

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И КОМПАКТНАЯ КВАЗИГАЗОДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

© 2019 г. *Б.Н. Четверушкин¹, А.Е. Луцкий¹, В.П. Осипов^{1,2}*

¹ Федеральный исследовательский центр «Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН»

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Российский экономический университет им. Г.В. Плеханова"
office@keldysh.ru, allutsky@yandex.ru, osipov@keldysh.ru

DOI: 10.1134/S0234087919120025

На основе применения законов сохранения осуществляется вывод компактной квазигазодинамической системы, которая ранее была получена с помощью использования кинетической модели. Обсуждается возможность применения для решения этой системы алгоритмов, ранее применяемых для решения уравнений Навье-Стокса.

Ключевые слова: квазигазодинамическая система уравнений, законы сохранения, время между столкновениями молекул, пограничный слой на пластине.

CONSERVATION LAWS AND A COMPACT QUASI-GASDYNAMIC SYSTEM

B.N. Chetverushkin¹, A.E. Luzkiy¹, V.P. Osipov^{1,2}

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences)

²Plekhanov Russian University of Economics

Based on the application of conservation laws, a compact quasi-gasdynamic system is derived, which was previously obtained using a kinetic model. The possibility of using algorithms previously used to solve the Navier-Stokes equations to solve this system is discussed.

Key words: quasi-gasdynamic system of equations, conservation laws, time between molecules collisions, boundary layer on a plate.

1. Введение

Квазигазодинамическая система уравнений (КГУ) получена из кинетической модели с помощью процедуры, аналогичной той, на основе которой уравнения газовой динамики получаются из уравнения Больцмана [1–5]. При этом сама КГУ система для моделирования течения вязкого теплопроводного газа отличалась от аналогичной системы уравнений Навье-Стокса

на члены по порядку величины второго порядка малости по числу Кнудсена $O(Kn^2)$. Этот важный факт подтверждался как результатами численных расчетов по сравнению данных, полученных на основе использования КГУ и уравнений Навье-Стокса, так и результатами теоретического анализа входящих в КГУ уравнений [1,2, 6–9].

Вывод КГУ системы из кинетической модели в явном виде опирался на тот факт, что вблизи равновесия (близости к локально-максвелловскому распределению) одночастичная функция распределения слабо меняется на расстоянии длины свободного пробега l или за время порядка характерного времени между столкновениями молекул τ . Это обеспечивает корректность КГУ системы по крайней мере с физической точки зрения и с самого начала ее появления в середине 80-х годов XX века давало возможность успешного моделирования сложных газодинамических течений вязкого теплопроводного газа [1,2].

В последнее время еще одним востребованным свойством КГУ системы явилась возможность адаптации алгоритмов, построенных на ее основе, к архитектуре вычислительных систем высокой и сверхвысокой производительности. Эта возможность, актуальная при использовании в расчетах экстремально параллелизма, связана с наличием в рамках КГУ системы членов со вторыми производными по времени от газодинамических параметров [10]. Заметим также, что гиперболический характер КГУ, связанный с наличием вторых производных по времени, дает возможность на алгоритмическом уровне способствовать решению проблемы отказоустойчивости, актуальной при одновременном использовании больших количеств независимых вычислителей [11].

Недостатком КГУ системы является ее более громоздкий вид по сравнению с уравнениями Навье-Стокса. Особенно наглядно этот недостаток проявляется для варианта КГУ системы для моделирования задач магнитной газовой динамики, в которых помимо молекулярной вязкости и теплопроводности учитывается также магнитная вязкость. Кроме того, нестандартный вид членов, входящих в КГУ систему, вызывал определенные трудности при использовании алгоритмов, ранее разработанных для решения уравнений Навье-Стокса.

В [12,13] был предложен компактный вариант КГУ системы, который выглядит следующим образом:

$$W_i = \frac{\tau}{2\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} [\rho(\bar{u} - \bar{w})] = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho \bar{u}}{\partial t^2} + \operatorname{div} [\rho(\bar{u} - \bar{w}) \otimes \bar{u}] + \nabla p = \operatorname{div} P_{NS}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{div} [(E + p)(\bar{u} - \bar{w})] = \operatorname{div} \bar{q} + \operatorname{div} (P_{NS} \bar{u}). \quad (4)$$

Здесь t – время, x_k – пространственная координата $k = 1, 2, 3$, ρ – плотность, \bar{u} – скорость, p – давление, E – полная энергия, \bar{q} – вектор теплового потока

$$q_k = \kappa \frac{\partial T}{\partial x_k}, \quad (5)$$

κ – коэффициент теплопроводности, P_{NS} – тензор вязких напряжений в уравнениях Навье–Стокса.

Эта система (1)–(4) была получена из исходной квазигазодинамической системы путем оценки по порядку величины входящих в нее членов. В данной работе система (1)–(4) будет получена непосредственно из законов сохранения при условии ограничения снизу времени τ между столкновениями молекул на интервал изменения по времени Δt .

2. Уравнение неразрывности КГУ системы

Одним из главных отличий КГУ системы от уравнений газовой динамики является наличие вторых производных по времени от газодинамических параметров и появление диссипативного члена в уравнении неразрывности. Их появление связано с тем, что в дискретной кинетической модели минимальным масштабом времени является время между столкновениями τ . Еще раз опишем эту модель [1, 2].

Предположим, что на момент времени $t = t^j$ одночастичная функция распределения молекул имеет локально-максвелловский вид:

$$f(t^j, x, \bar{\xi}) = f_0 = \frac{\rho(t, \bar{x})}{(2\pi RT(t, x))^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\xi_i - u_i(t, x))^2}{2RT}\right]. \quad (6)$$

Здесь дополнительно использовались обозначения: R – газовая постоянная, $\bar{\xi}$ – вектор скорости молекул.

В течение времени $t^{j+1} - t^j = \tau$ предположим, что молекулы газа совершают бесстолкновительный разлет. Затем в момент времени $t = t^{j+1}$ происходит мгновенный процесс столкновения молекул и функция распределения вновь становится локально-максвелловской. После этого процесс повторяется. Вновь обратим внимание на то, что в наших рассуждениях масштабы времени меньше τ не рассматриваются.

Связь между значением функции распределения до максвеллизации на момент времени t^{j+1} и значением локально-максвелловской функции на момент времени t^j выражается соотношением¹

$$f(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi}) = f_0(t^j, \bar{x} - \bar{\xi}, \tau, \bar{\xi}). \quad (7)$$

Разложим правую часть (7) в ряд Тейлора с точностью до членов третьего порядка малости по величине $|\bar{\xi}| \tau$

$$f(t^{j+1}, \bar{x}, \bar{\xi}) - f_0(t^j, \bar{x}, \bar{\xi}) = -\tau \xi_i \frac{\partial f_0}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\tau}{2} \xi_i \xi_k \frac{\partial f_0}{\partial x_i}. \quad (8)$$

Умножим левую и правую часть (8) на сумматорный инвариант m – массу молекулы и проинтегрируем аналогично получению уравнения неразрывности из уравнения Больцмана по скоростям молекул. Учитывая, что

$$\int f \varphi(\xi) d\xi = \int f_0 \varphi(\xi) d\xi, \quad (9)$$

где $\varphi(x)$ – сумматорные инварианты $\varphi(x) = m, m\bar{\xi}, (m\bar{\xi}^2/2)$, получим

$$\rho^{j+1} - \rho^j = -\tau \operatorname{div} \rho \bar{u} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p). \quad (10)$$

Разлагая левую часть (10) в ряд Тейлора, окончательно придем к уравнению:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div} \rho \bar{u} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p). \quad (11)$$

Это уравнение отличается от классического уравнения неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \rho \bar{u} = 0 \quad (12)$$

¹ Здесь для простоты предположим, что поле внешних сил, влияющих на изменение $\bar{\xi}$, отсутствует.

на совокупность членов
$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p), \quad (13)$$

которые в сумме составляют величину порядка $O(Kn^2)$ [1,2,9].

Таким образом, рассматриваемая дискретная кинетическая модель, в которой минимальным масштабом времени является τ , привела к уравнению неразрывности (11), отличающемуся от классического уравнения (12) на сумму членов по порядку величины $O(Kn^2)$. Такой же порядок различия между КГУ и уравнениями Навье-Стокса наблюдается для уравнений, описывающих изменение импульса и полной энергии E и энтропии [8, 9]. Напомним, что сами уравнения Навье-Стокса получены из кинетического уравнения Больцмана с помощью процедуры Чепмена-Энскога с той же точностью $O(Kn^2)$ [3–5].

Рассмотрим теперь способ получения уравнения (2.6), оставаясь в рамках традиционных методов, используемых в механике сплошной среды. При этом из кинетических моделей используем только ограничение снизу временем τ интервала Δt , на котором происходит изменение газодинамических параметров.²

3. Традиционный способ получения уравнения неразрывности КГУ

Рассмотрим изменения массы в конечном объеме Ω за время $\Delta t = t^{j+1} - t^j$

$$M^{j+1} - M^j = \int_{\Omega} \rho^{j+1} dx - \int_{\Omega} \rho^j dx = - \int_{t^j}^{t^{j+1}} \oint_S \rho \bar{u} ds, \quad (14)$$

где S – поверхность, ограничивающая объем Ω , M – масса объема Ω .

В отличие от общепринятого способа получения уравнения неразрывности рассмотрим конечный временной интервал, на котором происходит изменение массы объема $\bar{\Omega} \quad \Delta t = t^{j+1} - t^j = \tau$.

Представим импульс $\rho \bar{u}$ на отрезке $t \in [t^j, t^j + \tau]$ в виде

$$\rho u(t) = \rho u^j + \tau \frac{\partial \rho u^j}{\partial t} + O(\Delta t^2). \quad (15)$$

Подставим (15) в правую часть (14), проинтегрируем по времени на отрезке

² Выбор τ в качестве минимального масштаба Δt не случаен, так как установление газодинамических параметров происходит за время, не меньшее характерного времени между столкновениями молекул τ .

$[t^j, t^{j+1}]$ и воспользуемся теоремой Гаусса–Остроградского. В итоге получим

$$\rho^{j+1} - \rho^j = -\tau \operatorname{div} \left(\rho u^j + \frac{\tau}{2} \frac{\partial \rho u^j}{\partial t} \right) + O(\Delta t^2). \quad (16)$$

Левую часть выражения (16) представим в виде

$$\rho^{j+1} - \rho^j = \tau \frac{\partial \rho^j}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 \rho^j}{\partial t^2} + O(\tau^2), \quad (17)$$

а для нахождения $(\partial \rho u / \partial t)$ воспользуемся выражением

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p)}{\partial x_k}, \quad (18)$$

которое выполняется точно для уравнения, описывающего изменение импульса в идеальном газе. В неидеальном газе это выражение выполняется с точностью до членов, описывающих вязкое напряжение, то есть $O(\tau)$.

Комбинируем (16)–(18), окончательно получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho \bar{u}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p), \quad (19)$$

которое в точности совпадает с уравнением (11), полученным на основе дискретной кинетической модели.

Таким образом, введение ограничения снизу на допустимый интервал по времени приводит как в рамках дискретной кинетической модели, так и макроскопического описания, к появлению дополнительных членов в уравнении неразрывности. В сумме эти дополнительные члены составляют величину порядка $O(Kn^2)$, то есть значительно меньше диссипативных вязких и теплопроводных членов системы Навье–Стокса, порядок величины которых $O(Kn)$. Процедура сглаживания по времени ранее проводилась в работе [14], без связи времени τ с характерным временем между столкновениями молекул. Кроме того, в полученном в [14] аналоге уравнения (19) отсутствует член со второй производной по времени $(\tau/2)(\partial^2 \rho / \partial t^2)$.

Представим уравнение (19) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}(\rho(\bar{u} - \bar{w})) = 0, \quad (20)$$

$$\text{где } \rho \bar{w} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_i u_k + \delta_{ik} p) \quad (21)$$

– дополнительный импульс, возникающий при учете ограничения снизу на минимальный масштаб изменения Δt .

Наличие этого импульса, а также вторых производных по времени, связанных с ограничением снизу на Δt , является главным отличием КГУ от системы уравнений Навье–Стокса.

Характерной особенностью этого импульса является то, что он может рассматриваться как составная часть общего импульса $\rho(\bar{u} - \bar{w})$, который влияет на изменение плотности (20).

Учтем наличие скорости \bar{w} , связанной с этим дополнительным импульсом при построении других уравнений газовой динамики. Так при выводе баланса сохранения импульса будем учитывать газокINETическое давление, тензор вязких напряжений P_{NS} и обобщенный импульс $\rho(\bar{u} - \bar{w})$.

Изменение импульса в течение времени τ так же, как и для плотности, выпишем в виде:

$$(\rho u)^{j+1} - (\rho u)^j = \frac{\partial \rho u^j}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho u^j}{\partial t^2} + O(\tau^2) t^{j+1} - t^j = \tau.$$

В итоге уравнение для переноса импульса запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho u}{\partial t^2} + \text{div} [\rho(\bar{u} - \bar{w}) \otimes \bar{u}] + \nabla p = \text{div} P_{NS}. \quad (22)$$

Аналогично при выводе баланса для полной энергии E примем во внимание перенос энергии за счет скорости $\bar{u} - \bar{w}$, вектора теплового потока \bar{q} (5), работы вязких сил $P_{NS}\bar{u}$:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \text{div} [(E + p)(\bar{u} - \bar{w})] = \text{div} \bar{q} + \text{div}(P_{NS}\bar{u}). \quad (23)$$

Объединяя уравнения (19), (22) и (23), придем к компактной КГУ системе (1)–(4).

Аналогичное рассмотрение для задач магнитной газовой динамики приведет к соответствующим компактным квазигазодинамическим уравнениям магнитной газовой динамики:

$$W_k = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \delta_{ik} + \rho u_i u_k - B_i B_k \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\bar{u} - \bar{w})] = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho \bar{u}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \rho \bar{u}}{\partial t^2} + \operatorname{div}[\rho(\bar{u} - \bar{w}) \otimes \bar{u} + B_i B_k] + \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \operatorname{div} P_{NS}, \quad (26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \operatorname{div} \left[\left(E + p + \frac{B^2}{8\pi} \right) (\bar{u} - \bar{w}) \right] = \operatorname{div} \bar{q} + \operatorname{div} P_{NS} \bar{u}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\tau_m}{2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = \operatorname{rot}[(\bar{u} - \bar{w}) \otimes B + \nu_m \operatorname{rot} B], \quad (28)$$

$$\operatorname{div} \bar{B} = 0. \quad (29)$$

Здесь дополнительно использовались обозначения: \bar{B} – вектор напряженности магнитного поля, ν_m – магнитная вязкость.

Уравнения (24)–(27) могут быть получены с помощью процедуры, аналогичной получению уравнений компактной КГУ системы (1)–(4). Уравнения (28)–(29) получены на основе использования комплекснозначной функции [7, 15]

$$f_{OM} = \frac{\rho}{(2\pi RT)^{3/2}} \exp \left[- \left(\xi_k - u_k - i(B/\sqrt{4\pi\rho}) \right)^2 / 2RT \right] \quad (30)$$

(здесь $k = 1, 2, 3$; i – мнимая единица) и последующего использования дискретной кинетической модели, приведшей к балансному уравнению, аналогичному (8) [15]

$$\frac{\partial f_{OM}}{\partial t} + \frac{\tau_m}{2} \frac{\partial^2 f_{OM}}{\partial t^2} + \tau_m \operatorname{div}(\xi f_{OM}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_m \xi_i \xi_k \frac{\partial f_{OM}}{\partial x_i}. \quad (31)$$

Время τ_m – характерное время установления равновесия в совокупном ансамбле, состоящем из нейтральных и заряженных частиц, а также магнитного поля \bar{B} , можно определить с помощью магнитной вязкости ν_m

$$\tau_m = \frac{2\rho\nu_m}{p + (B^2/(8\pi))}. \quad (32)$$

То есть τ_m определяется аналогично τ через соотношение вязкости и полного газокинетического и магнитного давления.

4. Вычислительные алгоритмы для компактной КГУ системы

За десятилетия существования и развития вычислительной гидро- и газовой динамики разработано большое количество алгоритмов, обладающих теми или иными свойствами. Посмотрим, насколько эти алгоритмы могут быть адаптированы для решения компактной КГУ системы (1)–(4).

Рассмотрим вначале аппроксимацию пространственных производных, входящих в систему (1)–(4). Величина W_k (1) с точностью до множителя $\tau/(2\rho)$ совпадает с пространственными производными, входящими в уравнение, описывающее изменение импульса в системе уравнений Эйлера. После нахождения \bar{W} определяем скорость $\bar{u} - \bar{w} = \bar{v}$. В дальнейшем для аппроксимации пространственных производных, входящих в систему (2)–(4), можно использовать алгоритмы, применяемые при решении уравнений Навье–Стокса.

Таким образом, для аппроксимации по пространственным переменным в компактной квазигазодинамической системе можно использовать весь арсенал методов, ранее накопленных для моделирования уравнений Навье–Стокса.

Уравнения (2)–(4) могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial t^2} = \text{div } \bar{S}_{\bar{Q}}. \quad (33)$$

Здесь \bar{Q} – вектор газодинамических переменных, $\bar{Q} = \rho, \rho \bar{u}, E$; $\bar{S}_{\bar{Q}}$ – поток, зависящий от Q .

Наиболее простой аппроксимацией является трехслойная явная схема:

$$\frac{\bar{Q}^{j+1} - \bar{Q}^{j-1}}{2\Delta t} + \frac{\tau^*}{2} \frac{\bar{Q}^{j+1} - 2\bar{Q}^j + \bar{Q}^{j-1}}{\Delta t^2} = \text{div } S_{\bar{Q}}^j. \quad (34)$$

Для получения вычислительного эффекта от использования второй производной по времени вместо τ выберем большую величину τ^* . Наиболее оптимальным является τ^* , по порядку величины совпадающее с отношением характерного шага сетки h к характерной скорости v :

$$\tau^* \sim h/v. \quad (35)$$

При таком значении τ^* выполняется необходимое условие

$$\left[\frac{\tau^*}{2} \frac{\partial^2 \bar{Q}}{\partial t^2} \right] \ll \left[\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} \right], \quad (36)$$

а устойчивость трехслойной схемы обеспечивается при следующем ограничении на шаг по времени Δt [17]:

$$\Delta t \lesssim h^{3/2}. \quad (37)^3$$

Целью данной работы являлся анализ и выявление возможностей компактной КГУ системы, а не моделирование конкретных газодинамических течений. Поэтому для иллюстрации возможностей системы (1)–(4) воспользуемся результатами расчетов обтекания плоской пластины однородным потоком вязкого газа при числе Маха $M = 0.2$ и числе Рейнольдса $Re = 10^5$, взятым из [13].

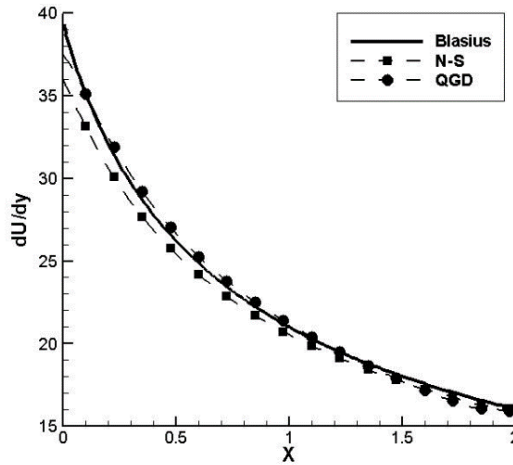


Рис.1.

На рис.1 изображено напряжение трения du/dy вдоль плоской пластины. Сравнивались результаты, полученные с помощью решения Блазиуса [17], решения, полученного на основе использования уравнений Навье–Стокса, и компактной КГУ системы.

Видно, что все три решения при удалении от кромки пластины близки друг к другу. Тем не менее вблизи кромки решение на основе уравнений Навье–Стокса сильнее отличается от решения Блазиуса, чем решение на основе КГУ. Это связано с тем, что вблизи кромки эффективное число Кнудсена увеличивается. В отличие от уравнений Навье–Стокса КГУ система дает возможность правильного описания газодинамических параметров при значительно больших числах Кнудсена [1, 18].

³ Преимущества условия (37) по сравнению с условием устойчивости явных схем для параболических уравнений ($\Delta t \lesssim h^2$) особенно наглядно проявляются при подробных пространственных аппроксимациях (малые h), которые реализуются на высокопроизводительных вычислительных системах.

Заключение

На основе законов сохранения при учете наличия минимального масштаба по времени описан способ получения компактной квазигазодинамической системы. Таким образом, реализуется связь между кинетическим и макроскопическим способом вывода как квазигазодинамической системы, так и ее компактного варианта. Очевидным достоинством рассматриваемого компактного варианта КГУ является возможность адаптации алгоритмов, используемых для ее решения, на архитектуру вычислительных систем сверхвысокой производительности. Кроме того, возможен простой перенос ранее разработанных алгоритмов для моделирования течений вязкого газа к решению компактной КГУ системы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные схемы в газовой динамике. – М.: изд. МГУ, 1999, 226 с.;
Chetverushkin B.N. Kineticheski-soglasovannye skhemy v gazovoi dinamike. – М.: izd. MGU, 1999, 226 s.
2. *Chetverushkin B.N.* Kinetic Schemes and Quasi-Gas Dynamic System of Equations / CIMNE. – Barcelona: 2008, 298 p.
3. *Chapman S. and Cawling T.G.* The Mathematical Theory of Non-uniform gases. – Cambridge: Univ. Press. Cambridge, 1990, 423 p.
4. *Liboff R.L.* Introduction to the Theory of Kinetic Equations. – Wiley, New York: 1969, 397 p.
5. *Веденяпин В.В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова. – М.: Физматлит, 2001, 112 с.
Vedeniapin V.V. Kineticheskie uravneniia Boltsmana i Vlasova. – М.: Fizmatlit, 2001, 112 s.
6. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О параболичности квазигазодинамической системы уравнений, ее гиперболической модификации и устойчивости малых возмущений для них // ЖВМ и МФ, 2008, т.8, №3, с.445–472;
англ. пер.: *Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N.* Parabolicity of the quasi-gasdynamic system of equations, its hyperbolic second-order modification, and the stability of small perturbations for them // Comput. Math. Math. Phys., 2008, v.48, №3, p.420-446.
7. *Четверушкин Б.Н.* Гиперболическая квазигазодинамическая система // Матем. моделирование, 2018, т.30, № 2, с.81–98;
англ. пер.: *Chetverushkin B.N.* Hyperbolic Quasi-Gasdynamic System // Mathematical Models and Computer Simulations, 2018, v.10, №5, p.588-600.
8. *Злотник А.А., Четверушкин Б.Н.* О балансе энтропии для одномерной квазигазодинамической системы уравнений // Докл. Акад. наук, 2017, т.474, №1, с.22-27.
англ. пер.: *B. Chetverushkin B.N., Zlotnik A.A.* Entropy balance for the one-dimensional hyperbolic quasi-gasdynamic system of equations // Dokl. Math., 2017, v.95, №3, p.276-281.
9. *Zlotnik A.A., Chetverushkin B.N.* On a hyperbolic perturbation of a parabolic initial-boundary value problem // Applied Mathem. Letters, 2018, v.83, p.116–122.

10. Четверушкин Б.Н., Ачензо Н., Савельев В.И. Об одном алгоритме решения параболических и эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ, 2015, т.55, № 8, с.1320–1328.
англ. пер.: *Chetverushkin B.N., D'Ascenzo N., Saveliev V.* On an algorithm for solving parabolic and elliptic equations // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2015, 55(8), p.1290–1297.
11. Четверушкин Б.Н., Якобовский М.В. Вычислительные алгоритмы и отказоустойчивость гиперэксафлопсных вычислительных систем // ДАН, 2017, т.472, № 1, с.13–17.
англ. пер.: *B.N. Chetverushkin and M.V. Yakobovskiy.* Numerical Algorithms and Fault Tolerance of Hyperexascale Computer Systems // *Doklady Math.*, 2017, v.95, №1, p.7–11.
12. Четверушкин Б.Н., Савельев А.В., Савельев В.И. Квазигазодинамическая модель для описания магнетогазодинамических явлений // ЖВМиМФ, 2018, т.58, №8, с.1384–1394;
англ. пер.: *Chetverushkin B.N., Savel'ev A.V., Savel'ev V.I.* A quasi-gasdynamic model for the description of magnetogasdynamic phenomena // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2018, 58(8), p.1384–1394.
13. Луцкий А.Е., Четверушкин Б.Н. Компактная квазигазодинамическая система для моделирования вязкого, сжимаемого газа // Дифф. уравнения, 2019, т.55, № 4, с.588–592;
англ. пер.: *Lutskii A.E., Chetverushkin B.N.* Compact Version of the Quasi-Gasdynamic System for Modeling a Viscous Compressible Gas // *Diff. Equations*, 2019, 55(4), p.575–580.
14. Елизарова Т.Г. Осреднение по времени как приближенный способ построения квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений // ЖВМ и МФ, 2011, т.51, № 11, с.2096–2105;
англ. пер.: *Elizarova T.G.* Time averaging as an approximate technique for constructing quasi-gasdynamic and quasi-hydrodynamic equations // *Comp. Math. and Math. Physics*, 2011, v.51, №11, p.1973–1982.
15. Четверушкин Б.Н., Ачензо Н., Савельев В.И. Кинетически согласованные уравнения магнитной газовой динамики и их использование в высокопроизводительных вычислениях // ДАН, 2014, т.457, № 5, с.526–529;
англ. пер.: *Chetverushkin B.N., D'Ascenzo N., Saveliev V.* Kinetically consistent magnetogasdynamics equations and their use in supercomputer computations // *Doklady Mathematics*, 2014, 90(1), p.495–498.
16. Четверушкин Б.Н., Гулин А.В. Явные схемы и моделирование на вычислительных системах сверхвысокой производительности // ДАН, 2012, т.446, № 5, с.501–503;
англ. пер.: *A.V. Gulin, B.N. Chetverushkin.* Explicit schemes and numerical simulation using ultrahigh-performance computer systems // *Dokl. Math.*, 2012, v.86, №2, p.681–683.
17. Шlichting Г. Теория пограничного слоя. – М.: 1974, 712 с.
Schlichting H. Boundary-Layer Theory. 7th Edition. – McGraw-Hill, Inc., New York, USA, 1979, 419 p. – ISBN: 0070553343
18. Лукшин А.В., Ярчук Л.В. О методе декомпозиции областей для уравнения Больцмана // Дифф. уравнения, 1998, т.34, № 7, с.958–964,
Lukshin A.V., Iarchuk L.V. O metode dekompozitsii dlia uravneniia Boltsmana // *Diff. uravneniia*, 1998, t.34, № 7, s.958–964.

Поступила в редакцию 20.05.2019

После доработки 20.05.2019

Принята к публикации 01.07.2019