

## **РАДИАЛЬНЫЙ ДВУХСЕКТОРНЫЙ ГАЗОВЫЙ ПОДШИПНИК С МАКСИМАЛЬНОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ**

© 2019 г. *Ю.Я. Болдырев*

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого,  
Институт прикладной математики и механики  
[boldyrev@phmf.spbstu.ru](mailto:boldyrev@phmf.spbstu.ru)

DOI: 10.1134/S023408791911008X

Рассматривается вариационная задача для радиального газового подшипника скольжения, имеющего два сектора. Поле давления в газовом слое описывается нелинейным уравнением Рейнольдса для произвольных чисел сжимаемости. В качестве функционала вариационной задачи выступает величина главного вектора сил давления. Проводится качественный анализ системы необходимых условий экстремума, на основе которого построена вычислительная процедура. На основе анализа полной системы необходимых условий показано, что на каждом из секторов профиль является кусочно линейным и одноступенчатым, при этом один сектор обеспечивает только разряжение, тогда как другой – только сжатие газа.

Ключевые слова: газовая смазка, вариационное исчисление, максимум подъемной силы, произвольные числа сжимаемости.

### **TWO SECTORS RADIAL GAS BEARING WITH MAXIMUM LOAD CAPACITY**

*Y.Y. Boldyrev*

Peter the Great Saint-Petersburg Polytechnic University,  
Institute of Applied Mathematics and Mechanics  
[boldyrev@phmf.spbstu.ru](mailto:boldyrev@phmf.spbstu.ru)

The variational problem for a radial gas sliding bearing with two sectors is considered. The pressure distribution in the gas layer is described by a nonlinear Reynolds equation for arbitrary compressibility numbers. Magnitude of the principal pressure force vector is used as the variational problem functional. A qualitative analysis of the extremum necessary conditions is carried out, and a computational procedure is constructed. It is shown on the basis of complete system of necessary conditions analysis that the profile of each sector is piecewise linear and single-stage, herewith one sector provides only a gas depression, while the another one – only the gas compression.

Keywords: gas lubrication, calculus of variations, load capacity maximum, arbitrary compressibility numbers.

**Введение.** Узлы на газовой смазке относятся к высокотехнологичным изделиям и используются в широком круге отраслей: от прецизионного приборостроения и машиностроения до мощных турбокомпрессорных машин. Обладая массой достоинств (малое трение, способность работать в широком диапазоне температур, работа на очень высоких оборотах и др.), они имеют серьезный недостаток – относительно низкую несущую способность. Работа посвящена проблеме повышения несущей способности узлов на газовой смазке на основе подходов оптимального проектирования. Отметим, что принципиально сами технологии оптимального проектирования любых изделий возможны только на основе подходов математического моделирования. Оно, являясь универсальным инструментарием, пожалуй, наиболее сильно проявляется именно в задачах оптимизации, поскольку этот класс задач, опять-таки принципиально, не разрешим на основе физического эксперимента.

Впервые задача об оптимальной форме профиля в задачах теории смазки была рассмотрена Рэлеем в 1918 г. [1]. Отметим, что Рэлей сильно опередил свое время, – первая работа, продолжившая его исследования, была опубликована почти через 50 лет [2]. В дальнейшем это направление развивалось преимущественно в работах отечественных и американских исследователей [2-13].

В настоящей работе, в качестве характерного примера подходов математического моделирования к решению задач оптимизации, рассматривается вариационная задача для одномерного радиального подшипника с газовой смазкой, имеющего два сектора. Приведены результаты качественного анализа системы необходимых условий экстремума, на основе которых построена численная процедура. Установлено позитивное влияние области разряжения в газовом слое на величину подъемной силы.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим одномерный радиальный газовый подшипник, имеющий два сектора с одинаковыми углами охвата:  $[-\pi/2, \pi/2]$  и  $[\pi/2, 3\pi/2]$  соответственно (рис.1). Сектора сообщаются с внешней средой на границах, которые расположены на оси  $x'$  декартовых координат  $(x', y')$ <sup>1</sup>, в центре которых находится ось ротора подшипника радиуса  $R$ . Центральный угол  $\theta$  отсчитывается от оси  $y'$  (направленной вверх) в направлении вращения ротора против часовой стрелки. Угловая скорость  $\omega$  постоянна. Предполагаем, что линия действия вектора нагрузки  $\mathbf{W}'$  имеет угол  $\psi$  с

---

<sup>1</sup> Штрихом всюду далее, где это необходимо, отмечены размерные величины.

осью  $y'$ . Стационарное поле давления в газовом слое описывается уравнением Рейнольдса газовой смазки<sup>2</sup> [12],

$$\frac{d}{d\theta} \left( ph^3 \frac{dp}{d\theta} - \Lambda ph \right) = 0,$$

которое запишем в следующем безразмерном виде:

$$\frac{dp}{d\theta} = \Lambda \frac{Q + ph}{ph^3}, \quad \frac{dQ}{d\theta} = 0, \quad (1)$$

где  $p$  и  $h$  – безразмерные избыточное давление и толщина смазочного слоя, отнесенные к давлению внешней среды  $p_a$  и к заданному минимальному значению зазора  $h_{\min}$ ;  $\Lambda = 6\mu\omega R / h_{\min}^2 p_a$  – число сжимаемости,  $\mu$  – вязкость газа и  $\omega$  – угловая скорость. Безразмерная величина  $Q = \text{const}$  в уравнениях (1), отнесенная к  $h_{\min}\omega R$ , пропорциональна расходу газа.

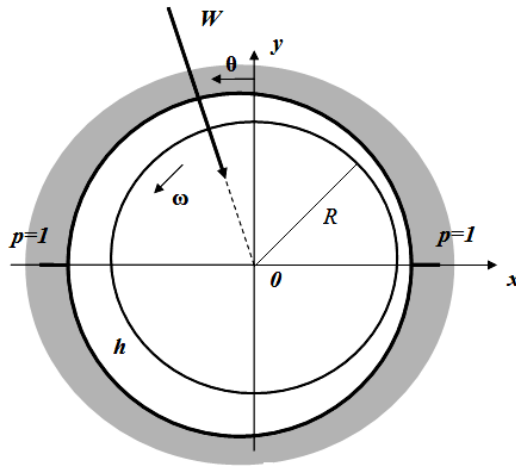


Рис.1. К постановке задачи.

Запишем краевые условия к уравнениям (1), заключающиеся в равенстве давления атмосферному на границах секторов:

$$p(-\pi/2) = p(\pi/2) = 1. \quad (2)$$

В качестве функционала задачи выберем взятую со знаком минус величину модуля главного вектора сил давления  $\mathbf{F}$ , направленную по линии

<sup>2</sup> Отметим, что уравнение Рейнольдса может быть получено из уравнения Навье-Стокса в предположении, что величина отношения  $h_{\min}/R$  имеет порядок малости  $10^{-3} - 10^{-4}$ .

действия нагрузки  $\mathbf{W}$  и нормированную к  $R p_a$

$$J = -|F| = -\sqrt{F_x^2 + F_y^2}, \quad (3)$$

где  $F_x$  и  $F_y$  – соответствующие компоненты вектора  $\mathbf{F}$ , у которых знак минус обусловлен направлением внешней нормали к поверхности ротора:

$$F_x = -\int_0^{2\pi} (p-1) \sin\theta d\theta, \quad F_y = -\int_0^{2\pi} (p-1) \cos\theta d\theta. \quad (4)$$

Будем разыскивать минимум функционала (3) при условии, что толщина газового слоя должна удовлетворять неравенству

$$1 \leq h(x), \quad (5)$$

определяемому способом нормировки функции  $h$  (для заданного значения  $h_{\min}$ ).

Сформулируем задачу Лагранжа вариационного исчисления, которая сводится к разысканию кусочно-непрерывной функции  $h(x)$ , непрерывной функции  $p(x)$  и постоянной  $Q$ , удовлетворяющих ограничениям (1), (2), (5) и реализующих экстремум функционала (3), составляющие которого определяются соотношениями (4). Отметим, что первая вариационная задача для радиальных подшипников, являющаяся обобщением задачи Рэлея [1], была решена Мэдеем в 1970 г. [4], где было показано, что в случае несжимаемого газа оптимальным является кусочно-ступенчатый профиль. В [6] было установлено, что для радиальных секторных подшипников в случае несжимаемого газа оптимальными также являются кусочно-постоянные профили. И, наконец, в [7] было установлено, что оптимальный радиальный подшипник с газовой смазкой является замкнутым и имеет кусочно-линейный профиль во всем диапазоне чисел сжимаемости. Результаты [7] можно рассматривать как случай «односекторного» подшипника. Наличие двух секторов в настоящем случае порождает совокупность двух отдельных задач (для каждого из секторов), которые «аэродинамически независимы» и связаны только посредством функционала (3).

**2. Система необходимых условий экстремума** [14,15]. Начнем с того, что заменим ограничение – неравенство (5) ограничением – равенством

$$\psi = h - 1 - v^2 = 0,$$

где  $v(x)$  – вспомогательная функция, и составим расширенный функционал

$$I = \int_0^{2\pi} f \left( p, Q, h, v, \frac{dp}{d\theta}, \frac{dQ}{d\theta} \right) d\theta. \quad (6)$$

Запишем первую вариацию функции  $f$  в согласии с системой ограничений задачи (1), (2), (5)

$$\delta f = -\frac{1}{|F|} (F_y \cos \theta + F_x \sin \theta) \delta p + \lambda_0 \delta \frac{dQ}{d\theta} + \lambda_1 \delta \left( \frac{dp}{d\theta} - \Lambda \frac{Q + ph}{ph^3} \right) + \lambda_2 \delta \psi, \quad (7)$$

где  $\lambda_0$ ,  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – функциональные множители Лагранжа, а символ  $\delta$  обозначает варьирование стоящих за ним величин.

Уравнения Эйлера – Лагранжа [14,15] функционала (6)

$$-\frac{\lambda_1}{ph^3} - \frac{d\lambda_0}{d\theta} = 0, \quad \frac{1}{|F|} (F_y \cos \theta + F_x \sin \theta) + \lambda_1 \frac{\Lambda Q}{p^2 h^3} - \frac{d\lambda_1}{d\theta} = 0, \quad (8)$$

$$-\frac{\lambda_1}{h^4} \Lambda (3Q + 2ph) - \lambda_2 = 0, \quad \lambda_2 v = 0. \quad (9)$$

Условия трансверсальности [14,15] в концевых точках каждого из секторов, которые обозначим  $\theta_s^i$  и  $\theta_f^i$  ( $i=1,2$ ), имеют вид в согласии с (6) и (7)

$$\left[ -\lambda_0 \frac{dQ}{d\theta} - \lambda_1 \frac{dp}{d\theta} \right]_{\theta_s^i} \delta \theta_s^i + \left[ \lambda_0 \frac{dQ}{d\theta} + \lambda_1 \frac{dp}{d\theta} \right]_{\theta_f^i} \delta \theta_f^i + \lambda_0 (\theta_f^i) \delta Q(\theta_f^i) - \lambda_0 (\theta_s^i) \delta Q(\theta_s^i) = 0, \quad i=1,2,$$

где учтены краевые условия (2). Далее, с учетом неподвижности границ секторов для вариаций координат в граничных точках, имеем:  $\delta \theta_s^i = \delta \theta_f^i = 0$  ( $i=1,2$ ), откуда получаем краевые условия для множителей Лагранжа  $\lambda_0$  для каждого из секторов

$$\lambda_0(\theta_f^i) = 0, \quad \lambda_0(\theta_s^i) = 0, \quad i=1,2. \quad (10)$$

Из условий Эрдманна–Вейерштрасса [14,15]

$$\left( -\lambda_0 \frac{dQ}{d\theta} - \lambda_1 \frac{dp}{d\theta} \right) \Big|_{\theta_r^-}^{\theta_r^+} \delta \theta_r - \lambda_0 \Big|_{\theta_r^-}^{\theta_r^+} \delta Q(\theta_r) + \lambda_1 \Big|_{\theta_r^-}^{\theta_r^+} \delta p(\theta_r) = 0$$

в точках  $\theta_r$  возможного разрыва функции  $h$  на каждом из секторов, где наряду с независимостью вариаций учтена непрерывность давления, а символом  $[\cdot]_{-}^{+}$  обозначена разность величин, вычисленных непосредственно слева и справа от точки разрыва  $\theta_r$  функции  $h$ ; имеем систему соотношений

$$\left[ -\lambda_1 \frac{dp}{d\theta} \right]_{-}^{+} = 0, \quad [\lambda_0]_{-}^{+} = 0, \quad [\lambda_1]_{-}^{+} = 0, \quad (11)$$

показывающих непрерывность величин в квадратных скобках при переходе через точки разрыва функции  $h$ .

Неравенство Вейерштрасса сильного минимума функционала [14,15] имеет вид

$$E = -\lambda_1 (\overline{dp/d\theta} - dp/d\theta) > 0, \quad (12)$$

где чертой обозначены допустимые значения производной, откуда следует, что на оптимальном профиле величина  $\lambda_1 dp/d\theta$  имеет максимальное значение по отношению к допустимым решениям.

Форма профиля определяется уравнениями (9), второе из которых дает такие возможные варианты на каждом из секторов

$$\lambda_2=0, \quad v=0, \quad h=1; \quad \lambda_2 \neq 0, \quad v=0, \quad h=1; \quad \lambda_2=0, \quad v \neq 0, \quad h > 1, \quad (13)$$

но тогда для последнего случая (13) из первого уравнения (9) получаем

$$h = -(3Q/2p). \quad (14)$$

Уравнение (14) показывает, что величина  $Q < 0$ , при этом в согласии с (1) на участках с  $h > 1$  на каждом из секторов имеем

$$\frac{dp}{d\theta} = \frac{4}{27} \Lambda \frac{p^2}{Q^2}, \quad (15)$$

т.е. там где  $h > 1$ ,  $dp/d\theta > 0$ . Для случая  $h=1$  аналогично получим

$$\frac{dp}{d\theta} = \Lambda (1 + Q/p), \quad (16)$$

откуда находим, что в областях, где  $h=1$ , давление может только понижаться, причем здесь величина  $Q/p$  отрицательна и  $|Q/p| \geq 1$ . Обращаясь к условиям Эрдмана–Вейерштрасса (11), по непрерывности функции  $\lambda_1$  в точках  $\theta_r$ ,

разрыва функции профиля  $h$  получаем, что на каждом из секторов

$$\lambda_1(\theta_s)=0. \quad (17)$$

Знак функции  $\lambda_1$  определяется неравенством Вейерштрасса (12). Действительно, при  $h>1$  с учетом (15) для любого допустимого  $H$  имеем

$$\frac{1}{3} \lambda_1 \Lambda \frac{h}{H^3} \left( 2 + \frac{H}{h} \right) \left( \frac{H}{h} - 1 \right)^2 \geq 0,$$

откуда  $\lambda_1 \geq 0$  при  $h>1$ . Аналогично при  $h=1$  для любого допустимого  $H$

$$\lambda_1 \Lambda \frac{Q}{p} \left( 1 - \frac{1}{H} \right) \left[ \frac{1}{H^2} + \left( \frac{1}{H} + 1 \right) \left( 1 + \frac{p}{Q} \right) \right] \geq 0,$$

откуда  $\lambda_1 \leq 0$ .

Далее условимся при необходимости отмечать индексами «1» и «2» параметры первого, «верхнего», и второго, «нижнего», секторов соответственно.

Итак, на каждом секторе знак градиента  $dp/d\theta$  совпадает со знаком функции  $\lambda_1$ , при этом число ступеней-переходов от  $h=1$  к  $h>1$  определяется числом нулей у  $\lambda_1$  в согласии с (17). Прежде чем переходить к определению числа ступеней на секторах, необходимо уточнить класс непрерывных допустимых функций  $p(\theta)$ , дающих минимум функционалу (3). Будем предполагать, что главный вектор сил давления  $\mathbf{F}$  имеет направление, близкое к направлению оси  $y$ . В таком случае характер работы секторов кардинально различен, – первый, «верхний», должен обеспечить максимальное понижение давления, т.е. там всюду  $p \leq 1$ , тогда как второй, «нижний», должен обеспечить максимальное повышение давления, т.е. там всюду  $p \geq 1$ . Эти условия выделяют в классе непрерывных функций подмножества допустимых функций для каждого из секторов. В силу сказанного можем утверждать, что в начальной точке  $\theta_s^2 = \pi/2$  «нижнего» сектора  $dp/d\theta > 0$ , тогда как в конечной точке  $\theta_f^2 = 3\pi/2$  должно быть  $dp/d\theta < 0$ . Отсюда по неравенству Вейерштрасса в этих точках получим:  $\lambda_1(\theta_f^2) \leq 0$ ,  $\lambda_1(\theta_s^2) \geq 0$ . Тогда в согласии с (10) и (12), множитель Лагранжа  $\lambda_0(\theta)$  в окрестности левой границы  $\theta_s^2$  растет от нуля, тогда как на правой границе  $\theta_f^2$  убывает до нуля. В то же время в точках разрыва профиля  $h$ , в согласии с (11), функция  $\lambda_1$  обязана обра-

щаться в ноль, откуда из (7) и (17) находим для таких точек

$$\frac{d\lambda_0}{d\theta} = 0, \quad \theta = \theta_r.$$

Отсюда следует, что точки разрыва  $h$  являются точками экстремума функции  $\lambda_0(\theta)$ , при этом число таких точек определяет число ступеней на секторе. Сразу же укажем, что число ступеней на «нижнем» секторе не более одной, поскольку как двухступенчатый профиль, с размещением области с  $h=1$  между областями с  $h>1$ , так и многоступенчатый профили приводят к менее эффективным допустимым функциям давления  $p(\theta)$ .

Итак, «нижний» сектор одноступенчатый, причем в передней части, где  $h>1$  давление растет, тогда как в области с  $h=1$  оно падает. Кардинально иная ситуация имеет место на первом, «верхнем», секторе. Действительно, здесь в начальной точке  $\theta_s^1 = -\pi/2$  необходимо  $dp/d\theta < 0$ , и  $p \leq 1$  всюду при  $\theta \in [\theta_s^1, \theta_f^1]$  – как того требует указанный выше выбор допустимых функций, тогда как в конечной точке  $\theta_f^1 = \pi/2$  для выполнения краевых условий (2) необходимо  $dp/d\theta > 0$ . При этом качественное поведение функции  $\lambda_0(\theta)$  с точностью до знака аналогично её поведению на нижнем секторе. Т.о., «верхний» сектор в передней части по направлению скольжения имеет область с  $h=1$ , где давление падает до некоторого минимального значения в точке  $\theta_r^1$  – точке разрыва профиля, а затем при  $h>1$  давление растет до его значения на границе  $\theta_f^1$ .

Интегрируя уравнения для давлений (1) в областях с  $h>1$ , получим для «нижнего» сектора

$$p(\theta) = 1 / \left[ \left( 1 - \frac{4}{27} \frac{\Lambda}{Q_2^2} (\theta - \theta_s^{(2)}) \right) \right], \quad (18)$$

откуда из (14) имеем такое выражение, показывающее, что профиль  $h$  здесь линейный

$$h(\theta) = -\frac{3}{2} Q_2 \left[ 1 - \frac{4}{27} \frac{\Lambda}{Q_2^2} (\theta - \theta_s^{(2)}) \right],$$

где  $Q_2$  отвечает величине расхода на «нижнем» секторе. Интегрируя (16), получим выражение для давления в области с  $h=1$



$$p(\theta) = (1 + Q_2) \exp\left(\frac{\Lambda(\theta_f^{(2)} - \theta) + p - 1}{Q_2}\right) - Q_2. \quad (19)$$

Аналогичные выражения можно записать и для «верхнего» сектора. Отметим, что как на «нижнем», так и на «верхнем» профиле  $h$  имеет место традиционный «смазочный клин». При этом если на «нижнем» секторе:  $h(\theta_s^{(2)}) > h(\theta_r^{(2)})$ , что обеспечивает повышение давления газа в направлении вращения, то на верхнем:  $h(\theta_r^{(1)}) > h(\theta_f^{(1)})$ , что также приводит к росту давления в направлении вращения от его минимального значения в точке  $\theta_r^{(1)}$ . Таким образом, на «верхнем» профиле на участке с  $h=1$  происходит понижение давления газа до его минимального значения в точке  $\theta_r^{(1)}$  с последующим восстановлением его величины до значения во внешней среде на участке с  $h>1$ .

Итак, вариационная задача свелась к параметрической – при заданном значении числа  $\Lambda$  требуется найти четыре параметра:  $Q_1$  и  $\theta_r^{(1)}$  для первого сектора, и  $Q_2$  и  $\theta_r^{(2)}$  – для второго. Однако определением этих параметров решение задачи не исчерпывается, поскольку характер функционала (3) требует определенности в выборе направления действия нагрузки  $\mathbf{W}$ , которая должна действовать по линии направления главного вектора сил давления  $\mathbf{F}$ . Последнее приводит к требованию поиска угла положения  $\psi$ , который определяется на основе рассмотрения отношения величин компонент  $F_y$  и  $F_x$  главного вектора сил давления (4).

Задача решалась численно, на основе определения параметров  $Q_1$ ,  $\theta_r^{(1)} = \theta_1$  и  $Q_2$ ,  $\theta_r^{(2)} = \theta_2$ , путем сшивания давления на основе выбора расходов  $Q_1$  и  $Q_2$  в точках  $\theta_1$  и  $\theta_2$  с использованием соотношений (18) и (19). Отметим плохую обусловленность уравнения (19), усугубляющуюся для его аналога на «верхнем» секторе, где с ростом числа  $\Lambda$  величина  $Q_1 \rightarrow 1.0$  и, например, для  $\Lambda=50$  имеем  $Q_1 = -1.0000000003218853448$ , и для больших значений  $\Lambda$  при вычислениях уже недостаточно 32-значной мантиссы.

В табл.1 и 2 приведены характеристики оптимальных профилей при различных числах сжимаемости. Отметим немонотонный характер изменения положения точки разрыва  $\theta_1$  на «верхнем» секторе. Как видно из табл.2, точка разрыва  $\theta_1$  с ростом числа сжимаемости  $\Lambda$  сдвигается к началу профиля, т.е. к точке  $\theta_s^{(1)} = -\pi/2$  до значения  $\theta_1 = -1.24911 \approx -71.6^\circ$  при  $\Lambda \approx 17$ , а затем удаляется от него вплоть до некоторого предельного положения, отвечающего  $\Lambda = \infty$ . Такой характер профиля обусловлен тем, что при неболь-

ших числах  $\Lambda$  малая длина участка с  $h=1$  обеспечивает наибольшее падение давления при относительно малых величинах  $|dp/d\theta|$ , тогда как с ростом числа  $\Lambda$  длина участка с  $h=1$  растет вместе с  $\Lambda$ , что и дает значительные величины  $|dp/d\theta|$ , приводя к большему падению давления.

Таблица 1.

$\Lambda$	$J$	$\Psi$	$p_{\min}$	$Q_1$	$p_{\max}$	$Q_2$
$\Lambda \rightarrow 0$	-0.530846	0.000000	-0.214347	-1.208154	0.214346	-1.208154
0.01	-0.005308	0.000440	0.997856	-1.207205	1.002143	-1.209131
0.1	-0.053071	0.004348	0.978541	-1.198724	1.021393	-1.217921
0.5	-0.263787	0.021374	0.893165	-1.164540	1.105346	-1.259783
1.0	-0.518426	0.040991	0.791608	-1.130082	1.204117	-1.316662
2.0	-0.978220	0.073071	0.622320	-1.084524	1.375943	-1.435302
3.0	-1.365381	0.098142	0.500847	-1.058606	1.518218	-1.550319
4.0	-1.691174	0.119131	0.414913	-1.042769	1.639746	-1.657699
5.0	-1.970011	0.137437	0.352543	-1.032320	1.746899	-1.757251
7.5	-2.529194	0.175282	0.254547	-1.017443	1.974699	-1.977605
10.0	-2.965812	0.205503	0.198686	-1.009833	2.166861	-2.167776
12.5	-3.328971	0.230839	0.163004	-1.005451	2.336657	-2.336973
15.0	-3.643568	0.252969	0.138433	-1.002836	2.490569	-2.490891
16.0	-3.759186	0.261175	0.130655	-1.002120	2.548965	-2.549045
16.5	-3.815148	0.265164	0.127108	-1.001821	2.577417	-2.577483
16.75	-3.842698	0.267132	0.125411	-1.001685	2.591491	-2.591551
17.0	-3.869971	0.269083	0.123763	-1.001557	2.605467	-2.605523
17.5	-3.923716	0.272934	0.120605	-1.001323	2.633133	-2.633179
18.0	-3.976441	0.276721	0.117619	-1.001119	2.660431	-2.660469
19.0	-4.079035	0.284100	0.112109	-1.000787	2.713979	-2.714006
20.0	-4.178126	0.291224	0.107139	-1.000542	2.769602	-2.766235
25.0	-4.630781	0.322741	0.088058	-1.000068	3.010417	-3.010422
30.0	-5.029394	0.347546	0.074963	-1.000006	3.231425	-3.231426
50.0	-6.311245	0.407571	0.047211	-1.000000	3.967492	-3.967492
100.0	-8.557549	0.469500	0.024670	-1.000000	5.311328	-5.311328

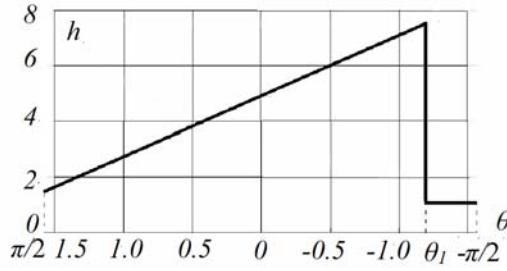
На рис.2 и 3 приведены графики, демонстрирующие характерный вид функций  $h(\theta)$ ,  $p(\theta)$  и  $\lambda_0(\theta)$  для каждого из секторов.

Представляет интерес рассмотрение асимптотического поведения параметров оптимальных профилей при  $\Lambda \rightarrow 0$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

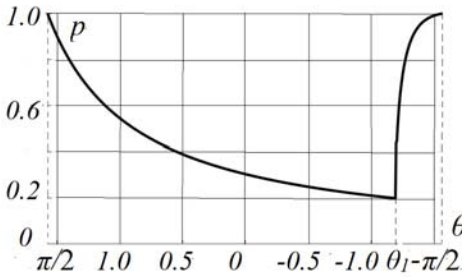
Таблица 2.

$\Lambda$	$J$	$\theta_1$	$h(-\pi/2)$	$h(\theta_1)$	$\theta_2$	$h(\pi/2)$	$h(\theta_2)$
$\Lambda \rightarrow 0$	-0.530846	-0.541050	1.812231	1.812231	3.682640	1.812231	1.812231
0.01	-0.005308	-0.542592	1.810808	1.814698	3.681216	1.813696	1.809817
0.1	-0.053071	-0.556200	1.798085	1.837516	3.667882	1.826882	1.788618
0.5	-0.263787	-0.619112	1.746810	1.955753	3.612750	1.889674	1.709577
1.0	-0.518426	-0.698513	1.695124	2.141366	3.554440	1.974993	1.640200
2.0	-0.978220	-0.838350	1.626786	2.614068	3.470483	2.152953	1.564711
3.0	-1.365381	-0.942137	1.587910	3.170452	3.416674	2.325479	1.531716
4.0	-1.691174	-1.016719	1.564153	3.769832	3.379994	2.486548	1.516423
5.0	-1.970011	-1.071379	1.548479	4.392318	3.353156	2.635876	1.508889
7.5	-2.529194	-1.157647	1.526165	5.995609	3.308161	2.966407	1.502207
10.0	-2.965812	-1.205321	1.514750	7.623826	3.278926	3.251665	1.500634
12.5	-3.328971	-1.232309	1.508176	9.252371	3.257839	3.505459	1.500204
15.0	-3.643568	-1.245764	1.504249	10.86626	3.241885	3.736337	1.500070
16.0	-3.759186	-1.248167	1.503180	11.50496	3.236571	3.823567	1.500047
16.5	-3.815148	-1.248812	1.502732	11.82250	3.234106	3.866225	1.500039
16.75	-3.842698	-1.249003	1.502527	11.98080	3.232919	3.887327	1.500035
17.0	-3.869971	-1.249113	1.502335	12.13877	3.231761	3.908284	1.500032
17.5	-3.923716	-1.249088	1.501985	12.45371	3.229525	3.949769	1.500026
18.0	-3.976441	-1.248758	1.501678	12.76729	3.227392	3.990704	1.500022
19.0	-4.079035	-1.247285	1.501181	13.39039	3.223408	4.071009	1.500015
20.0	-4.178126	-1.244880	1.500813	14.00815	3.219755	4.149353	1.500010
25.0	-4.630781	-1.225740	1.500099	17.03539	3.204893	4.515632	1.500002
30.0	-5.029394	-1.205742	1.500010	20.01015	3.193201	4.847139	1.500000
50.0	-6.311245	-1.153683	1.500000	31.77199	3.160219	5.951238	1.500000
100.0	-8.557549	-1.097883	1.500000	60.80399	3.116471	7.966993	1.500000

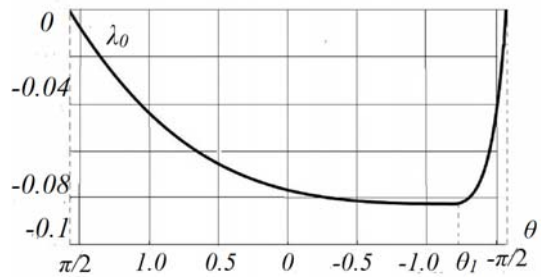
В первом случае (при  $\Lambda \rightarrow 0$ ) уравнения (1) линеаризуются и при анализе соответствующей вариационной задачи приводят к кусочно-постоянным профилям на каждом из секторов с такими параметрами:  $Q_1=Q_2=-1.208154$ ,  $\theta_1=-31.000^\circ$ ,  $\theta_2=211.000^\circ$ , причем  $p(\theta_1)=-0.214346$  и  $p(\theta_2)=0.214346$ . При этом значение функционала есть:  $J=-0.5308449\Lambda$ . Замечательным является тот факт, что это решение совпадает с двумя другими решениями, связанными с совершенно иными постановками краевых задач для радиальных газовых подшипников. Это задача Рэлея для случая радиального подшипника [4] – задача с краевыми условиями первого рода для давления на границах, и периодическая задача, т.е. задача с условием периодичности для давления на границах и условием газообмена на бесконечно удаленных торцах [10].



а) Функция профиля  $h(\theta)$ , скольжение справа – налево.

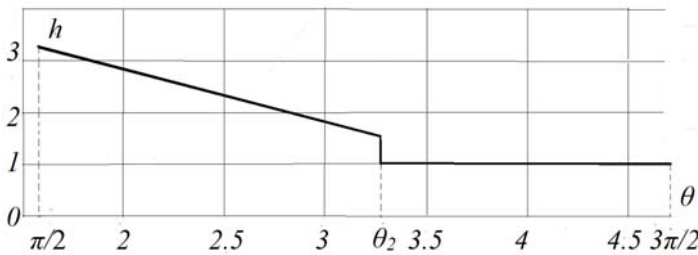


б) Давление  $p(\theta)$ .

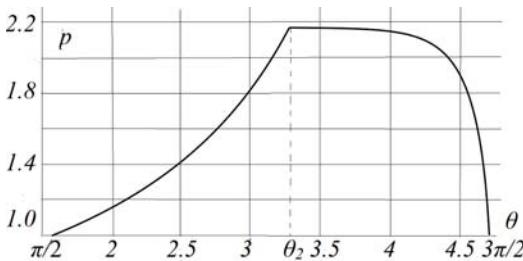


в) Множитель Лагранжа  $\lambda_0(\theta)$ .

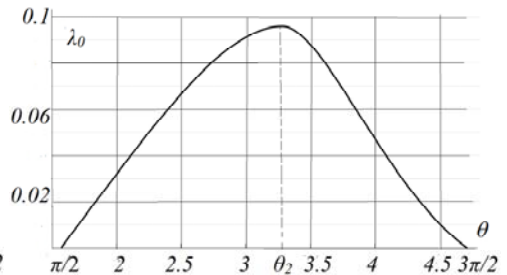
**Рис.2.** Функции профиля  $h(\theta)$ ,  $p(\theta)$  и  $\lambda_0(\theta)$  на «верхнем» секторе для числа сжимаемости  $\Lambda=10$ .



а) Функция профиля  $h(\theta)$ , скольжение слева – направо.



б) Давление  $p(\theta)$ .



в) Множитель Лагранжа  $\lambda_0(\theta)$ .

**Рис.3.** Функции профиля  $h(\theta)$ ,  $p(\theta)$  и  $\lambda_0(\theta)$  на «нижнем» секторе для числа сжимаемости  $\Lambda=10$ .

В случае, отвечающем  $\Lambda \rightarrow \infty$ , различие в характере поля давления на каждом из секторов проявляется наиболее сильно. На «нижнем» секторе, в согласии с исходным уравнением Рейнольдса, при  $\Lambda \rightarrow \infty$  имеем:  $ph = -Q_2$ , и профиль безразмерного давления будет вырождаться в ступенчатый профиль вида

$$p(\theta) = \begin{cases} 1, & \pi/2 \leq \theta \leq \theta_2, \\ -Q_2, & \theta_2 < \theta \leq 3\pi/2. \end{cases} \quad (20)$$

При этом, используя «сшивку» давления по непрерывности в точке разрыва профиля  $\theta_2$  на основании (18), можно установить связь между  $Q_2$  и положением точки  $\theta_2$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$  (с учетом условия  $p = -Q_2$  при  $h=1$ , исходя из предельного соотношения (20)) в виде

$$Q_2 = -\frac{1}{2} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{16}{27} \Lambda (\theta_2 - \pi/2)} \right). \quad (21)$$

Аналогично на «верхнем» секторе, исходя из требований минимизации расхода  $Q_1$ , при  $\Lambda \rightarrow \infty$  получаем:  $-Q_1 = 1$ , и безразмерный профиль давления принимает следующий предельный вид:

$$p(\theta) = \begin{cases} 1, & \theta_1 \geq \theta \geq -\pi/2, \\ 0, & \pi/2 > \theta > \theta_1, \end{cases} \quad (22)$$

где равенство  $p(\theta) = 0$  на промежутке  $(\theta_1, \pi/2)$  необходимо понимать в смысле раскрытия неопределенности ( $p \rightarrow 0$ ,  $h \rightarrow \infty^3$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ). Т.е. здесь величина давления всюду на промежутке  $(\theta_1, \pi/2)$  равна нулю, что также указывает на предельный экстремальный характер оптимального решения.

Подставляя соотношения (20) и (22) в выражения для  $F_x$  и  $F_y$  (4), получим следующее предельное выражение для функционала  $J$  (3) при  $\Lambda \rightarrow \infty$ :

$$J = \sqrt{(\cos\theta_1 + (1+Q_2)\cos\theta_2)^2 + ((1 - \sin\theta_1) - (1+Q_2)(1+\sin\theta_2))^2}.$$

Используя далее выражение для  $Q_2(\theta_2)$  (21), получаем явную зависимость функционала  $J$  от положения точек разрыва  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , который (при  $\Lambda \rightarrow \infty$ ) принимает экстремальное значение при  $\theta_1 \approx -0.91781$  ( $-52.5864^\circ$ ) и  $\theta_2 \approx 2.87734$  ( $164.8594^\circ$ ).

<sup>3</sup> Речь идет о предельном значении  $h(\theta)$  в левой окрестности точки  $\theta_1$  при  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

**Заключение.** На основании математической модели Рейнольдса рассмотрена вариационная задача теории газовой смазки для двухсекторного радиального подшипника при произвольных числах сжимаемости  $\Lambda$ . Установлено, что профиль микрогеометрии является кусочно-линейным на каждом из секторов, при этом «верхний» профиль работает в режиме разряжения, а «нижний» – в режиме сжатия газа. Исследована зависимость характера решения для предельных значений числа сжимаемости  $\Lambda$ , т.е. при  $\Lambda \rightarrow 0$  и  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lord Rayleigh*. Notes on the theory of lubrication // *Phil. Mag.*, 1918, v.35, №1, p.1-12.
2. *Maday C.J. A.* The One – Dimensional Optimum Hydrodynamic Gas Slider Bearing // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.*, 1968, v.90, №1. (*J. Tribol.* 90(1), 281-284 (Jan 01, 1968) (4 pages) (Рус. перевод. Проблемы трения и смазки. – М.: Мир. 1968).
3. *Maday C.J.* A bounded variable approach to the optimum slider bearing // *Trans. ASME. Ser. F. J. Lubr. Technol.*, 1968, v.90, №1, p.240-242. (Рус. перевод. Проблемы трения и смазки. – М.: Мир, 1968, №4, с.252-255).
4. *Maday C.J.* The Maximum Principle Approach to the Optimum One-Dimensional Journal Bearing, *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Series F.* 1970, v.92, p.482-489.
5. *Болдырев Ю.Я., Троицкий В.А.* Одна пространственная вариационная задача теории газовой смазки // *Известия АН СССР МЖГ*, 1975, N5, с.34-39.  
*Boldyrev Iu.Ia., Troitskii V.A.* Odnа prostranstvennaia variatsionnaia zadacha teorii gazovoi smazki // *Izvestiia AN SSSR MZhG*, 1975, N5, s.34-39.
6. *Болдырев Ю.Я.* Вариационная задача для радиального секторного подшипника, работающего в режиме малых чисел «сжимаемости» // *Прикладная математика. Труды ТПИ*, 1977, с.30-35.  
*Boldyrev Iu.Ia.* Variatsionnaia zadacha dlia radialnogo sektornogo podshipnika, rabotaiushchego v rezhime malykh chisel «szhimaemosti» // *Prikladnaia matematika. Trudy TPI*, 1977, s.30-35.
7. *Болдырев Ю.Я., Слесарев М.Е.* Одномерный радиальный газовый подшипник с максимальной несущей способностью // *Машиноведение*, 1987, №4, с.97-103.  
*Boldyrev Iu.Ia., Slesarev M.E.* Odnomernyi radialnyi gazovyi podshipnik s maksimalnoi nesushchei sposobnostiu // *Mashinovedenie*, 1987, №4, s.97-103.
8. *Грабовский В.И.* Оптимальный радиальный газовый подшипник с минимумом момента сопротивления // *Изв. РАН, МЖГ*, 1999, № 6, с.63-75.  
*Grabovskii V.I.* Optimalnyi radialnyi gazovyi podshipnik s minimumom momenta soprotivleniia // *Izv. RAN, MZhG*, 1999, № 6, s.63-75.
9. *Грабовский В.И.* Оптимальный зазор упорного газового подшипника с максимальной несущей способностью // *Изв. РАН, МЖГ*, 2000, № 4, с.68-78.  
*Grabovskii V.I.* Optimalnyi zazor upornogo gazovogo podshipnika s maksimalnoi nesushchei sposobnostiu // *Izv. RAN, MZhG*, 2000, № 4, s.68-78.

10. Болдырев Ю.Я. Замечание о периодической вариационной задаче для радиального газового подшипника. – СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2007, № 1, с.258-262.  
*Boldyrev Iu.Ia.* Zamechanie o periodicheskoi variatsionnoi zadache dlia radialnogo gazovogo podshipnika. – SPb.: Nauchno-tekhicheskie vedomosti SPbGPU, 2007, № 1, s.258-262.
11. Болдырев Ю.Я., Петухов Е.П. Вариационная задача для радиального газового подшипника // Известия РАН МЖГ, 2015, т.50, № 2, с.16-26.  
*Boldyrev Iu.Ia., Petukhov E.P.* Variatsionnaia zadacha dlia radialnogo gazovogo podshipnika // Izvestiia RAN MZhG, 2015, t.50, № 2, s.16-26.
12. Сипенков И.Е., Филиппов А.Ю., Болдырев Ю.Я., Григорьев Б.С. и др. Прецизионные газовые подшипники. – СПб: Изд. ЦНИИ «Электроприбор», 2007, 504 с.  
*Sipenkov I.E., Filippov A.Iu., Boldyrev Iu.Ia., Grigorev B.S. i dr.* Pretsizionnye gazovye podshipniki. – SPB: Izd. TsNII «Elektropribor», 2007, 504 s.
13. Болдырев Ю.Я., Петухов Е.П. Вариационная задача для радиального газового подшипника // Известия РАН МЖГ, 2015, т.50, № 2, с.16-26.  
*Boldyrev Iu.Ia., Petukhov E.P.* Variatsionnaia zadacha dlia radialnogo gazovogo podshipnika // Izvestiia RAN MZhG, 2015, t.50, № 2, s.16-26.
14. Теория оптимальных аэродинамических форм. (Редактор А. Миеле). – М.: Мир, 1971, 507 с.  
*Teoriia optimalnykh aerodinamicheskikh form.* (Redaktor A. Miele). – M.: Mir, 1971, 507s.
15. Болдырев Ю.Я. Вариационное исчисление и методы оптимизации. Учебное пособие. – Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2016, 240 с.  
*Boldyrev Iu.Ia.* Variatsionnoe ischislenie i metody optimizatsii. Uchebnoe posobie. – Sankt-Peterburg: Izdatelstvo Politekhnicheskogo universiteta, 2016, 240 s.

Поступила в редакцию 27.11.2017

После доработки 13.12.2018

Принята к публикации 01.07.2019