МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 год, том 31, номер 2, стр. 33-47

ОПТИМАЛЬНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ В УПРАВЛЯЕМОЙ МОДЕЛИ БИЗНЕС–ЦИКЛА КАЛДОРА

 А.С. Асеев

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК anton.ser.as@gmail.com

DOI: 10.1134/S0234087919020035

Изучаются оптимальные стационарные режимы в управляемой версии модели бизнес-цикла Н. Калдора. В качестве управления рассматривается параметр, характеризующий стимулирование спроса государством. Стоимость стимулирующей политики моделируется при помощи квадратичной функции, а функция мгновенной полезности определяется как величина национального дохода, взятая с учетом расходов на стимулирование спроса. В соответствующей оптимизационной задаче доказано существование оптимального стационарного режима и приведены условия, гарантирующие его единственность. Показано, что оптимизация стационарного режима всегда приводит к увеличению как значения функции мгновенной полезности, так и величины потребления по сравнению со стационарными состояниями исходной (неуправляемой) модели. Рассмотрены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: динамические модели в экономике, модель бизнес-цикла Н. Калдора, оптимальное управление, оптимальный стационарный режим.

OPTIMAL STATIONARY REGIMES IN KALDOR'S BUSINESS-CYCLE CONTROLLED MODEL

A.S. Aseev

Lomonosov Moscow State University, Faculty of CMC

The paper studies optimal stationary regimes in a controlled version of N. Kaldor's business cycle model. The parameter characterizing stimulation of demand by a central planner is considered as a control. The value of the stimulating policy is modeled via quadratic function, and the instantaneous utility function is defined as the value of the national income minus the cost of the stimulating policy. In the corresponding optimization problem, the existence of an optimal stationary regime is proved and conditions that guarantee its uniqueness are given. It is shown that optimization of the stationary state always leads to greater values of both the instantaneous utility function and the consumption than in stationary states of initial (uncontrolled) model. The results of numerical simulation are considered as well.

Key words: dynamic models in economics, N. Kaldor's business cycle model, optimal control, optimal stationary regime.

1. Введение

Различные модели экономической динамики привлекают внимание как экономистов, так и математиков (см., например, [1, 2]). С одной стороны, этот интерес вызван практической необходимостью, поскольку во многих случаях математическое моделирование является единственным доступным средством исследования сложных экономических систем. С другой стороны, моделирование экономических систем нередко приводит к новым содержательным математическим задачам. Особый интерес представляет изучение нелинейных моделей экономической динамики, способных генерировать циклические движения, которые, в частности, могут интерпретироваться как повторяющиеся экономические кризисы. Одной из таких моделей, в которой возможна циклическая динамика, является предложенная в 40-х годах XX века модель бизнес-цикла Н. Калдора (см. [3, 4]).

Модель бизнес-цикла Н. Калдора (далее, для краткости, просто модель Калдора) описывает динамику национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в идеализированной рыночной экономике при заданных функциях инвестиций и сбережений. Основная идея модели состоит в том, что наблюдаемые периоды экономического роста, с последующими за ними спадами (кризисами), могут иметь внутреннюю природу, связанную с нелинейностями, присущими реальным экономическим процессам. Целью модели Калдора является изучение условий при которых совместное воздействие инвестиций и спроса на динамику экономической системы неизбежно приводит к циклу (см. [4]). Данная модель изучалась многими авторами, главным образом с точки зрения ее бифуркационного анализа, выделения условий, при которых среди траекторий модели возникает предельный цикл, а также с целью изучения влияния на динамику модели случайных возмущений и запаздываний (см. [2, 5–7]). Вопрос о стабилизации динамики в модели Калдора рассматривался в [8]. Подробное обсуждение модели Калдора в контексте теории бизнес-циклов см. в [9].

В настоящей работе рассматривается несколько отличающаяся от оригинальной версия модели Калдора. Кроме того, в динамику модели введен управляющий параметр, характеризующий стимулирование потребительского спроса гипотетическим центральным планирующим органом (государством). Изменяя этот параметр центральный планирующий орган может стимулировать спрос и тем самым воздействовать на динамику системы. При отсутствии стимулирования спроса система следует траекториям, соответствующим исходной неуправляемой модели. В частности, это могут быть циклические движения, которые можно интерпретировать как периодически повторяющиеся подъемы и спады экономической активности. В случае управляемой модели качество процесса управления в каждый момент времени оценивается величиной национального дохода, взятого с учетом расходов на стимулирование спроса. В соответствующей оптимизационной задаче доказано существование оптимального стационарного режима и приведены условия, гарантирующие его единственность. Доказано, что оптимизация стационарного режима всегда приводит к одновременному увеличению величин мгновенной полезности и потребления по сравнению со стационарными состояниями неуправляемой модели. При помощи численного моделирования показано, что в некоторых ситуациях траектории неуправляемой системы осуществляют циклические движения, соответствующие периодически повторяющимся кризисам, в то время как при оптимальном выборе управляющих параметров у нее возникает единственное устойчивое оптимальное состояние равновесия, которое с экономической точки зрения предпочтительнее неуправляемых циклических движений.

Заметим, что характер стационарных состояний часто полностью определяет долговременную динамику рассматриваемой системы. Если же ее предельное множество состоит из единственного устойчивого состояния равновесия, то все траектории управляемой системы, независимо от начального состояния, асимптотически стремятся к нему. В связи с этим обстоятельством оптимальные стационарные состояния играют важную роль при изучении процессов экономического роста [10]. Заметим, что известное "золотое правило" накопление капитала в неоклассической модели экономического роста Солоу-Свана соответствует состоянию равновесия системы, оптимальному с точки зрения величины потребления (см., например, [1, Chapter 2], [11, Chapter 1]).

Дальнейшее изложение построено следующим образом. В разд.2 приводится описание модифицированной модели Калдора. В разд.3 строится ее управляемая версия и определяется функция мгновенной полезности, характеризующая качество процесса управления в каждый момент времени $t \geq 0$. Затем рассматриваются общие свойства построенной управляемой системы, доказывается существование наилучшего с точки зрения выбранной функции мгновенной полезности стационарного режима и изучаются его свойства. В разд.4 приводятся результаты численного моделирования.

2. Модифицированная модель Калдора

Рассмотрим следующую версию модели Калдора (см., например, [2–4, 6]):

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) &= \alpha\left[I\left(Y(t),\ K(t)\right) - S\left(Y(t)\right)\right], \\ \dot{K}(t) &= I\left(Y(t),\ K(t)\right) - \delta K(t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $Y(t)$ и $K(t)$ – величины национального дохода и основных производственных фондов (капитала) в момент $t \geq 0$, $\alpha > 0$ – поправочный коэффициент, характеризующий скорость реакции системы, $\delta > 0$ – норма амортизации основных фондов.

Будем считать, что функции инвестиций $I(Y,\ K)$, $Y \geq 0$, $K \geq 0$, и сбережений $S(Y)$, $Y \geq 0$, имеют следующий вид:

$$I(Y,\ K) = \begin{cases} I(Y) - \beta K & \text{при} \quad K \leq I(Y)/\beta, \\ 0 & \text{при} \quad K > I(Y)/\beta, \end{cases} \qquad S(Y) = \gamma Y, \tag{2}$$

где $\beta > 0$, $0 < \gamma < 1$, а функция $I:\ [0;\ \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ имеет логистический вид, т.е. $I(Y)$ – такая положительная дважды непрерывно дифференцируемая функция, что $I(0) = I_0 > 0$, $\lim_{Y\to\infty} I(Y) = I_\infty < \infty$, $I'(Y) > 0$ и существует такое $\hat{Y} > 0$, что $I''(Y) > 0$, если $Y < \hat{Y}$ и $I''(Y) < 0$, если $Y > \hat{Y}$.

Заметим, что при функциях инвестиций $I(Y,\ K)$ и сбережений $S(Y)$, определенных равенствами (2), система (1) отличается от оригинальной модели Калдора [4]. В частности, здесь функция инвестиций $I(Y, K)$ – неотрицательная, а функция сбережений $S(Y)$ не зависит от фазовой переменной K. Неотрицательность функции инвестиций означает, что в рассматриваемой экономике вывод капитала (т.е. случай отрицательных инвестиций) невозможен. Параметр γ во втором равенстве в (2) характеризует величину сбережений $S(t)$ как фиксированную часть $\gamma Y(t)$ национального дохода $Y(t)$ в каждый момент времени $t \geq 0$.

Нетрудно видеть, что в силу сделанных предположений правая часть системы (1) липшицева. Поэтому в силу стандартных теорем существования и единственности (см., например, [12]), для любого начального состояния $(Y_0,\ K_0)$, $Y_0 \geq 0$, $K_0 \geq 0$, система (1) имеет единственное решение $\big(Y(t),\ K(t)\big)$, определенное на некотором интервале времени $[0,\ T)$, $T > 0$, и удовлетворяющее начальным условиям

$$Y(0) = Y_0, \qquad K(0) = K_0. \tag{3}$$

Из положительности функции $I(Y)$ и равенств (2) вытекает, что данное решение лежит в неотрицательном ортанте $\mathbb{R}^2_+ = \{(Y,\ K):\ Y \geq 0,\ K \geq 0\}$.

Более того, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть функции инвестиций* $I(Y,\ K)$ *и сбережений* $S(Y)$ *определены равенствами* (2). *Тогда*

1) *Для любых* $Y_0 \geq 0$, $K_0 \geq 0$ *и любых значений параметров* $\alpha > 0$, $\beta > 0$ *и* $0 < \gamma < 1$ *прямоугольник*

$$G = \left\{(Y,\ K):\ 0 \leq Y \leq \max\left\{Y_0, I_\infty / \gamma\right\},\quad 0 \leq K \leq \max\left\{K_0,\ I_\infty / \beta\right\}\right\} \tag{4}$$

является инвариантным множеством системы (1).

2) *Для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует такая жорданова кривая (гомеоморфный образ окружности)* Γ_ε, *лежащая в прямоугольнике* G *и отстоящая от его границы не более чем на* ε (*в хаусдорфовой метрике), что на кривой* Γ_ε *векторное поле системы* (1) *направлено строго во внутрь ограниченного этой кривой множества.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Для этого определим кривую $\Gamma \subset G$ равенством

$$\Gamma = \left\{(Y,\ K):\ Y \in \left[0, \max\left\{Y_0,\ I_\infty / \gamma\right\}\right],\quad K = I(Y) / \beta\right\}$$

и обозначим $\Gamma_1 = \left\{(Y,\ K) \in G:\ K = 0\right\}$, $\Gamma_2 = \left\{(Y,\ K) \in G:\ Y = \max\left\{Y_0,\ I_\infty/\gamma\right\}\right\}$, $\Gamma_3 = \left\{(Y,\ K) \in G:\ K = \max\left\{K_0,\ I_\infty/\beta\right\}\right\}$, $\Gamma_4 = \left\{(Y,\ K) \in G:\ Y = 0\right\}$ – нижнюю, правую, верхнюю и левую стороны прямоугольника G соответственно (см. рис.1). В силу равенств (2) в каждой точке $(Y, K) \in G$, лежащей на кривой Γ или выше нее, векторное поле системы (1) имеет вид $f(Y, K) = (-\alpha\gamma Y, -\delta K)$.

Следовательно, в прямоугольнике G выше кривой Γ при $Y > 0$ траектории системы (1) движутся по интегральным кривым вида $K = CY^{\delta/\alpha\gamma}$, где $C > 0$ – постоянная в направлении начала координат. Если же траектория $\left(Y(t),\ K(t)\right)$ в некоторый момент $\tau \geq 0$ находится на стороне Γ_4 прямоугольника G выше кривой Γ (т.е. $Y(\tau) = 0,\ K(\tau) > I_0/\beta$), то на некотором конечном отрезке $[\tau,\ \tau_1]$, $\tau_1 > \tau$, данная траектория движется вниз по стороне Γ_4, пока она не попадет в момент τ_1 на кривую Γ.

В точках $(Y, K) \in G$, лежащих ниже кривой Γ, векторное поле системы (1) имеет вид $f(Y, K) = \left(\alpha(I(Y) - \beta K - \gamma Y),\ I(Y) - (\beta + \delta)K\right)$ (см. рис.1). Отсюда следует, что во всех точках $(Y, K) \in \Gamma_4$, лежащих на или ниже кривой Γ, и всех точках (Y, K), лежащих на сторонах Γ_1, Γ_2 и Γ_3 прямоугольника G, векторное поле системы (1) направлено строго внутрь прямоугольника G.

Таким образом, система (1) не имеет стационарных точек на границе прямоугольника G и ни одно решение $\left(Y(t),\ K(t)\right)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию (3), не может покинуть прямоугольник G.

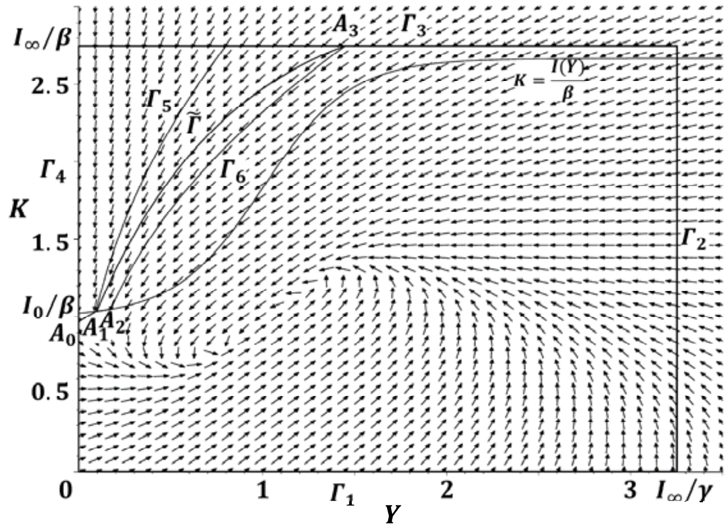

Рис.1. Векторное поле системы (1) в G.

Докажем утверждение 2). В точке $(0, I_0/\beta) \in \Gamma_4 \cap \Gamma$ правая часть системы (1) есть вектор $f(0, I_0/\beta) = (0, -\delta I_0/\beta) \neq 0$. Следовательно, в силу непрерывности векторного поля системы (1) в G, для любого сколь угодно малого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такая точка $A_0 \in \Gamma_4$, лежащая ниже кривой Γ, и точки $A_1 \in \Gamma$, $A_2 \in \Gamma$, $A_1 \neq A_2$, причем точка A_1 лежит между $(0, I_0/\beta)$ и A_2, что точки A_0, A_1 и A_2 отстоят от точки $(0,\ I_0/\beta)$ не более чем на ε_1 и отрезок $[A_0, A_1]$ является трансверсалью системы (1). Пусть Γ_5 и Γ_6 – интегральные кривые траекторий системы (1), приходящих в точки $A_1 \in \Gamma$ и $A_2 \in \Gamma$ из части прямоугольника G, лежащей выше кривой Γ (см. рис.1). Очевидно, при любом достаточно малом $\varepsilon_1 > 0$ в силу определения системы выше кривой Γ (см. (2)), кривые Γ_5 и Γ_6 лежат выше Γ. Пусть A_3 – точка пересечения кривой Γ_6 со стороной Γ_3 прямоугольника G (см. рис.1). Используя явный вид интегральных кривых системы (1) в прямоугольнике G выше кривой Γ, несложно показать, что существует такая гладкая кривая $\tilde{\Gamma}$, соединяющая точки A_1 и A_3 и лежащая в G между кривыми Γ_5 и Γ_6, что векторное поле системы (1) трансверсально этой кривой. Тогда, по построению, кривая G_{ε_1}, образованная сторонами Γ_1, Γ_2 прямоугольника G и (зависящими от ε_1) частями сторон Γ_3 (от Γ_2 до A_3) и Γ_4 (от 0 до A_1), отрезком $[A_1,\ A_2]$ и кривой $\tilde{\Gamma}$, соединяющей A_1 и A_3, является жордановой и векторное поле системы (1) направлено строго внутрь ограниченного этой кривой множества. По построению, для сколько угодно малого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое малое $\varepsilon_1 > 0,$ что кривая Γ_{ε_1} отстоит от границы прямоугольника G не более чем на ε. В этом случае кривая Γ_{ε_1} удовлетворяет всем условиям утверждения 2). Утверждение 2) доказано. ■

Из теоремы 1 немедленно вытекают следующие свойства системы (1).

Следствие 1. *Для любых* $Y_0 \geq 0,$ $K_0 \geq 0$ *и любых значений параметров* $\alpha > 0,$ $\beta > 0$ *и* $0 < \gamma < 1$ *решение* $\left(Y(t), K(t)\right)$ *задачи Коши* (1), (3) *определено на всем бесконечном интервале* $[0,\ \infty)$ *и лежит в соответствующем прямоугольнике* G (см. (4)).

Действительно, в силу определения прямоугольника G, имеем $(Y_0, K_0) \in G.$ В силу утверждения 1) теоремы 1 решение $\left(Y(t), K(t)\right)$ задачи Коши (1), (3) на всем интервале своего определения $[0, T)$ лежит в $G.$ Так как множество G – ограниченное, решение $\left(Y(t), K(t)\right)$ определено на всем бесконечном интервале $[0,\ \infty)$.

Следствие 2. *Для любых* $Y_0 \geq 0,$ $K_0 \geq 0$ *и любых значений параметров* $\alpha > 0,$ $\beta > 0$ *и* $0 < \gamma < 1$ *открытое множество* $G_0 = \operatorname{int} G$ (*внутренность прямоугольника* G) *инвариантно относительно системы* (1).

Действительно, в силу утверждения 1) теоремы 1 для любого начального условия $(Y_0, K_0) \in G_0$ существуют такие $\varepsilon > 0$ и жорданова кривая Γ_ε в G, что точка (Y_0, K_0) принадлежит открытому множеству, ограниченному кривой Γ_ε, и это множество инвариантно относительно системы (1). Следовательно, открытое множество G_0 инвариантно относительно системы (1).

Следствие 3. *Если система* (1) *имеет единственную стационарную точку* $(\tilde{Y}, \tilde{K}) \in G_0,$ *причем действительные части собственных значений матрицы Якоби системы в этой точке – отрицательные, то у системы* (1) *существует в* G_0 *замкнутая периодическая траектория.*

Действительно, в силу теоремы Пуанкаре–Бендиксона [12] данное следствие вытекает из утверждения 2) теоремы 1.

Для стационарности точки $(\tilde{Y}, \tilde{K})$ необходимо и достаточно выполнения равенств

$$\tilde{Y} = \frac{\delta}{(\beta + \delta)\gamma} I(\tilde{Y}), \qquad \tilde{K} = \frac{I(\tilde{Y})}{\beta + \delta}. \tag{5}$$

Из логистического характера функции $I(Y)$ вытекает, что первое уравнение в (5) имеет по крайней мере один, но не более трех корней. Следовательно, система (1) имеет по крайней мере одну, но не более трех стационарных точек $(\tilde{Y},\tilde{K})\in G.$ Так как в силу (2) все стационарные точки системы (1) расположены строго ниже кривой $\Gamma,$ то в некоторой окрестности каждой стационарной точки правая часть системы (1) дважды непрерывно дифференцируема. Поэтому для изучения характера поведения системы (1) вблизи ее невырожденных стационарных точек можно использовать соответствующие линейные приближения [12, гл.VIII].

Матрица Якоби $\mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})$ системы (1) в стационарной точке $(\tilde{Y},\tilde{K})\in G$ имеет вид

$$\mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})=\begin{pmatrix}\alpha\left(I'(\tilde{Y})-\gamma\right) & -\alpha\beta\\ I'(\tilde{Y}) & -\beta-\delta\end{pmatrix}. \tag{6}$$

Следовательно,

$$\det \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})=-\alpha\delta I'(\tilde{Y})+\alpha\gamma(\beta+\delta) \tag{7}$$

и

$$\mathrm{tr}\ \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})=\alpha I'(\tilde{Y})-(\alpha\gamma+\beta+\delta). \tag{8}$$

Соответственно, собственные значения матрицы $\mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})$ суть следующие:

$$\lambda_{1,2}=\frac{\mathrm{tr}\ \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})\pm\sqrt{\left(\mathrm{tr}\ \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})\right)^2-4\det \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})}}{2}.$$

Таким образом, условие $\det \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})>0$ исключает седловой характер стационарной точки $(\tilde{Y},\tilde{K}).$ В этом случае в силу теоремы Гробмана–Хартмана [12] из условия $\mathrm{tr}\ \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})<0$ следует, что стационарная точка $(\tilde{Y},\tilde{K})$ системы (1) асимптотически устойчива, а из условия $\mathrm{tr}\ \mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})>0$ вытекает, что стационарная точка $(\tilde{Y},\tilde{K})$ системы (1) асимптотически неустойчива.

3. Оптимальные стационарные режимы

В замкнутой экономике в каждый момент $t\geq 0$ величина сбережений $S(t)$ есть непотребленная часть дохода $Y(t)$ [3, Глава 3]. Введем в модифицированную модель Калдора (1) управляющий параметр $u\in[0,\ 1],$ характеризующий долю $uS(t)$ сбережений $S(t)=\gamma Y(t),$ перераспределенную в потребление $C(t)\ :=\ Y(t)-S(t)$ в момент времени $t\geq 0$ в результате проводимой центральным планирующим органом политики стимулирования спроса. Тогда каждому значению параметра $u\in[0,1]$ будет соответствовать новая функция сбережений $S(Y,u)=\gamma Y-u\gamma Y=\gamma_u Y$, где $\gamma_u=(1-u)\gamma$. Если $u=0$, то увеличения потребления не происходит, функция сбережений остается прежней: $S(Y,0)=\gamma Y$. Если $u=1$, то весь произведенный продукт потребляется, и величина сбережений в этом случае нулевая: $S(Y,1)=0$.

Используя новую функцию сбережений, переходим к следующей управляемой версии модели Калдора:

$$\begin{aligned}\dot{Y}(t) &= \alpha\Big[I\big(Y(t),K(t)\big) - \big(1-u(t)\big)\gamma Y(t)\Big],\\ \dot{K}(t) &= I\big(Y(t),K(t)\big) - \delta K(t).\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь, как и раньше, предполагается, что функция инвестиций $I(Y,K)$ определяется первым равенством в (2). В качестве допустимых управлений рассматриваются все измеримые по Лебегу функции $u:\,[0,\,\infty)\mapsto[0,\,1]$.

Пусть задано начальное состояние (Y_0,K_0), $Y_0\ge 0$, $K_0\ge 0$, и допустимое управление $u(t)$. Тогда соответствующая допустимая траектория $\big(Y(t),K(t)\big)$ есть абсолютно непрерывное решение системы (9), удовлетворяющее начальному условию (3). Нетрудно видеть, что для любого начального состояния (Y_0,K_0), $Y_0\ge 0$, $K_0\ge 0$, и произвольного допустимого управления $u(t)$ соответствующая допустимая траектория $\big(Y(t),K(t)\big)$ определена на всем бесконечном интервале времени $[0,\,\infty)$ и лежит в полосе $\big\{(Y,K):\,Y\ge 0,\ 0\le K\le \max\{K_0,\ I_\infty/(\beta+\delta)\}\big\}$.

Выясним, при каких значениях $\tilde{Y}>0$ существует такое постоянное управление $\tilde{u}(t)\equiv u(\tilde{Y})\in[0,\,1]$, $t\ge 0$, что при его подстановке вместо $u(t)$ система (9) имеет стационарную точку $\big(\tilde{Y},K(\tilde{Y})\big)$. Приравняв нулю правые части системы (9), в силу (2) получаем равенства

$$K(\tilde{Y})=\frac{I(\tilde{Y})}{\beta+\delta},\qquad u(\tilde{Y})=1-\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}\frac{I(\tilde{Y})}{\tilde{Y}}. \tag{10}$$

Поскольку допустимое управление $\tilde{u}(t)\equiv u(\tilde{Y})$ должно удовлетворять ограничению $\tilde{u}(t)\in[0,\,1]$, $t\ge 0$, то для любого такого $\tilde{Y}>0$ должно выполняться неравенство

$$\tilde{Y}\ge\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}I(\tilde{Y}). \tag{11}$$

В этом случае управление $\tilde{u}(t)\equiv u(\tilde{Y})$, $t\ge 0$, является допустимым и реализует стационарную точку $\left(\tilde{Y}, K(\tilde{Y})\right)$ (см. (10)) в системе (9). В дальнейшем любую такую тройку $\left(\tilde{Y}, K(\tilde{Y}),\ u(\tilde{Y})\right)$ будем называть стационарным режимом системы (9).

Заметим, что в силу свойств функции $I(Y)$ неравенство (11) выполняется для всех достаточно больших значений $Y > 0$. Отсюда вытекает, что для любого достаточно большого $Y > 0$ система (9) имеет соответствующий стационарный режим $\left(Y, K(Y), u(Y)\right)$. Кроме того, поскольку $\lim_{Y\to\infty} I'(Y)= = 0$, то для всех достаточно больших значений $Y > 0$ выполняются неравенства $\det \mathrm{J}\left(Y, K(Y)\right) > 0$ (см. (7)) и $\mathrm{trJ}\left(Y, K(Y)\right) < 0$ (см. (8)). Таким образом, при всех достаточно больших значениях национального дохода $Y > 0$ соответствующая ему стационарная точка $\left(Y, K(Y)\right)$ системы (9) асимптотически устойчива. Если же в стационарной точке $\left(Y, K(Y)\right)$ величина национального дохода Y недостаточно велика, то в зависимости от значений параметров модели α, β, γ и δ, данная стационарная точка может быть как устойчивой, так и неустойчивой (см. (7), (8)).

Естественно возникает задача об оптимизации стационарного режима системы (9) посредством стимулирования величины спроса (потребления).

Определим стоимость стимулирования спроса на величину $u\gamma Y$, $u \in [0,1]$, стандартным образом при помощи квадратичной функции $\varphi(Y,\ u)= =\omega(u\gamma Y)^2 \big/ 2$, где $\omega > 0$ − некоторая постоянная [13]. В качестве функции мгновенной полезности $\Phi(Y,\ u)$ будем рассматривать величину национального дохода, взятого с учетом стоимости стимулирования спроса, т.е. положим

$$\Phi(Y,\ u) = y - \varphi(Y,\ u) = Y - \frac{\omega\gamma^2}{2}(uY)^2.$$

Стационарный режим $\left(Y_*,\ K_*(Y),\ u(Y_*)\right)$ будем называть оптимальным, если величина Y_* доставляет наибольшее возможное значение функции

$$\Phi(Y) := \Phi\left(Y,\ u(Y)\right) = Y - \frac{\omega\gamma^2}{2}\left(Y - \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma} I(Y)\right)^2, \tag{12}$$

среди всех стационарных режимов $\left(Y, K(Y), u(Y)\right)$ системы (9) (см. (10), (11)).

Таким образом, для нахождения оптимального стационарного режима $\left(Y_*, K_*(Y), u(Y_*)\right)$ в управляемой модели Калдора (9) необходимо решить следующую задачу (Q) (см. (11), (12)):

$$\Phi(Y) \to \max, \qquad Y \geq \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}.$$

Напомним, что $\hat{Y}$ – корень уравнения $I''(Y)=0$, где $I(Y)$, $Y \geq 0$ – логистическая функция, фигурирующая в определении функции инвестиций $I(Y,K)$ (см. (2)). В силу свойств функции $I(Y)$ и условия $I(0)=I_0>0$ уравнение

$$Y = \frac{\delta I(Y)}{(\beta+\delta)\gamma}, \qquad Y>0, \tag{13}$$

имеет по крайней мере один, но не более трех корней, каждому из которых соответствует положение равновесия $\big(Y, K(Y)\big)$ исходной системы (1) (см. (5)). Обозначим через $Y_{\max}$ – максимальный корень уравнения (13).

Теорема 2. *Для любых значений параметров системы* (9) *в задаче* (Q) *существует решение* Y_* *и выполняется неравенство* $Y_* > Y_{\max}$. *Соответствующее оптимальное стационарное управление* $u_*(Y_*)$ *положительно и определяется равенством*

$$u_*(Y_*) = 1 - \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}\frac{I(Y_*)}{Y_*}. \tag{14}$$

Если $\hat{Y} \leq Y_{\max}$, *то решение* Y_* *задачи* (Q) – *единственное.*

Доказательство. В силу логистического вида функции $I(Y)$ и условия $I(0)=I_0>0$ уравнение (13) имеет максимальный корень $Y_{\max}>0$. Поскольку функция $I(Y)$ ограничена, то для всех $Y>Y_{\max}$ выполняется неравенство $Y>\delta I(Y)\big/\big((\beta+\delta)\gamma\big)$. Следовательно, каждому $Y \geq Y_{\max}$ соответствует стационарный режим $\big(Y, K(Y), u(Y)\big)$ (см. (10)). Из равенства (12) и того факта, что $Y_{\max}$ является корнем уравнения (13) для любого $Y<Y_{\max}$, вытекает неравенство $\Phi(Y)<Y_{\max}=\Phi(Y_{\max})$. Таким образом, задача (Q) эквивалентна задаче максимизации функции $\Phi(Y)$ на полуинтервале $[Y_{\max},\ \infty)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(Y)$ на полуинтервале $[Y_{\max},\ \infty)$.

Так как $\Phi(Y_{\max})=Y_{\max}>0$, а при $Y\to\infty$ имеем $I(Y)\to I_\infty$, то в силу квадратичного роста по Y функции $\varphi\big(Y,\ u(Y)\big)$ при всех достаточно больших Y выполняется неравенство $\Phi(Y)<0$. Отсюда в силу непрерывности функции $\Phi(Y)$ и того факта, что $\Phi'(Y_{\max})=1$ вытекает существование такого $Y>Y_{\max}$, что

$$\Phi(Y_*) = \max_{Y\in[Y_{\max},\ \infty)} \Phi(Y).$$

Следовательно, в задаче (Q) существует решение Y_* и кроме того $Y_* > Y_{\max}$.

Из условия (10) вытекает равенство (14). Поскольку, как показано выше, всегда выполняется неравенство $Y_* > Y_{\max}$, равенство (14) влечет неравенство $u(Y_*) > 0$.

Докажем теперь единственность оптимального стационарного режима в случае $\hat{Y} \le Y_{\max}$. В этом случае в силу свойств функции $I(Y)$ для любого $Y > Y_{\max}$ имеем $I''(Y) < 0$. Отсюда при помощи непосредственных вычислений для $Y > Y_{\max}$ получаем

$$\Phi''(Y) = -\omega\gamma^2\left(1 - \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma} I'(Y)\right)^2 + \frac{\omega\gamma\delta}{\beta+\delta}\left(Y - \frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma} I(Y)\right) I''(Y) < 0.$$

Следовательно, функция $\Phi(Y)$ строго вогнута на выпуклом множестве $[Y_{\max}, \infty)$. Следовательно, она достигает своего максимума на $[Y_{\max}, \infty)$ в единственной точке $Y_* > Y_{\max}$. ■

Следствие 4. *Если уравнение* (13) *имеет по крайней мере два различных корня, то решение* Y_* *задачи* (Q) *– единственное.*

Действительно, в этом случае несложно показать, что в силу логистического характера функции $I(Y)$ выполняется неравенство $\hat{Y} \le Y_{\max}$.

4. Результаты численного моделирования

Как показано в предыдущем разделе (см. теорему 2), для любых значений параметров модели выполняются неравенства $Y_* > Y_{\max}$ и $u(Y_*) > 0$. Так как $\Phi(Y_*) = Y_*$ и $\Phi(Y_{\max}) = Y_{\max}$ (см. (12), (13)), оптимизация стационарного состояния системы всегда приводит к увеличению как величины национального дохода, взятого с учетом расходов на стимулирование спроса, так и величины потребления, по сравнению со стационарными состояниями неуправляемой системы.

Рассмотрим результаты численного моделирования в случае, когда исходная неуправляемая система (1) с функциями инвестиций и сбережений, определенных равенствами (2), демонстрирует циклическое движение.

Аналогично [5], в качестве функции $I:\ [0;\ \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$ выберем логистическую функцию вида

$$I(Y) = \frac{1}{a + e^{-b(Y-c)}} + d, \qquad Y \ge 0, \tag{15}$$

где a, b, c и d – положительные числа. При заданных положительных значениях β и γ соответствующие функции инвестиций $I(Y,\ K)$ и сбережений $S(Y)$ определяются условиями (2).

Следуя [5], выберем значения параметров $a=1,\ b=4.2,\ c=1,\ d=0.6,\ \alpha=2.2,$ $\delta=0.5,\ \beta=0.6$ и $\gamma=0.5.$ В этом случае система (1) имеет в области G единственное положение равновесия $(\tilde{Y},\ \tilde{K})=(1,\ 1)$, а соответствующая матрица Якоби $\mathrm{J}(\tilde{Y},\ \tilde{K})$ (см. (6)) имеет в этой точке два комплексно сопряженных собственных значения $\lambda_{1,2}=0.055\pm 0.2279802623i.$ Таким образом, положение равновесия $(\tilde{Y},\ \tilde{K})$ – неустойчивый фокус. В силу следствия 3 система (1) имеет в G периодическую траекторию $\left(Y_c(t),K_c(t)\right),\ t\geq 0.$ Найдем лежащую на этой траектории точку (Y_0,K_0) и вычислим ее период $T>0.$ Очевидно, при некотором $Y_0>0$ точка $(Y_0,1)$ лежит на периодической траектории $\left(Y_c(t),K_c(t)\right),\ t\geq 0.$ При помощи замены времени $t=\tau T$ перейдем к фазовым переменным $Y_1(\tau)=Y_c(T\tau),\ K_1(\tau)=K_c(T\tau),\ \tau\in[0,1],$ и рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} \dot{Y}_1(\tau)=\xi(\tau)\alpha\left(I\left(Y_1(\tau)\right)-\beta K_1(\tau)-\gamma Y_1(\tau)\right), \quad \tau\in[0,\ 1], \\ \dot{K}_1(\tau)=\xi(\tau)\left(I\left(Y_1(\tau)\right)-(\beta+\delta)K_1(\tau)\right), \\ \dot{\xi}(\tau)=0, \\ \dot{\eta}(\tau)=0, \\ Y_1(0)=\eta(0), \quad K_1(0)=1, \quad Y_1(1)=\eta(1), \quad K_1(1)=1. \end{cases}$$

Решая данную задачу методом продолжения по параметру [14, разд.7.26], находим период $T=\xi(0)=19.3477$ траектории $\left(Y_c(t),\ K_c(t)\right)$: $Y_c(t)=Y_1(t/T),\ K_c(t)=K_1(t/T),\ t\in[0,\ T],$ и величину $Y_0=\eta(0)=1.0568$, для которой точка $(Y_0,1)$ лежит на этой периодической траектории. В силу вида векторного поля системы (1) данная траектория является предельным циклом (см. рис.2).

Перейдем к случаю управляемой системы (9). Положим $\omega=1.8.$ Поскольку $\hat{Y}=Y_{\max}=\tilde{Y}$, то множество состояний равновесия системы (9) состоит из точек $\left\{\left(Y,\ K(Y)\right):\ Y\in[\tilde{Y},\ \infty)\right\}$ (см. (10)). В силу теоремы 2 оптимальное значение Y_* – единственный корень уравнения

$$\Phi'(Y)=1-\omega\gamma^2\left(Y-\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}I(Y)\right)\left(1-\frac{\delta}{(\beta+\delta)\gamma}I'(Y)\right)=0$$

на интервале $[\tilde{Y},\ \infty)$ (см. (12)).

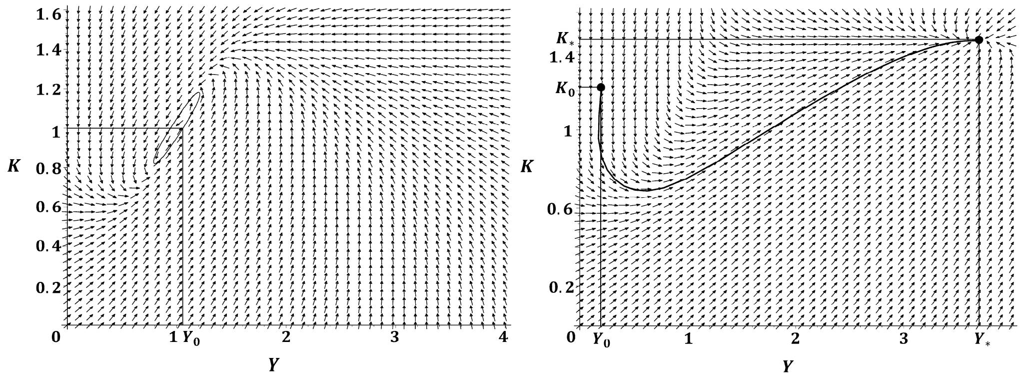

Рис.2. а) Предельный цикл и векторное поле системы (9) до оптимизации; б) Векторное поле системы (9) и ее типичная траектория после оптимизации положения равновесия при $\omega = 1.8$.

Решая данное уравнение, численно находим Y_*=3.6768669, $K_*=K(Y_*)$= =1.454533 (см. (10)) и $u(Y_*)$=0.60440952 (см. (14)). Поскольку при $u(t)\equiv$ $\equiv u(Y_*)$, $t \ge 0$, матрица Якоби $\mathrm{J}(\tilde{Y},\tilde{K})$ системы (9) (см. (6)) имеет собственные значения $\lambda_1 = -0.4351377161$ и $\lambda_2 = -1.099890762$, то найденное оптимально состояние равновесия $(Y_*,\ K_*)$ – устойчивый узел системы (9), взятой с $u_*(t) \equiv u(Y_*)$, $t \ge 0$. При этом траектории этой системы асимптотически стремятся к данному состоянию равновесия.

Сравнивая величину $\Phi(Y_*)$ (см. (12)) с величиной национального дохода $Y_c(t)$, $t \in [0, T]$, при движении системы по предельному циклу $\big(Y_c(t), K_c(t)\big)$ получаем

$$\Phi(Y_*) = 2.565644654 > \max_{t\in[0,\ T]} Y_c(t) = 1.21064456291009.$$

Приведенные результаты численного моделирования показывают, что при выбранных значениях параметров неуправляемая система (1) имеет единственное неустойчивое стационарное состояние $(\tilde{Y},\tilde{K})$, а ее предельное множество – устойчивый предельный цикл. При этом соответствующее оптимальное стационарное состояние (Y_*, K_*) – устойчивое предельное множество управляемой системы (9), взятой с $u_*(t) \equiv u(Y_*)$, $t \ge 0$, и ему соответствуют как большее значение величины $\Phi(Y_*)$ национального дохода, взятого с учетом расходов на стимулирование спроса, так и большее значение величины потребления, чем при движении по периодическому решению $\big(Y_c(t), K_c(t)\big)$, $t \ge 0$. Таким образом, в рассмотренном случае, независимо от начального состояния, оптимизация стационарного состояния системы (9) приводит к улучшению ее долговременных экономических показателей по сравнению с движениями по неуправляемым ("рыночным") траекториям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *D. Acemoglu*. Introduction to modern economic growth // Princeton Univ. Press: Princeton N.J., 2008.
2. *H.-W. Lorenz*. Nonlinear dynamical economics and chaotic motion // Springer-Verlag, – Berlin, Heidelberg, 1993.
3. *Л.С. Тарасевич, В.М. Гальперин, П.И. Гребников, А.И. Леусский*. Макроэкономика, Спб.: Изд. СПбГУЭФ, 1992; *L.S. Tarasevich, V.M. Galperin, P.I. Grebnikov, A.I. Leusskii*. Makroekonomika, Spb.: Izd. SPbGUEF, 1992.
4. *N. Kaldor*. A model of trade cycle, The Economic Journal, 1940, v.50, № 197, p.78–92.
5. *Т.В. Рязанова*. Стохастические аттракторы и индуцированные шумом явления в моделях экономической динамики / Отчет о научно-исследовательской работе. – Екатеринбург: УрФУ, 2013;
   T.V. Riazanova. Stokhasticheskie attraktory i indutsirovannye shumom yavleniia v modeliakh ekonomicheskoi dinamiki / Otchet o nauchno-issledovatelskoi rabote. – Ekaterinburg: UrFU, 2013.
6. *W.W. Chang, D.J. Smyth*. The existence and persistence of cycles in a nonlinear model: Kaldor's 1940 model re-examined // Review of Economic Studies, 1971, v.38, issue 1, p.37–44;
7. *A. Krawiec*, *M. Szydalowski*. On nonlinear mechanics of business cycle model, Regular and Chaotic Dynamics, 2001, v.6, №1, p.101–118.
8. *V. Balan, C.S. Stamin*. Stabilization with feedback control in the Kaldor economic model / Proceeding of the 4-th International Colloquium "Mathematics in Engineering and Numerical Physics", October 6–8, 2006, Bucharest, Romania, Geometry Balkan Press: 2007, p.19–24.
9. *G. Gabisch, H.W. Lorenz*. Business cycle theory. A survey of methods and concepts // Springer-Verlag, 1987.
10. *J.C.J.M. Van Den Bergh, M.W. Hofkes*. Theory and implementation of economic models for sustainable development // Economy & Environment, Springer Netherlands, 1998, v.15.
11. *R.J. Barro, X. Sala-i-Martin*. Economic growth // The MIT Press: 2nd edition, 2003.
12. *Ф. Хартман*. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970;
    Ph. Hartman. Ordinary differential equations // John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1964.
13. *M.J. Weitzman*. Income, wealth, and the maximum principle, Harvard University Press: Cambridge MA, 2003.
14. *Ю.Н. Киселев, С.Н. Аввакумов, М.В. Орлов*. Оптимальное управление. Линейная теория и приложения. – М.: МАКС Пресс, 2007;
    Iu.N. Kiselev, S.N. Avvakumov, M.V. Orlov. Optimalnoe upravlenie. Lineinaia teoriia i prilozheniia. – M.: MAKS Press, 2007.

Поступила в редакцию 13.11.2017
После доработки 11.04.2018
Принята к публикации 14.05.2018