

## КОМБИНИРОВАННАЯ КИНЕТИКО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЧЕНИЯ МНОГОАТОМНОГО ГАЗА

© 2019 г. Ю.А. Никитченко, С.А. Попов, А.В. Тихоновец

МАИ (национальный исследовательский университет), г. Москва  
nikitchenko7@yandex.ru, flowmech@mail.ru, tikhhalena@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, проект № 9.7170.2017/8.9.

DOI: 10.1134/S0234087919020023

Представлена математическая модель течения многоатомного газа, содержащая комбинацию модели Навье-Стокса-Фурье (*NSF*) и модельного кинетического уравнения многоатомных газов. В основе комбинируемых компонентов лежит единая физическая модель, в результате чего модель *NSF* является строгим первым приближением модельного кинетического уравнения. Модель позволяет проводить расчеты полей течения в широком интервале чисел Кнудсена ( $Kn$ ), а также полей, содержащих области высокой динамической неравновесности. Граничные условия на твердой поверхности выставляются на кинетическом уровне, что позволяет, в частности, формулировать граничные условия на поглощающих или выделяющих газ поверхностях. Проведено тестирование комбинированной модели. На примере задачи о профиле ударной волны показано, что до чисел Маха  $M \approx 2$  комбинированная модель дает гладкие решения даже в тех случаях, когда точка сшивания находится в высоко градиентной области. В течении Куэтта гладкие решения получены при  $M=5$ ,  $Kn=0.2$ .

Ключевые слова: многоатомные газы, модель Навье-Стокса-Фурье, модельное кинетическое уравнение, комбинированная модель, динамическая неравновесность, сорбирующие поверхности.

### COMPOSED KINETIC-HYDRODYNAMIC MODEL OF POLYATOMIC GAS FLOW

*Ju.A. Nikitchenko, S.A. Popov, A.V. Tikhonovets*

Moscow Aviation Institute (National Research University)

A mathematical model of the flow of a polyatomic gas containing a combination of the Navier-Stokes-Fourier model (*NSF*) and the model kinetic equation of polyatomic gases is presented. At the heart of the composed components is a unified physical model, as a result of which the *NSF* model is a strict first approximation of the model kinetic equa-

tion. The model allows calculations of flow fields in a wide range of Knudsen numbers ( $Kn$ ), as well as fields containing regions of high dynamic nonequilibrium. The boundary conditions on a solid surface are set at the kinetic level, which allows, in particular, to formulate the boundary conditions on the surfaces absorbing or emitting gas. The composed model was tested. The example of the problem of the shock wave profile shows that up to Mach numbers  $M \approx 2$  the combined model gives smooth solutions even in those cases where the sewing point is in a high gradient region. For the Couette flow, smooth solutions are obtained at  $M=5$ ,  $Kn=0.2$ .

Key words: polyatomic gases, Navier-Stokes-Fourier model, model kinetic equation, composed model, dynamic nonequilibrium, sorption surfaces.

## 1. Введение

Современные аэрокосмические и нанотехнологии нуждаются в совершенствовании вычислительных методов и математических моделей течений газа в широком интервале чисел Маха и Кнудсена. Одно из направлений, к которому относится и настоящая работа, связано с разработкой гибридных или комбинированных моделей течения. Эти модели предполагают совместное использование методов молекулярно-кинетической теории и механики сплошной среды.

Ряд моделей предполагает разделение расчетной области геометрического пространства на гидродинамическую и кинетическую подобласти, например, [1-3]. В гидродинамической подобласти используются уравнения Навье-Стокса, в кинетической – модельное кинетическое уравнение *BGK* с той или иной численной реализацией, или статистические модели.

Модели работ [4,5] выделяют гидродинамические и кинетические подобласти в пространстве скоростей: гидродинамические для «медленных» молекул и кинетические – для «быстрых». В подобласти «медленных» молекул применяются модели Эйлера или Навье-Стокса, а для быстрых молекул – уравнение *BGK*.

Модель *BGK* получена для весовой функции (функции распределения молекул по скоростям) одноатомного газа. Ее интеграл столкновений соответствует газу с числом Прандтля  $Pr = 1$  [6]. Таким образом, эта модель подразумевает некоторый гипотетический газ. Непрерывный переход от этой модели к гидродинамической весьма затруднен без использования искусственных сглаживающих процедур [1].

Модель [7] в кинетической подобласти геометрического пространства использует *S*-модель [6], что выгодно отличает ее от цитированных выше моделей. При расчете течения вблизи шероховатой поверхности получены удовлетворительные результаты даже в переходной области течения. Ограниченность этой модели заключается в том, что согласованность кинетиче-

ского и гидродинамического описания имеет место только для одноатомных газов.

Настоящая работа имеет своей целью построение комбинированной модели течения многоатомных газов. Модель Навье-Стокса-Фурье (*NSF*) [8] комбинируется с модельным кинетическим уравнением многоатомных газов (*MKE*) [9]. Модель *NSF* представляет собой строгое первое приближение системы моментных уравнений многоатомных газов [10]. При получении этого приближения неравновесные величины (девиатор напряжений, тепловые потоки, разность поступательной и вращательной температур) в своих моментных уравнениях полагались настолько малыми, что их вторыми и более высокими степенями можно пренебречь. Течения, удовлетворяющие условиям первого приближения, будем называть слабо неравновесными.

Релаксационные члены *MKE* получены с использованием системы многоатомных газов, применяемой при построении модели *NSF*. Коэффициент объемной вязкости модели *NSF* представлен таким образом, что эта модель является первым приближением в указанном выше смысле модели *MKE*. Таким образом, обе комбинируемые модели имеют в своей основе единую физическую модель.

Настоящая работа ориентирована преимущественно на решение практических задач. В этой связи отсутствует обзор обширного круга работ, имеющих теоретическую направленность.

## 2. Основные допущения и обозначения

Рассматриваются течения однокомпонентных совершенных газов. Все выражения записаны для многоатомных газов. В случае одноатомных газов выражения остаются справедливыми после очевидных преобразований.

Используется индексная запись тензорных выражений. Повторяющийся греческий индекс обозначает суммирование от 1 до 3.

Интеграл по пространству скоростей обозначен  $\int \dots d\mathbf{c} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dc_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dc_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots dc_3$ .

Используемые обозначения:  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $t$ ,  $x_i$ ,  $\xi_i$  – время, геометрическая координата и молекулярная скорость;  $m_0$ ,  $n$ ,  $\rho = m_0 n$  – масса молекулы, концентрация молекул и плотность газа;  $u_i$ ,  $c_i = \xi_i - u_i$  – групповая (макроскопическая) и тепловая скорости молекул;  $f$  – весовая функция (функция распределения молекул по скоростям);  $c_p$ ,  $c_v$ ,  $\gamma$ ,  $k$ ,  $R = k/m_0$  – изобарная и изохорная теплоемкости, показатель адиабаты, постоянная Больцмана, удельная газовая постоянная;  $T_t$ ,  $T_r$ ,  $T = 1.5(\gamma - 1)T_t +$

$+0.5(5-3\gamma)T_r$  – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул, термодинамическая температура;  $P_{ij}$ ,  $p_{ij}=P_{ij}-\delta_{ij}R\rho T_t$  – полные и неравновесные напряжения;  $p = P_{\alpha\alpha} / 3 = R\rho T_t$  – *механическое* давление;  $\varphi_i$ ,  $\omega_i$  – тепловые потоки, обусловленные переносом энергии теплового движения на поступательных и вращательных степенях свободы молекул;  $q_i = \varphi_i + \omega_i$  – полный тепловой поток;  $M$ ,  $Kn$ ,  $Pr$  – числа Маха, Кнудсена и Прандтля. В рассматриваемых моделях принято:  $Pr = 4\gamma/(9\gamma - 5)$ .

### 3. Комбинируемые модели

**3.1. Кинетическая модель.** В качестве кинетической модели течения используется модель *МКЕ* [9], построенная для одночастичной весовой функции, фазовое пространство которой дополнено энергией вращательных степеней свободы  $\varepsilon$ :  $f(t, \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ . После сокращения размерности весовой функции кинетические уравнения модели принимают вид

$$\frac{\partial |f_t|}{\partial t} \Big|_{f_r} + \xi_\alpha \frac{\partial |f_t|}{\partial x_\alpha} \Big|_{f_r} = \frac{p}{\mu} \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r}, \quad (1)$$

где

$$f_t = \int f d\varepsilon, \quad f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon,$$

$$f_t^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t^+}\right) \left(1 + \frac{\varphi_\alpha c_\alpha}{3\rho(RT_t^+)^2} \left(\frac{c^2}{5RT_t^+} - 1\right)\right),$$

$$f_r^+ = \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} kT_r^+ f_t^+,$$

$$T_t^+ = T + 0.5(5-3\gamma)(1-1/Z)(T_t - T_r), \quad T_r^+ = T - 1.5(\gamma-1)(1-1/Z)(T_t - T_r),$$

$$T_t = (3Rn)^{-1} \int c^2 f_t d\mathbf{c}, \quad T_r = 2(\gamma-1)((5-3\gamma)R\rho)^{-1} \int f_r d\mathbf{c}, \quad \varphi_i = 0.5m_0 \int c_i c^2 f_t d\mathbf{c}.$$

Коэффициент вязкости  $\mu = \mu(T_t)$  и параметр  $Z = Z(T_t, T_r)$ , показывающий, сколько межмолекулярных столкновений приходится на одно неупругое столкновение, рассматриваются как свободные параметры модели.

Остальные необходимые для комбинированной модели моменты весовой функции определены как

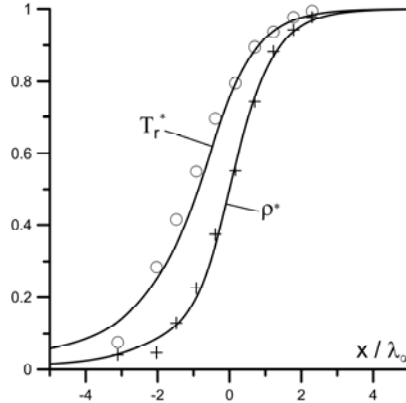
$$n = \int f_t d\mathbf{c}, \quad (2)$$

$$u_i = n^{-1} \int \xi_i f_t d\mathbf{c}, \quad (3)$$

$$P_{ij} = m_0 \int c_i c_j f_i d\mathbf{c}, \quad (4)$$

$$\omega_i = \int c_i f_i d\mathbf{c}. \quad (5)$$

В [9] результаты расчетов по *МКЕ* сравнивались с хорошо изученной *R*-моделью [11,12] и экспериментальными данными [13,14]. Рис.1 демонстрирует удовлетворительное совпадение расчетного профиля плоской гиперзвуковой ударной волны с экспериментальными данными даже для такого «тонкого» параметра, как температура вращательных степеней свободы. В тестовых расчетах настоящей работы не комбинируемая с гидродинамической моделью модель *МКЕ* рассматривается как эталонная.



**Рис.1.** Приведенные профили вращательной температуры и плотности. Модельное кинетическое уравнение (*МКЕ*). Газ – азот.  $M_\infty = 7$ .  $\circ$  и  $+$  – экспериментальные данные [14].

**3.2. Гидродинамическая модель.** В качестве гидродинамической модели рассматривается модель *NSF*, отличающаяся от традиционной системы уравнений сохранения в приближении Навье-Стокса наличием коэффициента объемной вязкости в уравнениях неравновесных напряжений. В терминах работы [8] система уравнений этой модели имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) \frac{P_{\alpha\beta}}{\rho} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$P_{ij} = \delta_{ij} R \rho T - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}, \quad q_i = -\frac{c_p}{Pr} \mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

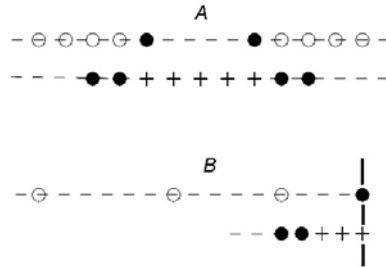
Специально отметим, что в определении молекулярно-кинетической теории, в отличие от механики сплошной среды, нормальные напряжения  $P_{ii}$  являются положительно определенными величинами, см. (4). Для совместимости кинетической модели *MKE* и гидродинамической *NSF* в системе (6) тензор напряжений записан в молекулярно-кинетической трактовке.

Коэффициент вязкости  $\mu$  и параметр  $Z$  определяются зависимостями, используемыми в модели *MKE*, но с сохранением порядка приближения модели *NSF*, т.е.  $\mu = \mu(T_t = T)$ ,  $Z = Z(T_t / T_r = 1)$ . В [8] показано, что коэффициент объемной вязкости позволяет выразить температуры  $T_t$  и  $T_r$  через температуру  $T$  в гидродинамическом приближении, однако в области сильно неравновесных течений такое приближение дает качественно неверные результаты.

**4. Метод комбинирования кинетической и гидродинамической моделей**

Одно из приложений комбинированной модели предполагает применение кинетической модели в сильно неравновесных областях поля течения и гидродинамической модели – в остальных областях.

Другое приложение относится к слабо неравновесным течениям вблизи активных (поглощающих или выделяющих газ) поверхностей. В этом случае кинетическая модель необходима только для формирования граничных условий на поверхности. На рис.2. представлены схемы расчетной области для обоих случаев: варианты *A* и *B* соответственно. Вертикальной линией на варианте *B* обозначена обтекаемая поверхность.



**Рис.2.** Схемы расчетных областей.  $\circ$  – узлы гидродинамической модели,  $+$  – узлы кинетической модели,  $\bullet$  – узлы сшивания моделей.

Не уменьшая общности, рассмотрим одномерное стационарное поле течения с геометрической координатой  $x_i \equiv x$ , и соответствующей ей скоростной координатой  $\xi_x$ . Допустим, что для численного решения применяется

конечно-разностный метод. Производные в системе (6) аппроксимируются центральными разностями на трех узлах, в системе (1) – односторонними разностями против потока, также на трех узлах. Отметим, что направление потока в кинетических уравнениях определяется направлением молекулярной скорости. В данном случае это скорость  $\xi_x$ , имеющая два противоположных направления. Следовательно, имеют место две разнонаправленные разностные схемы. Такой дискретный аналог вычислительной области в дальнейшем будет использован для численных тестов. Здесь он приведен только для наглядности изложения и не имеет принципиального значения.

В обоих вариантах рис.2 расчетная область изображена дважды, отдельно для гидродинамической (светлые кружки) и кинетической (крестики) моделей. В варианте *A* область решения гидродинамического решения разделена на две подобласти. Граничные условия левой подобласти формируются в узле (узел сшивания), обозначенном черной точкой и принадлежащем области кинетического решения. Для выбранного разностного шаблона достаточно одного узла. Значения  $\rho$ ,  $u_x$ ,  $T$  в этом узле определяются как моменты весовой функции, вычисленной в кинетической области. Аналогично строится решение в правой подобласти гидродинамического решения. При описании течения в пристеночной области достаточно одной гидродинамической подобласти. В варианте *A* между гидродинамической подобластью и стенкой располагается кинетическая подобласть (на рис.2 не показано).

Граничные условия кинетического решения формируются в узлах гидродинамической области (черные кружки): по два узла в каждой гидродинамической подобласти для соответствующих ( $\xi_x > 0$  или  $\xi_x < 0$ ) разностных шаблонов. Поскольку гидродинамическая модель менее информативна, чем кинетическая модель, для восстановления весовой функции в узлах сшивания используется аппроксимирующая весовая функция  $f_A$ . В случае пристеночного течения в граничном со стенкой узле восстанавливается весовая функция, определяемая законом взаимодействия молекул с твердой поверхностью.

С учетом порядка приближения гидродинамической модели, в качестве аппроксимирующей весовой функции целесообразно принять разложение равновесной, максвелловой функции. Такое разложение используется в ряде работ, например, в [7], для одноатомных газов. В случае многоатомного газа для функций  $f_{At}$  и  $f_{Ar}$  аналогичные разложения приводят к выражениям [9]:

$$f_{At} = f_M \left( 1 + \frac{1}{\rho(RT_t)^2} \left( \frac{1}{2} p_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta + \varphi_\alpha \left( \frac{c^2}{5RT_t} - 1 \right) c_\alpha \right) \right), \quad (7)$$

$$f_{Ar} = kT_r \left( \frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} f_{At} + f_M \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{\rho R^2 T_t T_r} \right), \quad (8)$$

$$f_M = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right). \quad (9)$$

Макропараметры этих выражений определяются гидродинамической моделью и рассматриваются в соответствующем приближении:

$$T_t = T_r = T, \quad p_{ij} = -\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha},$$

$$\varphi_i = -\frac{15}{4} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} R\mu \frac{\partial T}{\partial x_i}.$$

Вариант *B* на рис.2 предполагает решение модели *NSF* во всей расчетной области. Это позволяет строить расчетные сетки с гидродинамическим шагом, что принципиально важно при малых *Kn*. Сетка кинетического решения с шагом порядка длины пробега молекул строится в пределах последнего, пристеночного шага гидродинамической сетки. Макропараметры  $\rho$ ,  $u_x$ ,  $T$  в узлах сшивания получают интерполяцией гидродинамического решения.

После вычисления весовой функции движущихся к поверхности молекул в граничном узле восстанавливается весовая функция отраженных молекул. Для этого используется какой-либо закон взаимодействия молекул с поверхностью. Например, для хемо- или криосорбирующих поверхностей может быть использован диффузный закон отражения с учетом коэффициента поглощения массы [15].

На следующем этапе рассчитывается весовая функция отраженных молекул и вычисляются макропараметры в кинетической области. Для общего гидродинамического решения используются макропараметры только граничного узла. Кинетическая модель используется только для формирования граничных условий гидродинамической модели.

## 5. Численные тесты

**5.1. Задача о структуре ударной волны.** Задача решается в стационарной постановке и формулируется следующим образом. На границах рас-



четной области выставляются условия Ренкина-Гюгонио. Размер расчетной области составляет несколько десятков длин свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке:

$$\lambda_{\infty} = 3.2\mu_{\infty}(2\pi RT_{\infty})^{-1/2} / \rho_{\infty}. \quad (10)$$

Система уравнений модели *MKE* преобразуется следующим образом:

$$\xi_x \frac{\partial}{\partial x} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{p}{\mu} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r} \right|. \quad (11)$$

Преобразование входящих в (11) функций и параметров очевидно. Система уравнений модели *NSF* для данной задачи:

$$\begin{cases} \rho u_x = \rho_{\infty} u_{x\infty}, \\ \rho u_x \partial u_x / \partial x + \partial P_{xx} / \partial x_x = 0, \\ \rho u_x \partial T / \partial x + (\gamma - 1) P_{xx} \partial u_x / \partial x_x + c_v^{-1} \partial q_x / \partial x = 0. \end{cases} \quad (12)$$

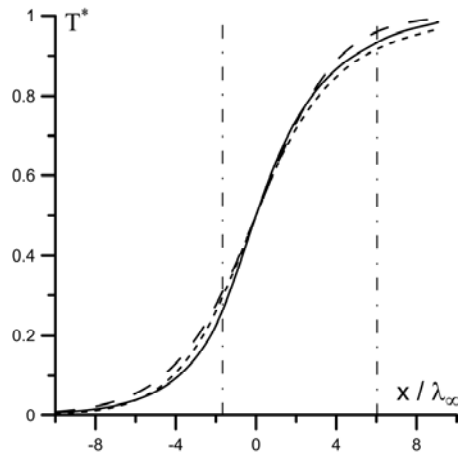
Во всех расчетах принимались аппроксимации коэффициента вязкости  $\mu = \mu(T_t^s)$  для кинетической модели и  $\mu = \mu(T^s)$  – для гидродинамической. Показатель степени  $s$  выбирался из соображений наилучшего совпадения профиля плотности с экспериментальными профилями работ [13,14]. Аппроксимации параметра  $Z$  для различных режимов течения взяты из работ [9,12,16]. В связи с направленностью данной работы авторы не рассматривали более точные и теоретически обоснованные зависимости параметров  $Z$  и  $s$ , имеющие более сложную форму. Такие зависимости можно найти в работах Жданова В.А., Елизаровой Т.Г., Тирского Г.А. и др. В настоящей работе нас более интересовал процесс сшивания моделей. Разностные схемы соответствуют описанным в разделе 4, вариант *A*.

Расчетные профили ударной волны комбинированной модели сравнивались с профилями моделей *MKE* и *NSF*. Расчеты показали, что наибольшее расхождение между профилями комбинированной модели и модели *MKE* имеет место на профилях температуры. Профили плотности и групповой скорости согласовывались существенно лучше. В дальнейшем будут рассматриваться только профили температуры, приведенной к единичному отрезку –  $T^*$ .

В области умеренных чисел Маха комбинированная модель давала гладкие профили, хотя в области кинетического решения наблюдалось заметное отличие от профилей модели *MKE* и от профилей, полученных дру-

гими авторами, например, [17]. На рис.3 показаны профили температуры для  $M_\infty=1.55$ .

Размер кинетической области комбинированной модели составлял  $7.8\lambda_\infty$ . Узлы сшивания моделей находились в высокоградиентной области. При увеличении размера кинетической области соответствующий профиль сближался с профилем модели *МКЕ*. Анализ вторых производных температуры в узлах сшивания не выявил разрыва первых производных, то есть изломов графика.



**Рис.3.** Приведенные профили температуры в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 1.55$ . Сплошная линия – комбинированная модель; мелкий пунктир – модель *МКЕ*; крупный пунктир – модель *NSF*; вертикальные штрихпунктирные линии – границы кинетической области комбинированной модели.

Такой характер решения наблюдался до  $M_\infty \approx 2$ . При бóльших числах Маха даже при достаточно больших размерах кинетической области ( $20 \div 30\lambda_\infty$ ) в ее граничных узлах возникал разрыв производных. Вместе с тем, профиль кинетической области комбинированной модели сближался с профилем модели *МКЕ*.

На рис.4 приведены профили температуры в случае гиперзвукового течения. В левом граничном узле кинетической области комбинированной модели наблюдается явно выраженный разрыв производных. Размер кинетической области комбинированной модели составляет  $17.2\lambda_\infty$ . Профиль кинетической области комбинированной модели практически совпадает с профилем *МКЕ*.

Еще одной характерной особенностью комбинированной модели является то, что во всей расчетной области, в том числе и в узле разрыва производной, законы сохранения выполняются с точностью до погрешности чис-

ленного интегрирования весовой функции по пространству скоростей.

Из рис.4 также следует, что несмотря на разрыв производной в граничном узле кинетической области, комбинированная модель позволяет существенно улучшить гидродинамическое решение.

Количественная оценка максимальной относительной погрешности вычисления температуры в зависимости от размера кинетической области комбинированной модели приведена на рис.5.

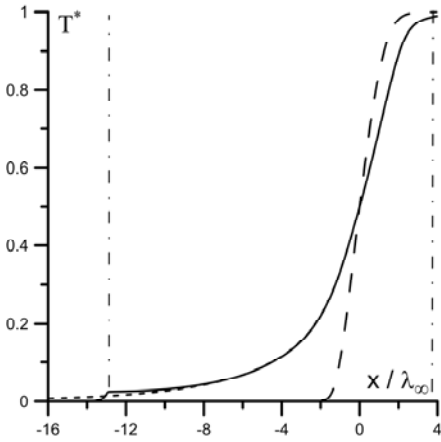


Рис.4. То же, что на рис.3,  $M_\infty = 7$ .

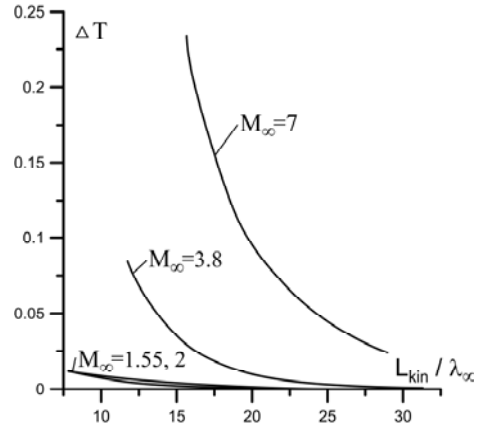


Рис.5. Максимальная относительная погрешность вычисления температуры в зависимости от протяженности кинетической области комбинированной модели.

**5.2. Плоское течение Куэтта.** Численные тесты комбинированной модели (вариант *A*) на примере течения Куэтта описаны в [18]. В настоящей работе отмечены основные особенности модели при использовании в пристеночной области течения и проведено сравнение вариантов *A* и *B*. В отличие от общей схемы течения (рис.2) в данной задаче вариант *A* содержит только одну гидродинамическую подобласть. Одна из границ кинетической области располагается на обтекаемой поверхности. На этой границе восстанавливается весовая функция отраженных молекул в соответствии с принятым законом взаимодействия молекул с поверхностью.

Схема течения и применяемая система координат показаны на рис.6.

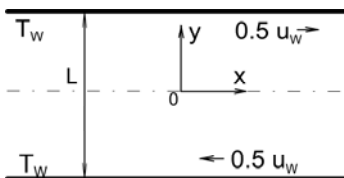


Рис.6. Схема течения Куэтта.

Характерная длина пробега молекулы, числа Маха и Кнудсена определены как

$$\lambda_0 = 3.2\mu_0(2\pi RT_w)^{-1/2}/\rho_0, \quad (13)$$

$$M = u_w/\sqrt{\gamma RT_w}, \quad (14)$$

$$Kn = \mu_0(\rho_0 L \sqrt{RT_w})^{-1}. \quad (15)$$

Здесь  $\rho_0$  – плотность газа до начала движения пластин,  $\mu_0$  – коэффициент вязкости, рассчитанный по температуре пластины  $T_w$ .

Система уравнений модели *MKE* соответствует (11) с заменой индекса  $x$  на  $y$ . На поверхности пластин для этой модели принят диффузный закон отражения молекул с коэффициентом аккомодации энергии, равным единице.

Система уравнений (6) модели *NSF* преобразуется следующим образом. Уравнение сохранения массы обращается в тривиальное тождество. Поле плотности определяется по уравнению сохранения импульса, записанному для  $u_y$ . В стационарном течении  $u_y = 0$  и закон сохранения импульса сводится к соотношению

$$\partial P_{yy}/\partial y = 0. \quad (16)$$

В рассматриваемом течении в приближении модели *NSF*  $p_{yy}=0$ , следовательно,

$$P_{yy} = \rho RT. \quad (17)$$

Выражения (16) и (17) в совокупности с очевидным соотношением

$$\frac{1}{L} \int_0^L \rho dy = \rho_0 \quad (18)$$

позволяют определить поле плотности:

$$\rho = L\rho_0 \left( T \int_0^L dy/T \right)^{-1}. \quad (19)$$

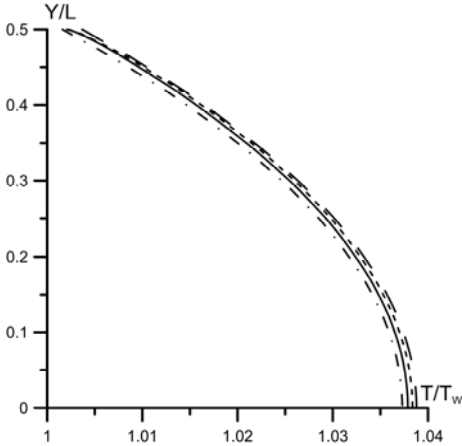
Уравнение сохранения импульса, записанное относительно  $u_x$ , и уравнение энергии системы (6) преобразуются как

$$\partial P_{xy}/\partial y = 0, \quad (20)$$

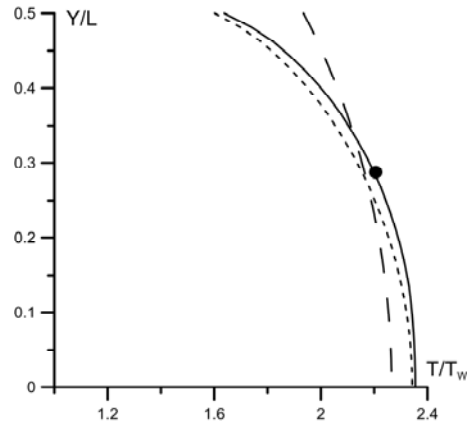
$$c_v(\gamma - 1)P_{xy}\partial u_x/\partial y + \partial q_x/\partial y = 0. \quad (21)$$

Для модели *NSF* принимались граничные условия скольжения пограничного слоя с коэффициентами, полученными в [10]. Значения параметра  $s$ , соответствующие наилучшему совпадению с экспериментальными коэффициентами трения на поверхности пластин, взяты из той же работы.

Тестирование показало, что наибольшее расхождение результатов различных моделей, как и в задаче о профиле ударной волны, наблюдаются на профиле температуры. На рис.7 показаны профили температуры для слабо неравновесного течения. Все рассмотренные модели дают практически совпадающие результаты.



**Рис.7.** Профили температуры.  $M_\infty = 1$ ,  $Kn=0.01$ . Сплошная линия – комбинированная модель, вариант *A*; мелкий пунктир – модель *MKE*, крупный пунктир – модель *NSF*; штрихпунктирные линии – комбинированная модель, вариант *B*.



**Рис.8.** Профили температуры.  $M_\infty = 5$ ,  $Kn=0.2$ . Сплошная линия – комбинированная модель, вариант *A*; мелкий пунктир – модель *MKE*, крупный пунктир – модель *NSF*; ● – граничная точка кинетической области комбинированной модели.

Кинетическая область комбинированной модели *A* составляла  $2\lambda_0$ . Шаг расчетных сеток всех моделей принимался постоянным и составлял  $0.1\lambda_0$ . Только гидродинамическая сетка комбинированной модели *B* строилась с шагом  $\lambda_0$ .

Вариант *B* комбинированной модели требовал примерно втрое меньше процессорного времени, чем вариант *A*. При меньших  $Kn$  эти преимущества варианта *B*, очевидно, будут возрастать.

Сильно неравновесное течение представлено на рис.8. Решение комбинированной модели остается гладким, удовлетворительно аппроксимирует кинетическое решение и существенно уточняет решение модели *NSF*.

## 6. Заключение

В настоящей работе показано, что комбинирование гидродинамической и кинетической моделей течения может быть вполне успешным, если в основе обеих моделей лежит единая физическая модель.

По аналогии с предложенной моделью может быть построена комбинированная модель, в которой для гидродинамического описания течения используются моментные уравнения любого, сколь угодно высокого порядка. При этом снимается вопрос выставления граничных условий на твердой поверхности. Для всех моментов, входящих в систему дифференциальных уравнений, имеют место граничные условия Дирихле.

Для практических задач, связанных с описанием течений вблизи твердых поверхностей, разработанная комбинированная модель пригодна в представленном виде. По-видимому, дополнительной разработки требует только несложный алгоритм перехода от одного варианта модели к другому при описании течений в широком интервале чисел Кнудсена.

Дополнительных исследований требует разработка алгоритма выделения высоко неравновесных областей в поле течения, например, выделение фронта ударной волны. Верхней оценкой размера кинетической области модели в случае ударных волн могут служить данные для плоской ударной волны, представленные на рис.5.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *P. Degond, S. Jin, L. Mieussens.* A smooth transition model between kinetic and hydrodynamic equations // *Journal of Computational Physics*, 2005, v.209, p.665-694.
2. *I.V. Egorov, A.I. Erofeev.* Continuum and kinetic approaches to the simulation of the hypersonic flow past a flat plate // *Fluid Dynamics*, January 1997, v.32, №1, p.112-122.
3. *G. Abbate, C.R. Kleijn, B.J. Thijsse.* Hybrid continuum/molecular simulations of transient gas flows with rarefaction // *AIAA Journal*, 2009, v.47, №7, p.1741-1749.
4. *N. Crouseilles, P. Degond, M. Lemou.* A hybrid kinetic-fluid model for solving the gas dynamics Boltzmann-BGK equations // *J. Comput. Phys.*, 2004, v.199, p.776-808.
5. *N. Crouseilles, P. Degond, M. Lemou.* A hybrid kinetic-fluid model for solving the Vlasov-BGK equations // *Journal of Comput. Phys.*, 2005, v.203, p.572-601.
6. *Е.М. Шахов.* Метод исследования движений разреженного газа. – М.: Наука, 1975, 207 с.;  
*Е.М. Шахов.* Metod issledovaniia dvizhenii razrezhennogo gaza. – М.: Nauka, 1975, 207 s.
7. *O.I. Rovenskaya, G. Croce.* Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic–continuum approach versus Navier–Stokes // *Microfluid Nanofluid*, 2016, 20:81.
8. *Ю.А. Никитченко.* О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // *Изв. РАН, МЖГ*, 2018, №2, с.128-138;

- англ. пер.: *Yu.A. Nikitchenko*. On the Reasonability of Taking the Volume Viscosity Coefficient into Account in Gas Dynamic Problems // *Fluid Dynamics*,...
9. Ю.А. Никитченко. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2017, т.57, №11, с.117-129; англ. пер.: *Yu.A. Nikitchenko*. Model Kinetic Equation for Polyatomic Gases // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2017, v.57, №11, p.1843-1855.
  10. Ю.А. Никитченко. Модели неравновесных течений. – М.: Изд-во МАИ, 2013, 160 с.; *Yu.A. Nikitchenko*. Modeli neravnovesnykh techenii. – М.: Izd-vo MAI, 2013, 160 s.
  11. В.А. Рыков. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы // Изв. АН СССР, МЖГ, 1975, №6, с.107-115; англ. пер.: *V.A. Rykov*. A model kinetic equation for a gas with rotational degrees of freedom // *Fluid Dynamics*, 1975, v.10, №6, p.959-966.
  12. И.Н. Ларина, В.А. Рыков. Кинетическая модель уравнения Больцмана для двухатомного газа с вращательными степенями свободы // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 2010, т.50, №12, с.2233-2245; англ. пер.: *I.N. Larina, V.A. Rykov*. Kinetic model of the Boltzmann equation for a diatomic gas with rotational degrees of freedom // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, v.50, №12, p.2118-2130.
  13. *H. Alsmeyer*. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electron beam // *J. Fluid Mech.* 1976. V. 74. Pt. 3. Pp. 497-513.
  14. *F. Robben, L. Talbot*. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave // *Phys. Fluids*, 1966, v.9, №4, p.653-662.
  15. В.С. Глинкина, Ю.А. Никитченко, С.А. Попов, Ю.А. Рыжов. О коэффициенте лобового сопротивления сорбирующей пластины, установленной поперек потока // Известия РАН, МЖГ, 2016, №6, с.77-84; англ.пер.: *V.S. Glinkina, Yu.A. Nikitchenko, S.A. Popov, Yu.A. Ryzhov*. Drag Coefficient of an Absorbing Plate Set Transverse to a Flow // *Fluid Dynamics*, 2016, v.51, №6, p.791-798.
  16. А.И. Ерофеев. Исследование структуры ударной волны в азоте на основе траекторных расчетов взаимодействия молекул // Известия РАН, МЖГ, 2002, №6, с.134-147; англ. пер.: *A.I. Erofeev*. Investigation of the Nitrogen Shock Wave Structure on the Basis of Trajectory Calculations of the Molecular Interaction // *Fluid Dynamics*, 2002, v.37, №6, p.970-982.
  17. *T.G. Elizarova, A.A. Khokhlov, S. Montero*. Numerical simulation of shock wave structure in nitrogen // *Physics of Fluids*, 2007, v.19, №6, 068102.
  18. М.Э. Березко, Ю.А. Никитченко, А.В. Тихоновец. Сшивание кинетической и гидродинамической моделей на примере течения Куэтта // Труды МАИ, вып. №94, <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>.  
*M.E. Berezko, Yu.A. Nikitchenko, A.V. Tikhonovets*. Sshivanie kineticheskoi i gidrodinamicheskoi modelei na primere techeniya Kuetta // *Trudy MAI*, vyp. №94, <http://trudymai.ru/published.php?ID=80922>.

Поступила в редакцию 27.02.18

После доработки 05.09.18

Принята к публикации 10.09.18