

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОТОКА ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ С ПОМОЩЬЮ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

© 2019 г. *Н.И. Тарасов¹, С.В. Поляков^{1,2}, Ю.Н. Карамзин¹,
Т.А. Кудряшова¹, В.О. Подрыга^{1,3}, Д.В. Пузырьков¹*

¹ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

² Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ

³ Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

nikita_tarasow01@mail.ru

DOI: 10.1134/S0234087919120037

Рассматривается проблема моделирования потока вязкой несжимаемой жидкости с помощью квазигидродинамической системы уравнений. Использование данного подхода позволяет избежать неустойчивости при расчете давления при использовании классической постановки уравнений Навье-Стокса, проявляющейся при использовании ячеистых численных схем. Для численной реализации КГД уравнений использовался метод конечных объемов по центрам ячеек, в случае двумерной задачи – квадратных, в случае трехмерной задачи – кубических. В качестве тестовых расчетов было проведено две серии расчетов в областях сложной геометрии для нескольких чисел Рейнольдса, а также проведено сравнение результатов с программным пакетом ANSYS CFX. Сравнение показало высокое качество результатов численного моделирования при использовании КГД системы уравнений.

Ключевые слова: моделирование потока вязкой несжимаемой жидкости, квазигидродинамическая система уравнений, конечно-объемные схемы на неструктурированных сетках.

INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOW SIMULATION USING THE QUASI-HYDRODYNAMIC EQUATIONS SYSTEM

*N.I. Tarasov¹, S.V. Polyakov^{1,2}, Yu.N. Karamzin^{1,3}, T.A. Kudryashova¹, V.O. Podryga^{1,3},
D.V. Puzyrkov¹*

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

nikita_tarasow01@mail.ru

²National Research Nuclear University MEPhI

³Moscow Automobile and Road Construction State Technical University

In this paper, we consider the problem of modeling viscous incompressible fluid flow using the quasi-hydrodynamic equations system. The use of this approach makes it possible

to avoid instability in pressure calculation when using the classical formulation of the Navier–Stokes equations, which is manifested when using cellular numerical schemes. For the numerical implementation of QGD equations, the finite volume method was used with cell-center approximation. In the case of a two-dimensional problem a square mesh was used. A cubic mesh was used in the case of a three-dimensional problem. Two series of calculations were performed for testing in areas of complex geometry for several Reynolds numbers. The results were compared with the ANSYS CFX software package. The comparison showed the high quality of the numerical simulation results using the QGD system of equations.

Key words: incompressible viscous flow simulation, quasi-hydrodynamic equations system, finite-volume schemes on non-structured grids.

1. Введение

Задача устойчивого расчета потока вязкой несжимаемой жидкости проявляется во многих сферах численного моделирования, в том числе в прикладных инженерных задачах. Это, например, расчеты обтекания различных изделий, а также внутреннего потока в трубопроводах, для последующего моделирования возникающих в системе механических нагрузок. Мы столкнулись с необходимостью получения поля скоростей потока при моделировании очистки водного потока от мелкодисперсной примеси железа при наведении на расчетную область электромагнитного поля. Сложности, связанные с численным решением уравнений Навье–Стокса в естественных переменных, в двумерном случае возможно преодолеть использованием постановки уравнений на функцию тока – вихрь [1], с помощью которой удалось выполнить моделирование очистки потока несжимаемой вязкой жидкости [2, 3] с помощью наведения электромагнитного поля на проточный резервуар. Однако в случае же трехмерной постановки невозможно использовать данную методику моделирования течения.

Одним из подходов к решению данной задачи является метод двойного потенциала, рассматриваемый в рамках работ [4–6], а также моделирование в переменных векторный потенциал – вихрь [1]. Однако данные методики до сих пор остаются слабо освещенными в научной литературе. Так, например, при постановке уравнений Навье–Стокса в переменных векторный потенциал-вихрь, задание граничных условий представляет из себя трудную задачу, решение которой сильно зависит как от геометрии расчетной области, так и от распределения скоростей во входном отверстии.

Кроме описанных выше методов математического моделирования вязкого несжимаемого потока, в ряде работ используется также подход на основе квазигидродинамической (КГД) системы уравнений [7–9]. Данный

подход обладает высокой устойчивостью даже при расчёте течений с высокими числами Рейнольдса. Именно использованию КГД модели и посвящена текущая работа.

2. Математическая постановка

Рассмотрим квазигидродинамическую систему уравнений для поиска стационарного состояния потока вязкой несжимаемой жидкости. Уравнение неразрывности среды в этом случае в безразмерной форме принимает вид:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\mathbf{w}), \quad (1)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости, а \mathbf{w} – регуляризирующая поправка, имеющая следующую форму:

$$\mathbf{w} = \tau[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u} + \nabla p], \quad (2)$$

где τ – параметр регуляризации, p – давление, (\bullet, \bullet) – скалярное произведение. Подставляя (2) в уравнение (1) получим выражение для поиска давления:

$$\Delta p = \frac{1}{\tau} \operatorname{div}(\mathbf{u}) - \operatorname{div}[(\mathbf{u}, \nabla)\mathbf{u}], \quad (3)$$

где Δ – оператор Лапласа.

Нестационарное уравнение движения, необходимое для поиска поля скоростей, в безразмерной форме при использовании КГД подхода принимает следующий вид:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\operatorname{Re}} \operatorname{div}[\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] + \operatorname{div}[\mathbf{w} \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \mathbf{w}] - \operatorname{div}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) - \nabla p, \quad (4)$$

где t – время, $\operatorname{Re} = U_0 D_0 \rho / \mu$ – число Рейнольдса, $(\bullet \otimes \bullet)$ – прямое произведение векторов, U_0 – максимальная скорость на входе, D_0 – гидравлический диаметр, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость среды.

Система уравнений (2)–(4) дополняется граничными и начальными условиями, имеющими следующий вид:

– входное отверстие – течение Пуазейля:

$$\mathbf{u} = \{U(y, z), 0, 0\}^T, \quad \partial p / \partial n = -\operatorname{Const}, \quad (5)$$

где $U(y, z)$ – нормальная к входному отверстию скорость течения Пуазейля, n – нормаль к поверхности, Const – константа, определяемая через расход жидкости сквозь входное отверстие;

– выходное отверстие:

$$\partial \mathbf{u} / \partial n = 0, \quad p = 0; \quad (6)$$

– стенка – условие прилипания:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \partial p / \partial n = 0; \quad (7)$$

– начальные условия:

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad p = 0. \quad (8)$$

Таким образом, для моделирования потока вязкой несжимаемой жидкости необходимо численно разрешить систему уравнений (2) – (4), дополненную граничными условиями (5) – (7) и начальным условием (8).

3. Численный алгоритм

В качестве численной методики будем использовать метод конечного объема с использованием в качестве контрольного объема самих ячеек [10]. Тогда для аппроксимации потоков через границы расчетной ячейки введем следующие обозначения (рис.1): V_i – площадь в двумерном и объем в трехмерном случае текущего i -го сеточного элемента, P_i – точка центра текущего i -го элемента, P_{ij} – точка центра j -соседнего к i -му элемента, l_{ij} – расстояние между центрами соседних ячеек, \mathbf{n}^{ij} – единичный направляющий вектор от центра текущего элемента к центру соседнего, \mathbf{S}^{ij} – длина в двумерном случае и площадь в трехмерном j -й грани i -го элемента, умноженная на внешнюю нормаль.

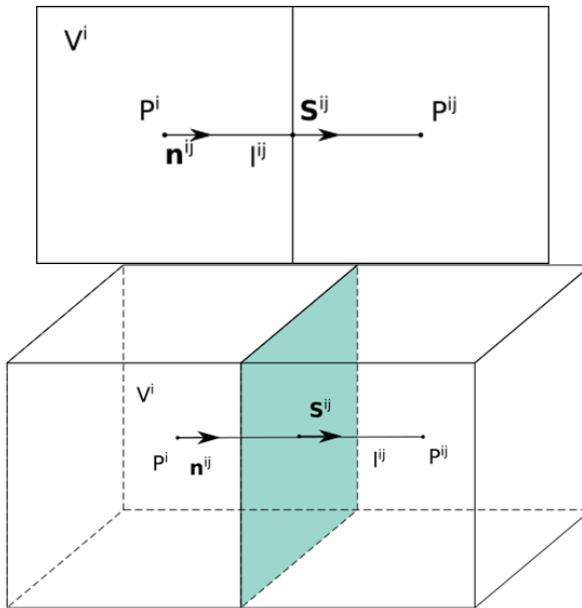


Рис.1. Характерные сеточные величины для четырехугольных двумерных (сверху) и кубических трехмерных (снизу) конечных объемов.

Тогда, с учетом введенных выше обозначений, разностный аналог выражения для вычисления давления, полученный из уравнения (3) с помощью итерационного метода Якоби, принимает вид:

$$\hat{p}^i = \left(\sum_{j=1}^m p^{ij} \frac{(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij})}{l^{ij}} - \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^m (\bar{\mathbf{u}}^{ij}, \mathbf{S}^{ij}) + \sum_{j=1}^m [(\bar{\mathbf{u}}^{ij}, \mathbf{n}^{ij}) \frac{\mathbf{u}^{ij} - \mathbf{u}^i}{l^{ij}}, \mathbf{S}^{ij}] \right) \times \left(\sum_{j=1}^m \frac{(\mathbf{n}^{ij}, \mathbf{S}^{ij})}{l^{ij}} \right)^{-1}, \quad (9)$$

где \hat{p}^i – разностный аналог давления в центре текущей ячейки, p^{ij} – разностный аналог давления в соседней ячейке, $\bar{\mathbf{u}}^{ij} = 0.5(\mathbf{u}^{ij} + \mathbf{u}^i)$ – интерполяция скорости на центр грани сеточного элемента, \mathbf{u}^{ij} – разностный аналог скорости в соседнем элементе, \mathbf{u}^i – разностный аналог скорости в текущем элементе, m – количество соседних к текущему элементов (в случае квадратной сетки равно 4, в случае кубической – 6).

Регуляризирующую поправку будем определять на центрах граней контрольных объемов. Тогда, аппроксимируя выражение (2), получим следующее выражение:

$$\mathbf{w}^i = \tau \sum_{j=1}^m \left[(\bar{\mathbf{u}}^{ij}, \mathbf{n}^{ij}) \frac{\mathbf{u}^{ij} - \mathbf{u}^i}{l^{ij}} + \frac{p^{ij} - p^i}{l^{ij}} \mathbf{n}^{ij} \right]. \quad (10)$$

Используя явную по времени схему из уравнения (4), получаем следующее выражения для пересчета поля скорости на новом временном шаге:

$$\hat{\mathbf{u}}^i = \mathbf{u}^i + \frac{\tau_{time}}{V^i} \sum_{j=1}^m \left[\frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\mathbf{n}^{ij}}{l^{ij}} \otimes (\mathbf{u}^{ij} - \mathbf{u}^i) + (\mathbf{u}^{ij} - \mathbf{u}^i) \otimes \frac{\mathbf{n}^{ij}}{l^{ij}} \right\}^T \cdot \mathbf{S}^{ij} + \{ \mathbf{w}^{ij} \otimes \bar{\mathbf{u}}^{ij} + \bar{\mathbf{u}}^{ij} \otimes \mathbf{w}^{ij} \}^T \cdot \mathbf{S}^{ij} - \{ \bar{\mathbf{u}}^{ij} \otimes \bar{\mathbf{u}}^{ij} \}^T \cdot \mathbf{S}^{ij} - \bar{p}^{ij} \mathbf{S}^{ij} \right], \quad (11)$$

где $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j]_{ij}$ – прямое векторное произведение ($i, j=x, y$ в двумерном случае; $i, j=x, y, z$ в трёхмерном случае), τ_{time} – шаг по времени.

Выражения (9) – (11) дополняются граничными условиями (5) – (7) заменой слагаемых в разностных выражениях на известные величины. Параметр сглаживания принимался равным $\tau = 0.5 / \text{Re}$, в соответствии с рекомендацией [7]. Описанная методика применялась для моделирования потока вязкой несжимаемой жидкости для расчётных областей сложной геометрии как в двумерной, так и в трёхмерной постановке.

4. Результаты расчётов

4.1. Двумерная задача. В случае двумерной постановки рассматривалась труба, имеющая коллектор с выходным отверстием, изображенная на рис.2 (единицы измерения – метры).

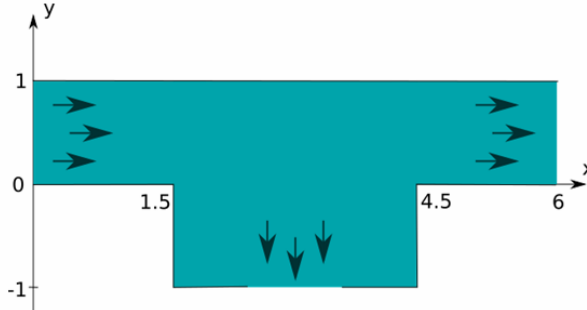


Рис.2. Геометрия двумерной расчётной области.

Нормальная скорость на входном отверстии представлялась выражением

$$\mathbf{u}(y) = \left\{ U_0 \left(1 - y^2 / R^2 \right), 0, 0 \right\}^T, \quad (10)$$

где $R=0.5$ – радиус входного отверстия, U_0 – максимальная скорость в центре потока. Перепад давления на входе определялся как

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{3}{2 Re R}. \quad (11)$$

Плотность среды принималась равной $\rho=998,2$ кг/м³, динамическая вязкость $\mu=0,001003$ кг/(м*с), что соответствует воде. Двумерные расчёты проводились для значений $U_0 = 0.000010164$ м/с и $U_0 = 0.00010164$ м/с, что соответствует значениям чисел Рейнольдса $Re = 10$ и $Re = 100$.

Использованная расчётная сетка являлась равномерной прямоугольной, пример которой представлен на рис.3, и содержала 14 400 элементов с длиной ребра элемента равной 0.025 м. Шаг по времени в безразмерной форме принимался равным $\tau_{time}=0,000195312$. Стационарное состояние достигалось после 53 000 шагов для $Re = 10$ и 374 000 для $Re = 100$.

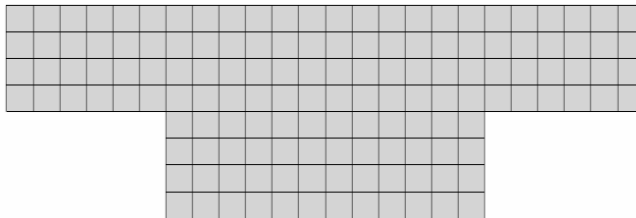


Рис.3. Пример расчётной сетки, содержащей прямоугольные элементы.

На рис.4 представлены распределения модуля скорости для $Re = 10$ рассчитанные с помощью описанной методики и программного пакета ANSYS CFX Fluent [11] с использованием сетки, содержащей 13 528 четырехугольных элемента, а также распределение давления, изображенное на рис.5. Распределение модуля скорости и давления для $Re = 100$ представлены на рис.6 и 7 соответственно. Из данных рисунков видно хорошую степень совпадения полученных распределений.

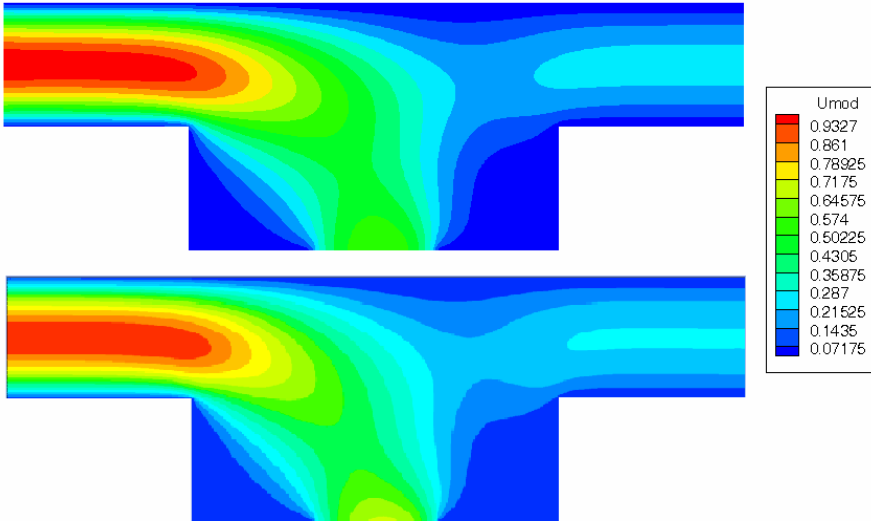


Рис.4. Распределение модуля скорости при $Re = 10$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

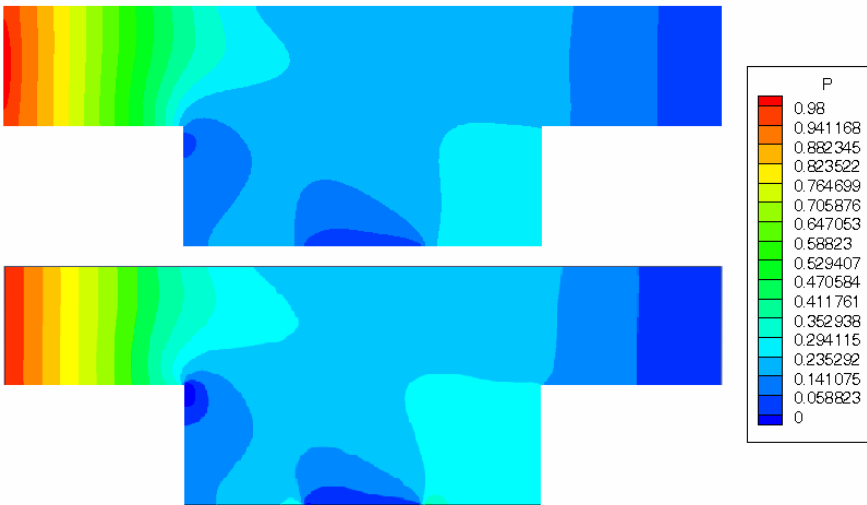


Рис.5. Распределение давления при $Re = 10$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

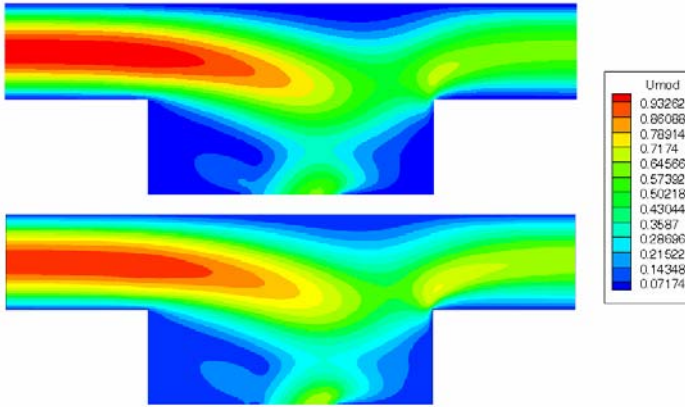


Рис.6. Распределение модуля скорости при $Re = 100$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

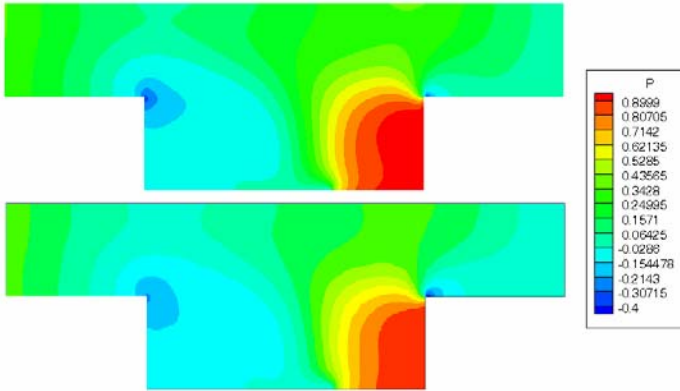


Рис.7. Распределение давления при $Re = 100$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

4.2. Трёхмерная задача. В случае трёхмерной постановки рассматривалась квадратная труба, имеющая сепаратор на два выходных отверстия у правого края, изображенная на рис.8 (единицы измерения – метры).

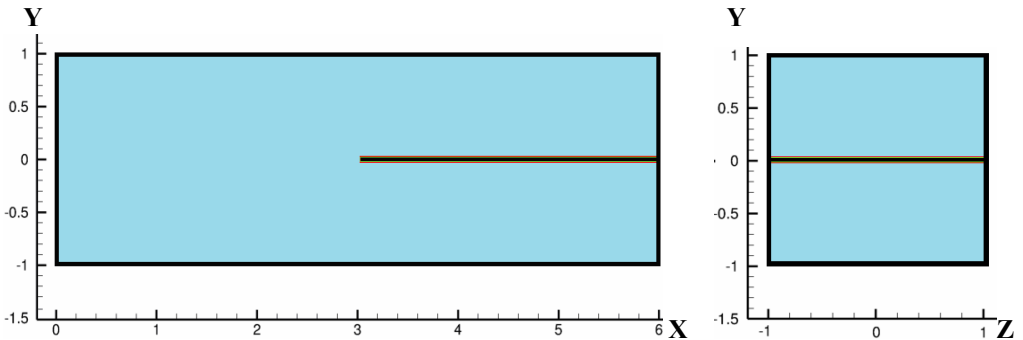


Рис.8. Трёхмерная расчетная область.

Выражения (10) и (11) справедливы и в случае расчёта в данной расчётной области. Расчёты производились для скоростей $U_0 = 0.00005082$ м/с и $U_0 = 0.00010164$ м/с, что соответствует значениям чисел Рейнольдса $Re = 50$ и $Re = 100$.

Использованная расчётная сетка являлась равномерной кубической и содержала 170000 шагов. Шаг по времени в безразмерной форме принимался равным $\tau_{time} = 9.86798e-5$. Стационарное состояние достигалось после 129000 шагов для $Re = 50$ и 145000 – для $Re = 100$.

На рис.9 представлены распределения модуля скорости в сечении $Z = 0$ для $Re = 50$, рассчитанные с помощью описанной методики и ANSYS CFX Fluent [8] с использованием сетки, содержащей 256708 кубических элемента. Распределение модуля скорости в сечении $Z = 0$ для $Re = 100$ представлены на рис.10. На рис.11 представлено распределение модуля скорости на массиве сечений вдоль оси X для $Re = 100$. Из данных рисунков видно хорошую степень совпадения полученных распределений.

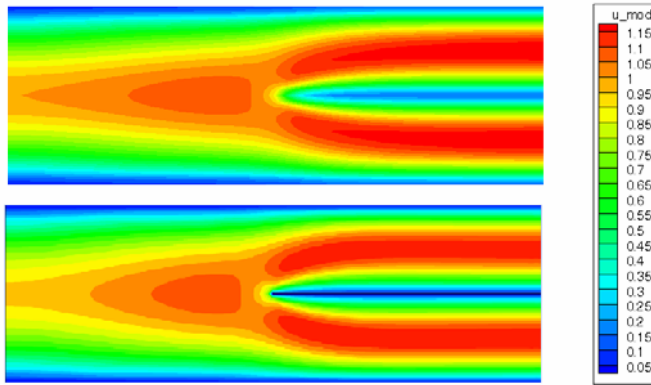


Рис.9. Распределение модуля скорости в сечении $Z = 0$ для $Re = 50$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

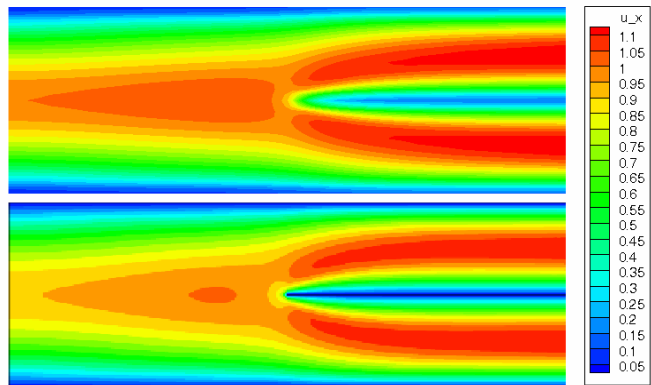


Рис.10. Распределение модуля скорости в сечении $Z = 0$ для $Re = 100$, полученные с помощью КГД системы (сверху) и пакета Ansys (снизу).

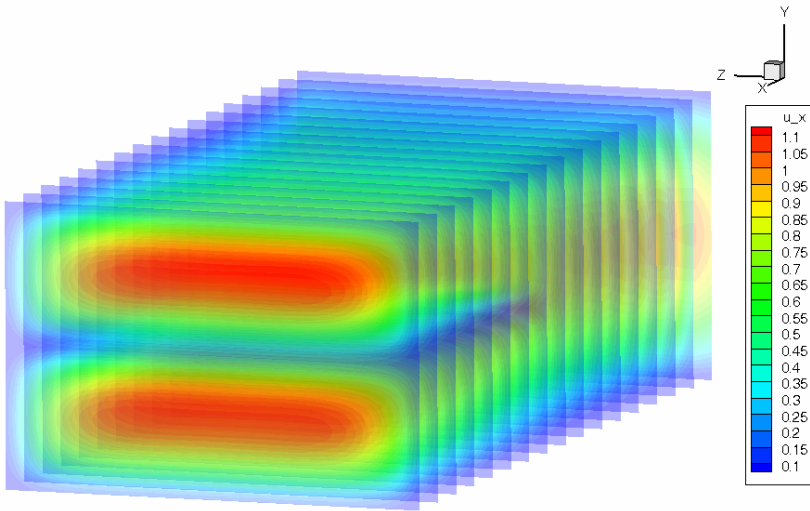


Рис.11. Распределение модуля скорости в сечениях вдоль оси X для $Re = 100$.

Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос применения квазигидродинамической системы для моделирования потока несжимаемой жидкости. С помощью метода контрольных объемов были получены разностные аналоги пространственных производных. Расчет давления производился на основе дискретного аналога уравнения Пуассона с помощью итерационного метода Якоби. Нестационарное распределение скорости рассчитывалось с помощью явной по времени схемы. Величины давления и скорости определялись в центрах ячеек, а регуляризирующая поправка – на гранях сеточных элементов. В результате модельных расчетов были получены стационарные потоки вязкой несжимаемой жидкости в областях сложной геометрии как в двумерном, так и в трёхмерном случае для разных чисел Рейнольдса. Выполненная программная реализация подтвердила устойчивость и сходимость разработанной конечно-объемной схемы.

Для оценки качества реализованной численной методики была проведена дублирующая серия расчетов в программном пакете ANSYS CFX Fluent. Сравнение результатов, полученных на основе КГД подхода, и результатов, полученных с помощью пакета ANSYS CFX Fluent, выявило их совпадение с точностью порядка 1.5%. Это обстоятельство подчеркивает высокое качество разработанной численной методики. При этом, в отличие от закрытого коммерческого кода ANSYS CFX Fluent, использование разработанного КГД кода позволяет комбинировать его с другими математическими моделями и приложениями, в том числе на специфических аппаратных платформах, которые не поддерживаются в пакете ANSYS CFX Fluent.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. 618 с.
Roache P.J. Computational fluid dynamics. – Albuquerque, Hermosa Publisher, 1976, VII, 446 p.
2. Кудряшова Т.А., Поляков С.В., Пузырьков Д.В., Тарасов Н.И. Математическое моделирование процессов очистки воды от примесей железа. – М.: РАН, 2017, 17 с.
Kudryashova T.A., Polyakov S.V., Puzyrkov D.V., Tarasov N.I. Matematicheskoe modelirovanie protsessov ochistki vody ot primesei zheleza. – М.: RAN, 2017, 17 s.
3. *Polyakov S.V., Karamzin Yu.N., Kudryashova T.A., Tarasov N.I.* Mathematical modelling of water treatment processes // *Mathematica Montisnigri*, 2017, v. XL, p.110–126.
4. *Richardson S.M., Cornish A.R.* Solution of three-dimensional incompressible flow problems // *J. Fluid Mech.*, 1977, part 2, v.82, p.309-319.
5. *Richardson S.M.* Numerical solution of the three-dimensional Navier–Stokes equations. Doctoral dissertation. Department of Chemical Engineering and Chemical Technology, Imperial College of Science and Technology, London, 1976.
6. *Gegg S.G.* A dual-potential formulation of the Navier–Stokes equations / 1989, Retrospective Theses and Dissertations. 9040. URL: <https://lib.dr.iastate.edu/rtd/9040>
7. Елизарова Т.Г. Лекции: Математические модели и численные методы в динамике жидкости и газа. Подходы, основанные на системах квазигазодинамических и квазигидродинамических уравнений. – М.: Физический факультет МГУ, 2005, 224 с.
Elizarova T.G. Quasi-Gas Dynamic Equations. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2009, XIV, 286 p.
8. Шеретов Ю.В. Математические модели гидродинамики. Уч. пособие. – Тверь: ТвГУ, 2004, 80 с.
Sheretov Iu.V. Matematicheskie modeli gidroinamiki. Uch. posobie. – Tver: TvGU, 2004, 80 s.
9. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. – Тверь: ТвГУ, 2016, 222 с.
Sheretov Iu.V. Regularizovannyye uravneniia gidroinamiki. – Tver: TvGU, 2016, 222 s.
10. *Eymard R., Gallouet T.R., Herbin R.* The finite volume method. Handbook of Numerical Analysis, Amsterdam, North Holland, 2000, v.7, p.713–1020.
11. Вычислительная гидродинамика в ANSYS CFX. URL: <https://www.cadferm-cis.ru/products/ansys/fluids/cfx/>
Vyчисlitelnaia gidroinamika v ANSYS CFX. URL: <https://www.cadferm-cis.ru/products/ansys/fluids/cfx/>

Поступила в редакцию 01.07.2019

После доработки 01.07.2019

Принята к публикации 09.09.2019