$

$$k_4 = -\frac{-\rho g[(x_3)_{(i-1)} + k_3 \Delta z](1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_3 \Delta z)^2)}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z} + \frac{Av^2 \sqrt{(1 + ((x_3)_{(i-1)} + k_3 \Delta z)^2)}}{(x_3)_{(i-1)} + \rho g \Delta z}. \quad (32)$$

Тогда значение $(x_3)_i$ имеет вид

$$(x_3)_i = (x_3)_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (33)$$

Вычисление интеграла в правой части (27) целесообразно проводить с помощью метода Симпсона, который, с одной стороны, достаточно прост в реализации (являясь модификацией метода трапеций), с другой – позволяет добиться высокой точности результата [19, 20]:

$$I = \frac{\Delta z}{3}((x_3)_1 + 4(x_3)_2 + 2(x_3)_3 + \dots + 4(x_3)_{N-1} + (x_3)_N). \quad (34)$$

Что касается выбора коэффициента B , то определить его наилучшее значение можно с помощью дихотомии следующим образом. Определим из физических соображений значения коэффициентов P_0 и Q_0 такие, что при $x_3(0) = P_0$ можно гарантировать, что $x_2(h_{vert}) < x_{zadan}$, а при $x_3(0) = Q_0$ $x_2(h_{vert}) > x_{zadan}$.

Будем последовательно решать численно по описанной выше схеме уравнения для x_2 и x_3 с начальным условием $B = (P_j + Q_j)/2$, где $j = 0, 1, 2, \dots$. Если $I > x_{zadan}$, то на следующем шаге необходимо взять $P_{j+1} = P_j$, $Q_{j+1} = B$. Если $I < x_{zadan}$, то $P_{j+1} = B$, $Q_{j+1} = Q_j$. Последовательность продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто условие $|(x_2)_N - x_{zadan}| < \delta$, где δ – требуемая точность решения. В нашем случае выбиралось значение $\delta = 10^{-7}$ м, что более чем достаточно в условиях ограничений, наложенных на модель кабеля.

После этого вычислялась длина кабеля, интеграл (27) для которой также можно найти по методу Симпсона:

$$L = \frac{\Delta z}{3} \left[\sqrt{1 + ((x_3)_1)^2} + 4\sqrt{1 + ((x_3)_2)^2} + 2\sqrt{1 + ((x_3)_3)^2} + \dots + 4\sqrt{1 + ((x_3)_{(N-1)})^2} + \sqrt{1 + ((x_3)_N)^2} \right]. \quad (35)$$

Задача решалась на сетке, состоящей из $N = 6000$ точек. В частности, в случае, когда $z_{\max} = 300$ м, $\Delta z = 0.05$ м. Как метод Рунге–Кутты четвертого порядка, так и метод Симпсона обеспечивают четвертый порядок погрешности [19], дающий ошибку, которую можно оценить как $O(\Delta z^4)$. Таким образом, можно быть уверенным, что численное решение отличается от точного решения исходной задачи не более, чем на величину порядка 10^{-4} .

Для решения системы уравнений была составлена программа на языке C++, которая позволяет получить значения при различных наборах входных данных. Пользователь имеет возможность ввести в программу линейную плотность кабеля ρ , скорость ветра v , высоту подъема БПЛА z_{\max} , а также его смещение в верхней точке x_{last} .

Для различных значений скорости ветра и высоты зависания БПЛА выполнено решение системы (25). Результаты вычислений приведены в табл.1-3.

Таблица 1. Высота подъема ПБВП (z) – 100 м, отклонение от вертикали (x_2) – 0 м.

Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля (T) вверху $x_1 = -199$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.258322	-14.5	101.319	49.7683	-192.676
15	-0.178452	-10.1	100.635	34.9688	-195.904
12	-0.113879	-6.5	100.26	22.5205	-197.722
9	-0.063969	-3.7	100.082	12.71	-198.594
6	-0.028416	-1.6	100.016	5.64932	-198.92
3	-0.007103	-0.4	100.001	1.41286	-198.995
0	0	0	100	0	-199

Данные из табл.1-3 указывают, что на высоте 100 м и 200 м при скорости ветра 18 м/с длина кабеля увеличивается незначительно (менее 5%). На высоте 300 м увеличение скорости ветра значительно увеличивает длину кабеля. Кроме того, с ростом высоты при одинаковой скорости ветра возрастает угол наклона кабеля к вертикали в верхней точке. С увеличением высоты и скорости ветра также значительно увеличивается горизонтальная составляющая

силы, действующей от кабеля на БПЛА. Так, на высоте 300м при скорости ветра 18м/с угол достигает почти 30градусов ($\arctg(-0.570625)=29.7^\circ$). Горизонтальная составляющая равна 147.192Н, а вертикальная – -257.96 Н. Это означает, что платформа должна будет сильнее поворачиваться в сторону направления ветра, тем самым увеличивая площадь, на которую оказывает давление ветер. Значительная часть мощности будет тратиться на сопротивление ветру. Соответственно, чтобы поддерживать платформу на заданной высоте, потребуется передача большего количества энергии.

Таблица 2. Высота подъема ПБВП (z) – 200 м, отклонение от вертикали (x_2) – 0 м.

Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -248$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.436177	-23.6	208.495	99.155	-227.315
15	-0.298762	-16.6	204.063	71.0006	-237.619
12	-0.189746	-10.7	201.657	46.2213	-243.655
9	-0.106341	-6.1	200.523	26.2147	-246.611
6	-0.047198	-2.7	200.103	11.6926	-247.724
3	-0.011796	-0.7	200.006	2.9262	-247.983
0	0	0	200	0	-248

Таблица 3. Высота подъема ПБВП (z) – 300 м, отклонение от вертикали (x_2) – 0 м.

Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -297$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.570625	-29.7	324.178	147.192	-257.96
15	-0.387592	-21.2	311.437	107.336	-276.926
12	-0.244978	-13.8	304.637	70.6748	-288.468
9	-0.136975	-7.8	301.46	40.3124	-294.251
6	-0.060741	-3.5	300.288	17.9948	-296.454
3	-0.015177	-0.9	300.018	4.51388	-296.966
0	0	0	300	0	-297

На основании анализа табл.4 и 5 можно сделать вывод о том, что незначительное отклонение БПЛА от точки зависания не оказывает существенного влияния на длину кабеля и силу натяжения кабеля в верхней точке. Учитывая, что система управления будет стремиться вернуть платформу в точку зависания, при расчетах сил, действующих на кабель, данным влиянием можно пренебречь.

Таблица 4. Высота подъема ПБВП (z) – 200 м, отклонение от вертикали (x_2) – 1 м.

Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -248$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.43223	-23.4	208.544	98.394	-227.646
15	-0.29482	-16.4	204.096	70.13	-237.878
12	-0.18581	-10.5	201.678	45.304	-243.827
9	-0.10241	-5.8	200.536	25.265	-246.71
6	-0.04327	-2.5	200.11	10.721	-247.768
3	-0.00786	-0.5	200.01	1.95	-247.992
0	0.003928	0.2	200.003	0	-248

Таблица 5. Высота подъема ПБВП (z) – 200 м, отклонение от вертикали (x_2) – 2 м.

Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -248$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.42827	-23.2	208.598	97.635	-227.973
15	-0.29087	-16.2	204.134	69.266	-238.131
12	-0.18188	-10.3	201.705	44.378	-243.997
9	-0.09848	-5.6	200.554	24.306	-246.806
6	-0.03934	-2.3	200.123	9.749	-247.808
3	-0.00394	-0.2	200.019	0.976	-247.998
0	0.007856	0.5	200.01	0	-248

Таблица 6. Высота подъема ПБВП (z) – 200 м, отклонение от вертикали (x_2) – 0 м.

Сила натяжения лебедкой 100 Н. Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -198$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.57062	-29.7	216.119	98.131	-171.972
15	-0.3876	-21.2	207.625	71.557	-184.618
12	-0.24498	-13.8	203.091	47.113	-192.313
9	-0.13698	-7.8	200.973	26.871	-196.168
6	-0.06074	-3.5	200.192	12.005	-197.636
3	-0.01518	-0.9	200.012	3.004	-197.977
0	0.000002	0	200	0	-198

На основании анализа табл.6 и 7 можно сделать вывод о том, что изменение силы натяжения лебедки существенно меняет профиль кабеля и его

длину. При этом стоит отметить, что горизонтальная составляющая силы меняется не столь существенно.

Таблица 7. Высота подъема ПБВП (z) – 200 м, отклонение от вертикали (x_2) – 0 м. Сила натяжения лебедкой 200 Н. Тогда из формулы (25) сила натяжения кабеля вверху $x_1 = -298$ Н.

Скорость ветра (v), м/с	dx/dz в верхней точке	Угол отклонения кабеля в верхней точке, градусы	L – длина кабеля, м	Горизонтальная составляющая силы натяжения, Н	Вертикальная составляющая силы натяжения, Н
18	-0.35423	-19.5	205.291	99.502	-280.898
15	-0.24368	-13.7	202.539	70.552	-289.528
12	-0.15514	-8.8	201.037	45.685	-294.477
9	-0.08705	-5	200.328	25.844	-296.877
6	-0.03865	-2.2	200.065	11.509	-297.778
3	-0.00966	-0.6	200.004	2.878	-297.986
0	0.000003	0	200	0	-298

Таким образом, решение системы уравнений позволяет моделировать различные ситуации и проводить численные расчеты. Вычисленные значения углов отклонения кабеля в верхней точке, натяжения и длины кабеля в зависимости от различных скоростей ветра позволяют оценить горизонтальную и вертикальную составляющие силы, действующей от кабеля на платформу. Полученные данные важны для оценки величины полезной нагрузки и необходимой передаваемой с земли на борт мощности для полетов в ветровых условиях, а также при проектировании системы управления позиционированием БПЛА.

4. Заключение

В статье сформулирована задача определения воздействий кабеля на платформу при наличии ветровой нагрузки. Для поставленной задачи разработана математическая модель поведения системы платформа–кабель, учитывающая ветровое воздействие, а также необходимое для успешной работы системы натяжение кабеля лебедкой. Положение равновесия кабеля описывается системой дифференциальных уравнений, из которых одно является линейным дифференциальным уравнением первого порядка, а два других – нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка. На основе решения системы вычислены зависимости горизонтальной и вертикальной составляющих воздействия кабеля на платформу как функции высоты положения платформы, ее бокового отклонения от заданной точки зависания, направления и скорости ветра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S. Kiribayashi, J. Ashizawa, K. Nagatani.* Modeling and design of tether powered multi-copter // In 2015 IEEE International Symposium on Safety, Security, and Rescue Robotics, 2015.
2. *В.М. Вишнеvский, Б.Н. Терещенко.* Способ удаленного проводного электропитания объектов // Патент на изобретение № 2572822 РФ; Заявл. 16.12.2015;
V.M. Vishnevskii, B.N. Tereshchenko. Sposob udalennogo provodnogo elektropitaniia obieektov // Patent № 2572822 RF; Reg. date 16.12.2015.
3. *V. Raj, N. Raj, J. Kumar.* An Approach for Power Optimization of Tethered UAV. IOSR // Journal of Electrical and Electronics Engineering, 2016, v.11, Issue 5, ver. I, p.23-25.
4. *G.W. Wasantha and S. Wang.* Heavy Payload Tethered Hexarotors for Agricultural Applications: Power Supply Design, 2015.
5. *G. Wang, W. Samarathunga, S. Wang.* Uninterruptible Power Supply Design for Heavy Payload Tethered Hexarotors // International Journal of Emerging Engineering Research and Technology, 2016, v.4, Issue 2, p.16-21.
6. *V.M. Vishnevsky, B.N. Tereshchenko, D.A. Tumchenok, A.M. Shirvanyan.* Optimal Method for Uplink Transfer of Power and the Design of High-Voltage Cable for Tethered High-Altitude Unmanned Telecommunication Platforms. Distributed Computer and Communication Networks, series Communications in Computer and Information Science, 2017, v.700, p.240-247.
7. *В.М. Вишнеvский, Б.Н. Терещенко.* Разработка и исследование нового поколения высотных привязных телекоммуникационных платформ. Т-Comm, 2013, № 7, с.20-24;
V.M. Vishnevskii, B.N. Tereshchenko. Razrabotka i issledovanie novogo pokoleniia vysotnykh priviaznykh telekommunikatsionnykh platform. T-Comm, 2013, № 7, s.20-24.
8. ECA Group, French DGA. Доступно: <http://www.ecagroup.com/en/corporate/navy-recognition-reports-eca-group-and-french-dga-working-tethered-uav-project-similar> (Дата обращения: 27.12.2018).
9. Aerial Dagnet. Доступно: https://www.fbo.gov/index?s=opportunity&mode=form&id=84-ea6bae9dc2a6e6437abeb570c3a77a&tab=core&_cvview=0 (Дата обращения: 27.12.2018).
10. *Д.Р. Меркин.* Введение в механику гибкой нити. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1980, 240 с.;
D.R. Merkin. Vvedenie v mekhaniku gibkoi niti. – М.: Nauka. Glavnaia redaktsiia fiziko-matematicheskoi literatury, 1980, 240 s.
11. *Н.Е. Кочин.* Об изгибе троса змейкового аэростата под действием ветра. Собр. соч., т. II. – М–Л.: изд. АН СССР, 1949, с.536–548;
N.E. Kochin. Ob izgibe trosa zmeikovogo aerostata pod deistviem vetra. Sobr. soch., t. II. – М–Л.: izd. AN SSSR, 1949, s.536–548.
12. *В.В. Костенко, О.Ю. Львов.* Комбинированная система связи и навигации автономного подводного робота с поплавковым модулем // Подводные исследования и робототехника, 2017, №1 (23), с.31–43;
V.V. Kostenko, O.Iu. Lvov. Kombinirovannaiia sistema sviazi i navigatsii avtonomnogo podvodnogo robota s poplavkovym modulem // Podvodnye issledovaniia i robototekhnika, 2017, №1 (23), s.31-43.

13. В.Т. Грумондз, Р.В. Пильгунов, М.В. Виноградов. Динамика продольного движения подводного буксируемого аппарата в задаче мониторинга заданной области континентального шельфа // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Машиностроение, 2017, №7, с.19-34;
V.T. Grumondz, R.V. Pilgunov, M.V. Vinogradov. Dinamika prodolnogo dvizheniia podvodnogo buksiruемого apparatusa v zadache monitoringa zadannoi oblasti kontinentalnogo shelfa // Vestnik MGTU im. N.E. Bauman. Ser. Mashinostroenie, 2017, №7, s.19-34.
14. M. Tognon, A. Franchi. Position tracking control for an aerial robot passively tethered to an independently moving platform. IFAC PapersOnLine, 2017, v.50, №1, p.1069–1074.
15. S. Kiribayashi, K. Yakushigawa, K. Nagatani. Design and Development of Tether-Powered Multirotor Micro Unmanned Aerial Vehicle System for Remote-Controlled Construction Machine // Springer, Field and Service Robotics, 2018, p.637-648.
16. Г. Эберт. Краткий справочник по физике: справочное издание / пер. со 2-го нем. изд. [Н.М. Шикунинной]; под ред. К.П. Яковлева. – М.: Физматгиз, 1963, 552 с.;
H. Ebert, (ed.). Physikalisches Taschenbuch // Vieweg, Braunschweig, Germany, 1976.
17. Н.Н. Калиткин. Численные методы. – М.: Наука, 1978, 508 с.;
N.N. Kalitkin. Chislennyye metody. – М.: Nauka, 1978, 508 p.
18. E. Süli, D. Mayers. An Introduction to Numerical Analysis. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. ISBN 0-521-00794-1.
19. Б.П. Демидович, И.А. Марон. Основы вычислительной математики. 2 изд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963, 659 с.;
B.P. Demidovich, I.A. Maron. Osnovy vychislitelnoi matematiki. 2 izd. – М.: Gos. izd-vo. Fiz.-Mat. Lit., 1963, 659 s.
20. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. Численные методы. 4 изд. – М.: БИНОМ, 2006, 636 с.;
N.S. Bakhvalov, N.P. Zhidkov, G.M. Kobelkov. Chislennyye metody. 4 izd. – М.: BINOM, 2006, 636s.

Поступила в редакцию 05.03.2019

После доработки 23.05.2019

Принята к публикации 01.07.2019