

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ПРЕССОВАНИЯ И СПЕКАНИЯ

© 2019 г. *Н.Г. Бураго<sup>1</sup>, И.С. Никитин<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, burago@ipmnet.ru

<sup>2</sup>Институт автоматизации проектирования РАН, i\_nikitin@list.ru

DOI: 10.1134/S0234087919020011

На основе термодинамического подхода получены определяющие соотношения модели прессования и спекания порошковых композитов. В систему уравнений обычной теории упругопластичности добавлено кинетическое уравнение для расчета эволюции пористости при нетермомеханическом воздействии всесторонним сжимающим напряжением спекания. Модификация обычной теории упругопластического течения включена в программу расчета упругопластических сред для адаптации к процессам спекания. Численными расчетами продемонстрирована способность модифицированной теории упругопластичности моделировать основные эффекты прессования и спекания, включая расчет остаточных пористости, напряжений и деформаций в прессовке, а также ее остаточной формы. Также на основе предложенной теории численно решена задача «горячего» спекания под действием подвижного высокоэнергетического импульса («лазерное спекание»). Рассчитано влияние параметров лазерного воздействия на спекание порошкового материала, а также на распределение пористости и температуры.

Ключевые слова: прессование, спекание, пористость, напряжение спекания, термомеханическая модель, метод конечных элементов, лазерное спекание.

## MATHEMATICAL MODEL AND ALGORITHM FOR CALCULATING PRESSING AND SINTERING

*N.G. Burago<sup>1</sup>, I.S. Nikitin<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of RAS, burago@ipmnet.ru

<sup>2</sup>Institute of Computer Aided Design of RAS, i\_nikitin@list.ru

On the basis of the thermodynamic approach, the constitutive relations for processes of pressing and sintering of powder composites have been obtained. A kinetic equation is been added to the system of equations of the usual theory of elastoplasticity to calculate the evolution of porosity under non-thermomechanical action by a bulk compressive stress of sintering. The modified theory is included in the computer program for calculating elastoplastic media for adaptation to sintering processes. Numerical calculations demonstrate the ability of the modified theory of elastic-plasticity to simulate the main

effects of pressing and sintering, including the calculation of residual porosity, stresses and deformations in the compact, as well as its residual shape. Also on the basis of the proposed theory, the problem of "hot" sintering under the action of a mobile high-energy pulse ("laser sintering") is numerically solved. The influence of the parameters of the laser action on the sintering of powder material, as well as on the distribution of porosity and temperature, is calculated.

Keywords: pressing, sintering, porosity, sintering stress, thermo-mechanical model, finite element method, laser sintering.

## 1. Введение

Процесс спекания (консолидации) наблюдается в порошковых материалах при термообработке пористых заготовок будущего изделия (прессовок), полученных уплотнением порошков давлением в пресс-формах. Подробные обзоры теоретических и экспериментальных исследований процессов прессования и спекания порошковых композитов можно найти в [1,2].

Исходно материал прессовок представляет собой смесь легкоплавких частиц, образующих матрицу композита, и тугоплавких, более прочных частиц твердой фазы. Объем пор между частицами заполнен воздухом. Если температура достаточна для плавления материала матрицы и имеет место смачивание частиц твердой фазы материалом матрицы, то поровые капиллярные силы поверхностного натяжения суммарно действуют как всестороннее сжимающее напряжение большой интенсивности, сравнимое по порядку величины с модулями упругости материалов композита. Эта нагрузка, не обусловленная деформацией, называется напряжением спекания и обеспечивает закрытие пор в процессе спекания.

Прессование, то есть приложение давления, обусловленного контактом со стенками пресс-формы, также приводит к уплотнению материала, но такое уплотнение выражено гораздо слабее, поскольку внешнее контактное давление значительно уступает по интенсивности напряжению спекания.

Спекание реализуется при условии интенсивного нагрева, достаточного для плавления легкоплавкого материала матрицы, заполняющего пространство между частицами тугоплавкой фазы. Процесс жидкостного спекания прекращается или при исчезновении пор, или из-за отвердения материала матрицы.

Для предсказания результатов спекания реальных изделий в условиях сложной геометрии и неоднородных состояний требуется численное моделирование на основе описания процессов в рамках механики сплошной среды. Для формулировки начально-краевых задач континуальной механики прежде всего необходимы определяющие соотношения, описывающие тер-

момеханическое состояние материала прессовки при прессовании и спекании.

В настоящее время имеется три основных варианта континуального моделирования макро-неоднородных процессов спекания.

В первом варианте остаточная пористость в прессовках рассчитывается по полю температуры, деформации учитываются только за счет уменьшения пористости и за счет эффекта температурного всестороннего растяжения-сжатия [3]. Во втором варианте дополнительно рассчитываются необратимые деформации прессовок по уравнениям вязкого течения без учета упругости [4]. В третьем варианте спекание прессовки рассматривается как течение вязкоупругой [5] или упругопластической пористой среды, что позволяет моделировать единым алгоритмом не только прессование и спекание, но и разрушение [6].

Прессовка изначально является твердым деформируемым телом, то есть обладает структурой и способностью держать форму, хотя при этом имеет крайне слабые начальные упругие свойства. Именно малость упругих деформаций провоцирует авторов теорий вязкого течения на упрощенную формулировку, пренебрегающую упругими деформациями. Однако пренебрежение упругой деформацией аннулирует важнейшее свойство твердых деформируемых тел – память о разгруженном состоянии. Пренебрежение упругой деформацией подменяет консервативные упругие напряжения, свойственные структурированным средам, диссипативными вязкими напряжениями, которыми невозможно обеспечить состояние статического равновесия структурированной среды. Величина вязких напряжений не может служить критерием нарушения структуры среды, означающего разрыв упругих связей. Вязкие напряжения не могут служить остаточными напряжениями, поскольку в состоянии покоя вязких напряжений нет. Так что если пренебрегать упругими напряжениями, то получать правильный ответ на ряд важнейших практических вопросов становится невозможным. Поэтому формулировки, учитывающие упругость прессовок, представляются предпочтительными.

В настоящей работе к расчету прессования и спекания применена модификация теории упругопластического течения [7]. В систему уравнений обычной теории добавлено кинетическое уравнение для расчета эволюции пористости при нетермомеханическом воздействии всесторонним сжимающим напряжением спекания, а свойства упругости зависят от величины пористости. Отличие от моделей вязкого течения состоит в том, что напряжения в прессовке обусловлены именно упругой частью деформации, ограничены условием пластичности и не зависят от скорости деформации [8,9].

Модификация обычной теории упругопластического течения была внедрена в программу расчета упругопластических сред для адаптации к процессам спекания [10]. Численными расчетами продемонстрирована способность модифицированной теории упругопластического течения воспроизводить основные эффекты процессов прессования и спекания, включая определение остаточных пористости, напряжений и деформаций в прессовке, а также ее остаточной формы.

## 2. Определяющие соотношения модели спекания

Уравнения, описывающие процесс спекания двухкомпонентной порошковой среды, выведены в [8]. Набор термодинамических параметров состояния упругопластической пористой спекающейся среды содержит температуру  $T$ , деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , скорость деформации  $\mathbf{e}$ , пластическую деформацию  $\boldsymbol{\varepsilon}_p$  и пористость  $\omega$ . Свободную энергию  $\varphi$  и скорость диссипации энергии  $D$  в единице массы можно записать в виде

$$\varphi = \frac{K}{2\rho_p} \left( \ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right)^2 + h_1 \frac{\mu}{\rho} (\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}'_p)^2 : \mathbf{I} + H(T - T_\omega) \varphi_\omega(T - T_\omega, \omega),$$

$$D = H(\Phi_p) k_y \left( \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'_p}{dt} : \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}'_p}{dt} \right)^{1/2} + \frac{k_T}{T} \nabla T \cdot \nabla T + H(\Phi_\omega) k_\omega \left( \frac{d\omega}{dt} \right)^2,$$

где  $K$  и  $\mu$  – модули упругости всестороннего растяжения-сжатия и сдвига соответственно;  $\rho$  и  $\rho_p$  – плотности текущего и разгруженного состояний соответственно;  $\beta$  – коэффициент температурного растяжения-сжатия,  $\mathbf{I}$  – тензорная единица, двоеточие обозначает двойное скалярное произведение,  $h_1 = (1 - 2/3(\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I}))^{-1}$ ,  $T_\omega$  – температура плавления легкоплавкой составляющей,  $H()$  обозначает функцию Хевисайда, равную единице для неотрицательных значений аргумента и нулю в противном случае. Функции параметров состояния выражают:  $\Phi_p = \boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - k_y^2(T, \omega)$  – функция нагружения,  $\Phi_\omega \geq 0$  – условие жидкостного спекания. Функциями параметров состояния также являются: функция  $k_p$  – радиус поверхности текучести,  $k_T$  – коэффициент теплопроводности, коэффициент  $k_\omega$  – определяет кинетику пористости  $\omega$ . Используются пространственные тензоры напряженно-деформированного состояния, отнесенные к актуальной конфигурации,  $\nabla$  – опера-

тор пространственного дифференцирования. Кинетика пористости напрямую связана с кинетикой объемной пластической деформации [4]:

$$\mathbf{e}_p : \mathbf{I} = \frac{1}{1-\omega} \frac{d\omega}{dt}.$$

Выражения для свободной энергии и скорости диссипации максимально упрощены. Первое и второе слагаемые в выражении свободной энергии выражают упругую энергию объемных и сдвиговых упругих деформаций, причем только объемные деформации считаются большими, а девиатор упругих деформаций считается малым. Выражение энергии объемных деформаций является обычным, оно учитывает температурные деформации всестороннего расширения-сжатия (с коэффициентом  $\beta$ ). Множитель  $h_1$  во втором слагаемом приводит к упрощенной связи девиаторов напряжений и упругих деформаций, характерной для малых деформаций. Третье слагаемое выражает свободную энергию активных пор, которая зависит от пористости и температуры, причем включается только при достижении температуры плавления  $T$  материала матрицы. Этот член отвечает за выражение для напряжения спекания. В упрощенной формулировке опущены члены, связанные с большими деформациями формоизменения, что допустимо для задач спекания.

Система определяющих соотношений, полученная по методу из [7], выглядит следующим образом [8,9]:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\sigma}', \quad \boldsymbol{\sigma}' = 2\mu(\boldsymbol{\varepsilon}' - \boldsymbol{\varepsilon}_p'), \quad p = K \frac{\rho}{\rho_p} \left( \ln \frac{\rho}{\rho_p} + \beta(T - T_0) \right),$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}'_p / dt = H(\boldsymbol{\sigma}' : \boldsymbol{\sigma}' - k_p^2) f_p \boldsymbol{\sigma}', \quad d\rho_p / dt = -\frac{\rho_p}{1-\omega} \frac{d\omega}{dt},$$

$$d\omega / dt = -H(\omega) k_\omega^{-1} (p + \sigma_\omega), \quad \sigma_\omega = \rho \frac{\partial \varphi_\omega}{\partial \omega} (1-\omega), \quad \mathbf{q} = -k_T \nabla T,$$

где  $\boldsymbol{\sigma}$  – тензор напряжений Коши,  $\boldsymbol{\sigma}'$  – девиатор напряжений,  $p$  – давление,  $\boldsymbol{\varepsilon}' = \boldsymbol{\varepsilon} - (\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{I})\mathbf{I} / 3$  – девиатор деформаций,  $\boldsymbol{\varepsilon}'_p = \boldsymbol{\varepsilon}_p - (\boldsymbol{\varepsilon}_p : \mathbf{I})\mathbf{I} / 3$  – девиатор пластических деформаций,  $\rho_p$  – плотность композита в разгруженном состоянии,  $\sigma_\omega$  – напряжение спекания.

Также необходимо добавить законы сохранения массы, импульса и энергии

$$d\rho/dt = -\rho\nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \rho d\mathbf{v}/dt = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \rho c_p dT/dt = \boldsymbol{\sigma} : \nabla \otimes \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{q} + r$$

и кинематические соотношения

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = (\nabla \otimes \mathbf{u} + \mathbf{u} \otimes \nabla - (\nabla \otimes \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{u} \otimes \nabla)) / 2.$$

Выпишем набор функций, для которых уравнения являются эволюционными:

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\varepsilon}_p, \omega, \rho, \rho_p, T).$$

Начальные условия имеют вид

$$t = 0, \quad \mathbf{x} \in V : \mathbf{Y} = \mathbf{Y}^0(\mathbf{x}),$$

где  $V$  обозначает пространственную область решения с границей  $S$ .

Граничные условия имеют вид

$$t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in S_v \subseteq S : \mathbf{v} = \mathbf{v}_*(\mathbf{x}, t), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in S \setminus S_v : \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P}_*(\mathbf{x}, t),$$

$$t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in S_T \subseteq S : T = T_*(\mathbf{x}, t), \quad t \geq 0, \quad \mathbf{x} \in S \setminus S_T : \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = Q_*(\mathbf{x}, t).$$

где  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль к границе, а правые части граничных условий являются заданными функциями.

### 3. Метод решения

Процессы прессования и спекания являются квазистатическими. Поэтому на каждом шаге по времени члены балансных уравнений, содержащие напряжения и тепловые потоки, аппроксимировались по двухслойной неявной схеме. По пространственным переменным для искомым функций использовалась простейшая кусочно-линейная конечно-элементная аппроксимация. Коэффициенты уравнений, зависящие от искомым функций, при этом определялись по значениям на предыдущем временном слое. Для решения системы алгебраических уравнений применялся итерационный метод сопряженных градиентов [11]. Для его реализации на каждой итерации по приближенному решению требуется определять невязку алгебраических уравнений. На каждой итерации алгоритм вычисления невязки в точности совпадает с алгоритмом расчета шага по времени по явной схеме. Поэтому матрицу системы уравнений и вектор правых частей специально вычислять и запоминать не требовалось и никаких операций с матрицами не проводилось. Сам по себе такой способ безматричных вычислений решения с по-

мощью итераций известен давно. В данном случае этот способ стал эффективным благодаря методу сопряженных градиентов. Экономия достигается не только в памяти ЭВМ (требуется всего  $4N$  вещественных чисел, где  $N$  – это число неизвестных), но и в быстродействии, поскольку машинная точность решения достигается за  $\sqrt{N}$  итераций. Более подробно такой алгоритм описан в [10].

#### 4. Численный расчет прессования и спекания в неоднородном состоянии

Рассмотрим пример расчета двумерных процессов прессования и спекания для случая неоднородного термомеханического состояния. Расчетная схема и начальная сетка показаны на рис.1. Пусть в начальный момент времени  $t = 0$  в печь помещена цилиндрическая заготовка прямоугольного сечения, состоящая из композитного порошка. Пусть левая граница является осью симметрии, правая и нижняя границы неподвижны, а на части верхней границы в течение времени  $[0, t_1]$  действует внешнее давление  $p(t)$ , которое реализует процесс холодного прессования. Затем в течение времени  $[t_1, t_2]$  нагрузка не действует и образец разгружается.

В классической теории пластичности при снятии нагрузки материал мгновенно разгружается и сохраняет свое напряженно-деформированное состояние неизменным.

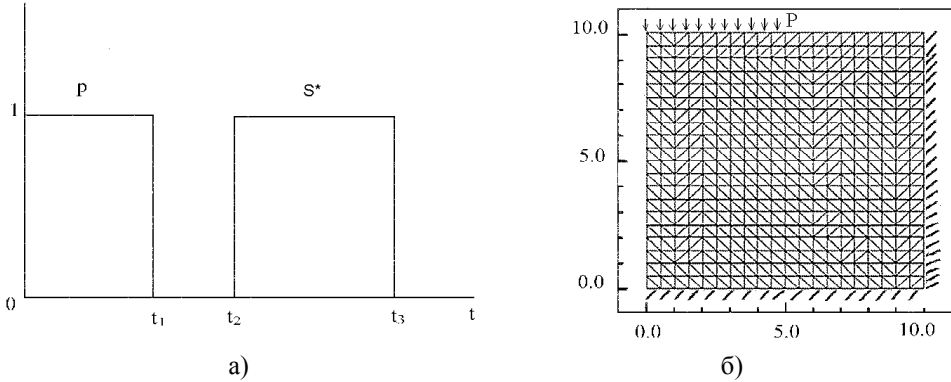
В применяемой модифицированной теории закон сжимаемости описывает вязкое поведение композита, поэтому релаксация напряжений происходит постепенно. Материал пористый и обладает свойством необратимой объемной сжимаемости, кинетическое уравнение для пористости связано непосредственно с уравнением для объемной пластической деформации и описывает объемную ползучесть. Причем необратимые изменения пористости и одновременно необратимый рост объемной пластической деформации обусловлен двумя основными причинами: давлением (холодное прессование) и действием капиллярных сил на поверхности пор при расплавлении материала матрицы.

В период времени  $[t_2, t_3]$  образец находится в печи и спекается. Приняты следующие значения времени для расчета:  $t_1 = 50$ ;  $t_2 = 60$ ;  $t_3 = 180$ . За единицу безразмерного времени принято время пробега упругой продольной волны единицы расстояния. Длина стороны квадратного образца была равна 10. Теплопередача в данном расчете не рассматривалась, и спекание обеспечивалось предопределенным однородным нагревом. Следующее соотношение использовано для напряжения спекания:

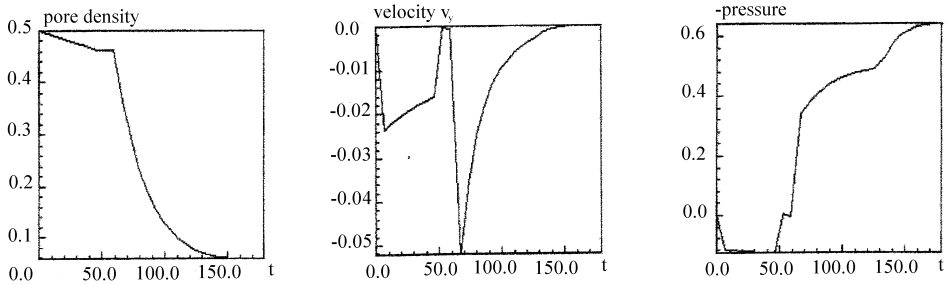
$$\sigma_{\omega} = s^*(T)\omega = H(t-t_2)H(t_3-t)\omega.$$

История внешнего давления  $p$  и коэффициента  $s^*$  показана на рис.1. Свойства материала принимались в следующем виде:

$$K=975(1-\omega), \quad \mu=369(1-\omega), \quad k_y=1-\omega, \quad c^2=(K+4\mu/3)/\rho=1, \quad k_{\omega}=0.1.$$



**Рис.1.** а) Неоднородный процесс прессования и спекания; б) история внешних воздействий и расчетная сетка.



**Рис.2.** История пористости, граничной скорости и давления.

На рис.2 показана рассчитанная история пористости, граничной скорости и давления для лагранжева приграничного узла  $x=0$ ;  $y=10$ . Ясно виден различный характер уплотнения материала при холодном прессовании и спекании. Спекание справляется с уплотнением значительно эффективнее. Интересно проследить за направлением движения прессуемого и спекаемого материала (рис.3,4). Показаны поля скорости для четырех последовательных моментов времени:  $t=2; 50; 60; 61$ .

Эволюцию пористости в процессе спекания и изменение формы спекаемого композита можно видеть на рис.5 и 6, где показаны изолинии давления, пористости и пластической работы для двух состояний материала после прессования и после спекания.



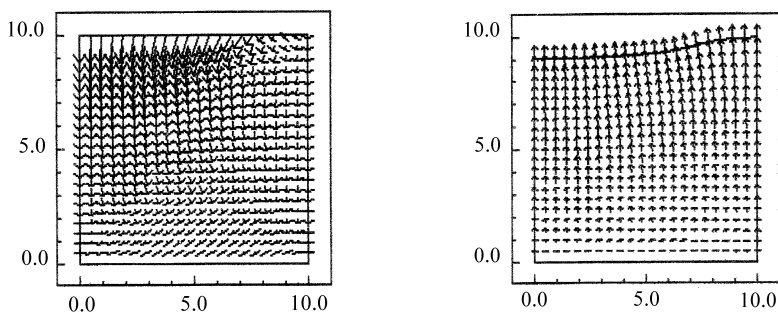


Рис.3. Поле скоростей для  $t = 2$  и  $t = 50$ .

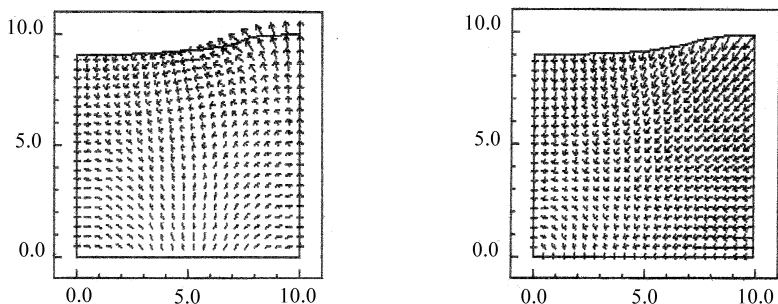


Рис.4. Поле скоростей для  $t = 60$  и  $t = 61$ .

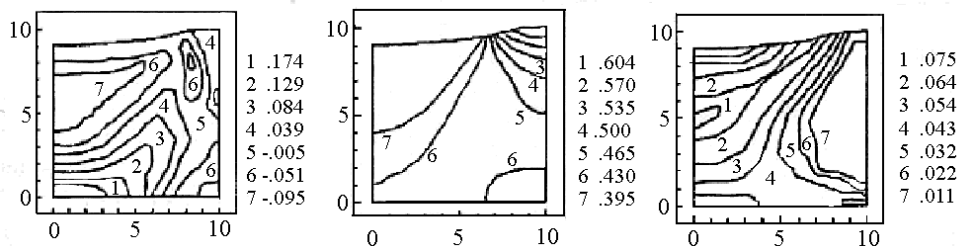


Рис.5. Изолинии давления, пористости и пластической работы после прессования.

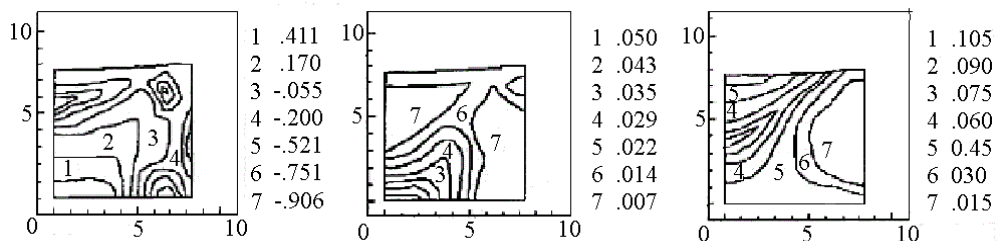


Рис.6. Изолинии давления, пористости и пластической работы после спекания.

Сравнение рис.5 и рис.6 дает представление об уровне компактирования образца после завершения процесса прессования и процесса спекания, а также соответствующих распределениях остаточных напряжений и пористости. Уровень пористости, достигаемый спеканием, на порядок меньше,

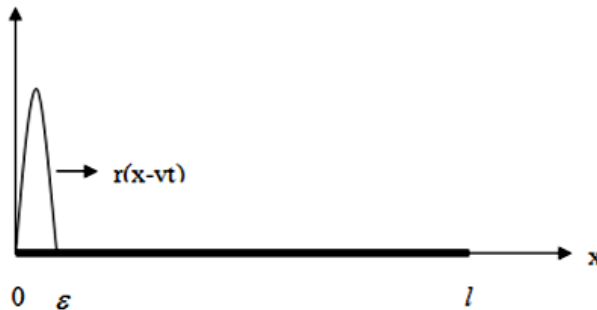
чем уровень после прессования. Однако остаточные напряжения в застывшем испеченном образце значительно выше, чем в прессованном. Если условия дальнейшей эксплуатации не допускают такого уровня остаточных напряжений, то возникает задача оптимизации температурного режима при спекании с целью их уменьшения.

### 5. Спекание двухкомпонентной порошковой массы под действием бегущего энергетического импульса

Ранее в [12,13] было проведено численное моделирование спекания двухкомпонентного порошка под действием мощного лазерного луча. Тугоплавкая компонента при этом образует каркас, сквозь который просачивается расплавленное вещество за счет действия гравитационных и капиллярных сил. Для описания течения жидкого расплава в порошковой смеси был использован линейный закон Дарси.

В данном разделе решается задача о воздействии подвижного высокоэнергетического импульса на двухкомпонентный порошковый материал («лазерное спекание») с использованием описанной выше модели.

Сформулируем модельную одномерную нестационарную задачу для второй фазы спекания в предположении, что предварительное уплотнение уже произошло (первая фаза завершена).



**Рис.7.** Энергетический импульс, бегущий по слою уплотненного порошкового материала.

По спекаемому предварительно уплотненному стержню длины  $l$  со скоростью  $v$  бежит энергетический импульс плотностью  $r(x-vt)$  и протяженностью  $\varepsilon$  (см. рис.7). Он разогревает порошковую массу выше температуры плавления легкоплавкой фазы  $T_0$  и под действием капиллярных сил происходит схлопывание смоченных пор (по мере прохождения импульса) и спекание с уменьшением пористости.

Упрощенная связанная система уравнений для температуры  $T$  и пористости  $\omega$  в этом случае имеет следующий вид:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = (kT_x)_x + \rho r(x - vt),$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -H(\omega)[\lambda_\omega p + \alpha_\omega \omega H(T - T_\omega)],$$

$$\rho = \rho_0(1 - \omega), \quad k = k_0(1 - \omega), \quad c_v = c_0(1 - \omega).$$

В уравнении для пористости первое слагаемое отвечает за «механическое» уплотнение под действием напряжения  $p$ , а второе слагаемое – за «горячее» спекание под действием капиллярных сил при температуре выше температуры плавления легкоплавкой фазы. В дальнейшем предполагаем, что влияние капиллярного давления расплава много больше влияния «холодного» давления ( $\alpha_\omega \omega \gg \lambda_\omega p$ ) и имеем упрощенное уравнение для пористости:

$$\frac{d\omega}{dt} = -H(\omega)\alpha_\omega \omega H(T - T_\omega).$$

Таким образом, пренебрегая механическим напряжением в рассматриваемой упрощенной постановке, мы выделяем и решаем самостоятельную задачу для температуры и пористости.

Обезразмерим линейные величины путем деления на характерный размер  $l$ , скорость – на  $v$ , время – на  $l/v$ , введем безразмерные параметры:

$$\gamma = k_0 / (\rho_0 c_0 / v), \quad \beta = \alpha_\omega l / v.$$

Связанная безразмерная нелинейная система для этих переменных имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\gamma}{(1 - \omega)} T_{xx} - \frac{\gamma \omega_x}{(1 - \omega)^2} T_x + \frac{r(x - vt)}{(1 - \omega)},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\beta \omega H(T - T_\omega) H(\omega).$$

Начальные условия:  $t = 0: T = T_0, \omega = \omega_0.$

Граничные условия:  $t \geq 0, x = 0: T = T_0, \quad t \geq 0, x = l: T = T_0.$

Для численного решения связанной нелинейной системы в переменных температура-пористость была использована простейшая разностная схема следующего вида:

$$\frac{(T_i^{n+1} - T_i^n)}{\tau} = \frac{\gamma}{(1 - \omega_i^n)} \frac{(T_{i+1}^n - 2T_i^n + T_{i-1}^n)}{h^2} -$$

$$-\gamma \frac{(\omega_{i+1}^n - \omega_{i-1}^n)}{(1 - \omega_i^n)^2} \frac{(T_{i+1}^n - T_{i-1}^n)}{4h^2} + \frac{r(x_i - vt^n)}{(1 - \omega_i^n)},$$

$$\frac{(\omega_i^{n+1} - \omega_i^n)}{\tau} = -\beta \omega_i^n H(T_i^n - T_\omega) H(\omega_i^n).$$

Для устойчивости схемы необходимо

$$\tau \leq \min h^2(1 - \omega) / (2\gamma) = h^2(1 - \omega_0) / (2\gamma),$$

где  $\tau$  – шаг по времени,  $h$  – шаг по пространственной координате. В расчетах принималось начальное значение пористости  $\omega_0 = 0.5$ , отсюда следует, что условие устойчивости принимает вид  $\tau \leq h^2 / (4\gamma)$ .

Надо учитывать, что при существенных изменениях пористости происходят большие деформации частиц при спекании. Чтобы учесть эти эффекты, запишем закон сохранения массы ячейки  $\rho \Delta x = \text{const}$ . При  $\rho = \rho_0(1 - \omega)$  отсюда следует

$$\Delta x(1 - \omega) = \Delta x_0(1 - \omega_0).$$

Таким образом, лагранжева сетка при изменении пористости становится неравномерной, производные в разностной схеме на такой сетке были аппроксимированы с учетом этого факта.

В качестве примера приведем результаты расчетов при прохождении импульса с амплитудой  $r_0 = 40$  и шириной  $\varepsilon = 0.0125$  на расстояние  $x = 0.5$ , скорость  $v = 0.02$ , безразмерные параметры  $\gamma = 0.05$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $T_\omega = 3T_0$ . Форма подвижного импульса показана на рис.8а, график сжатия частиц для рассматриваемого режима спекания представлен на рис.8б.

На рис.9а,б показаны графики пористости и температуры в заданный момент времени. Поскольку на краях порошкового слоя задана температура, заведомо меньшая температуры плавления, то слева и справа всегда имеются зоны «неспекания». Амплитуда импульса подобрана так, чтобы на существенной части слоя температура превышала температуру плавления и, несмотря на рассеяние тепла, приводила к существенному снижению пористости, то есть собственно к спеканию.

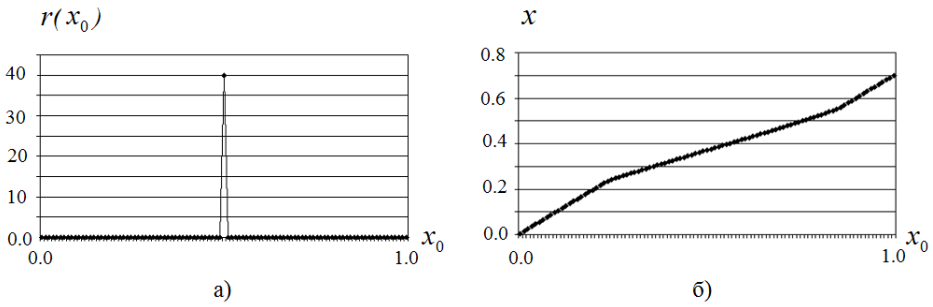


Рис.8. а) Форма бегущего импульса; б) сжатие ячеек при спекании.

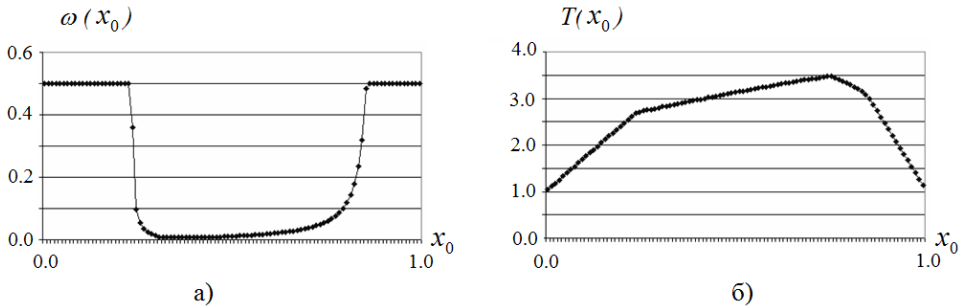


Рис.9. а) Распределение пористости; б) распределение температуры.

Также приведем результаты расчета для распределений пористости и температуры с вдвое уменьшенной скоростью импульса  $v = 0.01$  (см. рис.10а,б).

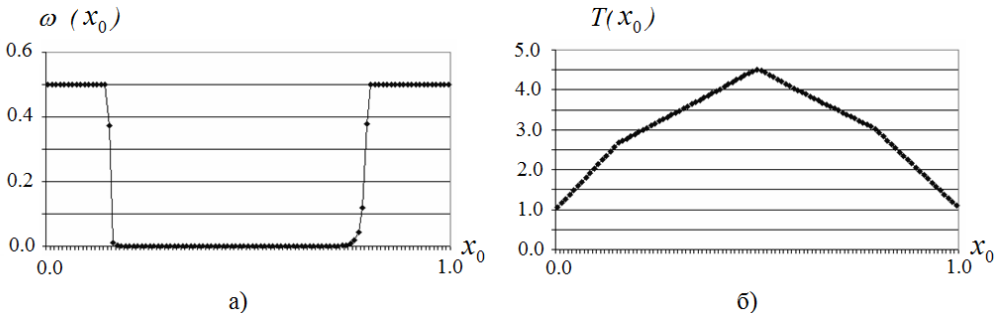


Рис.10. а) Распределение пористости; б) распределение температуры.

Сравнение графиков на рис.9 и 10 показывает основные черты процесса спекания. Замедленная скорость импульса приводит к более качественному и равномерному спеканию (более низким, близким к нулю значениям пористости) и более высоким температурам, достигаемым в ходе процесса. Уменьшение амплитуды импульса или его слишком быстрое движение приводит к режимам, при которых температура плавления не достигается и спекания не происходит.

## 6. Выводы

На основе термодинамического подхода получены определяющие соотношения модели прессования и спекания порошковых композитов. В систему уравнений обычной теории добавлено кинетическое уравнение для расчета эволюции пористости при нетермомеханическом воздействии всесторонним сжимающим напряжением спекания;

Модификация обычной теории упругопластического течения включена в программу расчета упругопластических сред для адаптации к процессам спекания.

Численными расчетами продемонстрирована способность модифицированной теории упругопластического течения воспроизводить основные эффекты процессов прессования и спекания, включая определение остаточных пористости, напряжений и деформаций в прессовке, а также ее остаточной формы.

Численно решена задача «горячего» спекания (вторая фаза процесса) под действием подвижного энергетического импульса. Оценено влияние параметров задачи (амплитуда и скорость импульса, теплопроводность и теплоемкость, геометрическая линейность/нелинейность) на спекание порошкового материала и распределение пористости и температуры.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *R.M. German, P. Suri, S.J. Park.* Review: liquid phase sintering // *J Mater. Sci.*, 2009, v.44, p.1-39.
2. *E.A. Olevsky.* Theory of sintering: from discrete to continuum // *Materials Science and Engineering*, 1998, R23, p.41-100.
3. *Ю.А. Гостеев, А.В. Федоров.* Математическое моделирование спекания ультрадисперсного порошка // *Физика горения и взрыва*, 2004, т.40, №2, с.42-44;  
*Iu.A. Gosteev, A.V. Fedorov.* Matematicheskoe modelirovanie spekaniia ultradispersnogo poroshka // *Fizika gorenii i vzryva*, 2004, t.40, №2, s.42-44.
4. *В.В. Скороход.* Реологические основы теории спекания. – Киев: Наук.думка, 1972, 149 с.  
*V.V. Skorokhod.* Reologicheskie osnovy teorii spekaniia. – Kiev: Naukova dumka, 1972, 149 s.
5. *В.А. Жорник, Ю.А. Прокопенко.* Моделирование процессов спекания порошковых покрытий при тепловом и механическом воздействиях // *Вестник ТГТУ*, 2010, т.16, №1, с.59-66;  
*V.A.Zhornik, Iu.A. Prokopenko.* Modelirovanie protsessov spekaniia poroshkovykh pokrytii pri teplovom i mekhanicheskom vozdeistviiakh // *Vestnik TGTU*, 2010, t.16, №1, s.59-66.
6. *J. Hermendes, J. Oliver, J.C. Cante, R. Weyler.* Numerical modeling of crack formation in powder forming processes // *Int. J. Solids and Structures*, 2011, v.48, p.292-316.

7. Н.Г. Бурого, А.И. Глушко, А.Н. Ковшиов. Термодинамический метод получения определяющих уравнений для моделей сплошных сред // Изв. РАН, МТТ, 2000, №6, с.4-15; N.G. Burago, A.I. Glushko, A.N. Kovshov. Termodinamicheskii metod polucheniia opredel'aiushchikh uravnenii dlia modelei sploshnykh sred // Izvestiia RAN, Mekhanika tverdogo tela, 2000, №6, s.4-15.
8. Н.Г. Бурого, И.С. Никитин. Моделирование спекания с помощью теории пластичности // Инженерный журнал: наука и инновации, 2013, вып. 8.  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/883.html>  
N.G. Burago, I.S. Nikitin. Modelirovanie spekaniia s pomoshchiu teorii plastichnosti // Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii, 2013, vyp.8,  
URL: <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/883.html>
9. Н.Г. Бурого, И.С. Никитин. Континуальная модель прессования и спекания порошковых материалов. Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18-22.09.2017г., Самара, Россия): в 2-х томах, т. 1. – Самара: СамГТУ, 2017, с.91-94.  
N.G. Burago, I.S. Nikitin. Kontinualnaia model pressovaniia i spekaniia poroshkovykh materialov. Materialy X Vserossiiskoi konferentsii po mekhanike deformiruemogo tverdogo tela (18-22.09.2017, Samara, Rossiia): v 2-h tomah, t.1. – Samara: SamGTU, 2017, s.91-94.
10. Н.Г. Бурого, И.С. Никитин, В.Л. Якушев. Гибридный численный метод решения нестационарных задач механики сплошной среды с применением адаптивных наложенных сеток // ЖВММФ, 2016, т.56, №6, с.1082-1092;  
N.G. Burago, I.S. Nikitin, V.L. Yakushev. Hybrid numerical method for unsteady problems of continuum mechanics using arbitrary moving adaptive overlap grids // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2016, v.56, №6, p. 1065-1074.
11. M.R. Hestenes, E. Stiefel. Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems // NBS J., 1952, Res. 49, p.409-436.
12. В.Г. Низьев, А.В. Колдоба, Ф.Х. Мирзаде, В.Я. Панченко, Ю.А. Повеценок, М.В. Попов. Численное моделирование плавления двухкомпонентных порошков при лазерном спекании // Математическое моделирование. 2011, т. 23, №4, с. 90-102;  
V.G. Niziev, A.V. Koldoba, F.Kh. Mirzade, V.Ya. Panchenko, Yu.A. Poveschenko, M.V. Popov. Numerical modeling of laser sintering of two-component powder mixtures // Mathematical Models and Computer Simulations, 2011, v.3, №6, p.723-731.
13. А.В. Колдоба, Ю.А. Повеценок, М.В. Попов, Г.В. Устюгова, В.М. Четкин. Математическое моделирование лазерного спекания двухкомпонентных порошковых смесей. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2009, препринт №38, 15 с.;  
A.V. Koldoba, Yu.A. Poveschenko, M.V. Popov, G.V. Ustiugova, V.M. Chechenkin. Matematicheskoe modelirovanie lazernogo spekaniia dvukhkomponentnykh poroshkovykh smesei. – Moscow: IPM im. M.V. Keldysha, 2009, preprint №38, 15 s.

Поступила в редакцию 12.02.18

После доработки 14.03.18

Принята к публикации 09.04.18