

РАЗРЫВНЫЙ МЕТОД ЧАСТИЦ НА ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРИМЕРАХ

© 2019 г. *С.В. Богомолов, А.Е. Кувшинников*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
bogomo@cs.msu.su, kuvsh90@yandex.ru

DOI: 10.1134/S0234087919020059

Работа посвящена исследованию особенностей разрывного метода частиц. Подробно описаны алгоритмические основы метода частиц. Исследована возможность применения лимитеров. Приведены результаты расчётов для уравнений Хопфа, Бюргерса, мелкой воды и газовой динамики, включая нелинейную акустику. Произведено сравнение численных решений с некоторыми точными. Тесты показывают, что метод хорошо подходит для задач с разрывами. Показано, что для получения более точного численного решения необходимо уточнять исходные математические модели. А именно, если для задачи о структуре фронта ударной волны вместо уравнений Навье–Стокса брать уравнения стохастической газовой динамики, то необходимость в лимитерах отпадает.

Ключевые слова: метод частиц, бессеточный метод, уравнения стохастической газовой динамики, уравнения Навье – Стокса, уравнение Хопфа, уравнение Бюргерса, уравнения мелкой воды.

DISCONTINUOUS PARTICLES METHOD ON GAS DYNAMIC EXAMPLES

S.V. Bogomolov, A.E. Kuvshinnikov

Lomonosov Moscow State University

The paper is devoted to the study of the features of the discontinuous particle method. The algorithmic fundamentals of the particle method are described in detail. The possibility of using limiters was investigated. The results of calculations for the Hopf, Burgers, shallow water and gas dynamics equations, including nonlinear acoustics, are presented. Numerical solutions are compared with some exact ones. Tests show that the method is well suited for problems with discontinuities. It is shown that in order to obtain a more accurate numerical solution, it is necessary to refine the initial mathematical models. Namely, if for the problem of the structure of the front of the shock wave instead of the Navier-Stokes equations to take the equations of stochastic gas dynamics, then the need for limiters disappears.

Key words: particle method, meshless method, equations of stochastic gas dynamics, Navier–Stokes equations, Hopf equation, Burgers equation, shallow water equations.

1. Введение

Разработка различных вариантов методов частиц имеет большую историю. Изначально метод применялся для решения задач газодинамики [1], но позже стал ведущим методом для решения задач физики плазмы [2–4]. В [5] впервые была предложена идея несглаживающего разрывного энтропийно-согласованного метода частиц. Он характеризуется тем, что не требует гладкости решения и экономичен для многомерных задач. В разное время были разработаны варианты методы частиц с расщеплением, с выбором шага по времени, для двумерных задач несжимаемой жидкости, для уравнений мелкой воды [6–9].

В данной статье предлагается несколько других модификаций метода частиц и применение их к сложным одномерным задачам, таким как распад произвольного разрыва и нелинейная акустика.

Основой всех методов частиц является микро-макро переход. Можно также, отдав должное исторической традиции, использовать представление искомой функции как набора δ -функций. Далее следует аппроксимация δ -функций классическими функциями, с которыми производятся вычисления на каждом шаге по времени. Методы частиц можно разделить на два класса: частица-сетка и частица-частица. В методах типа частица-сетка силы, стоящие в правых частях исходных уравнений, вычисляются только в узлах сетки. В методах частица-частица силы вычисляются для всех частиц, что является более затратным с точки зрения производительности, но существенно повышается точность.

К методам типа частица-сетка можно отнести метод афинных частиц-в-ячейках (APIC) [10,11]. Его идея состоит в том, чтобы сохранить свойство фильтрации, но предотвратить диссипацию путем интерполирования большей информации из сетки на частицы. Частицы сохраняют не только значение скорости, но и угловой момент. Метод полиномиальных частиц-в-ячейках (PolyPIC) [12] является усовершенствованием предыдущего метода. Обобщение улучшает сохранение кинетической энергии во время переноса, что приводит к лучшему разрешению вихря в жидкостных симуляциях и более слабому численному затуханию при моделировании упругопластичности.

Среди бессеточных методов, которые используются для решения подобных задач, стоит отметить гидродинамику сглаженных частиц (SPH), метод конечных элементов с частицами (PFEM), метод частиц конечного объема (FVPM) и разрывный метод частиц [8].

Гидродинамика сглаженных частиц (SPH) была изначально создана для решений задач астрофизики [13, 14], то есть для взаимодействующих потенциалов. Позже метод был модифицирован для решений задач гидродинами-

ки [15]. Кроме того существует множество программных пакетов, использующих вычисления по методу SPH: SPHysics [16] и PySPH [17] используют стандартные процессоры, GPUSPH [18] – графические ускорители. Для вычисления производных по пространству SPH использует ядра – набор гладких функций. Благодаря этому, можно явным образом вычислять производные, но для разрывных решений это приводит к сглаживанию суммарного решения. В разрывном методе частиц используются аппроксимация δ -функции последовательностью прямоугольных фигур, то есть аналог ядра в этом методе является разрывной функцией. Это позволяет ему более точно вычислять разрывы, что является крайне важным для нелинейных уравнений в частных производных гиперболического типа, который допускает разрывные решения. В SPH для моделирования членов переноса используется метод первого порядка.

Главное – правильное вычисление скорости. В разрывном методе частиц используется схема типа предиктор-корректор. Корректор представляет собой восстановление плотности по распределению. Ключевым моментом метода является именно этот шаг, основанный на анализе «взаимодействия» частиц. Эта процедура позволяет повысить точность вычислений.

В методе конечных элементов с частицами (PFEM) [19] лагранжевы частицы проецируются на конечноэлементную сетку, которая на каждом шаге по времени генерируется заново. Позже была создана модификация, позволяющая получать решение с большими шагами по времени. Она была названа PFEM-2 [20, 21]. PFEM для создания сетки на каждом шаге по времени использует триангуляцию Делоне, что является затратным по вычислениям [22] и ухудшает разрешение разрывов.

Метод частиц конечного объема (FVPM) был впервые представлен в [23] и позже развит в [24, 25], также представлен в [26]. Этот метод объединяет идеи методов типа SPH и методов конечного объема, которые обычно формулируются для неподвижной сетки. Благодаря использованию аппроксимации потоков, метод частиц конечного объема не нуждается в искусственной вязкости для задач газовой динамики, что ставит его перед SPH.

2. Метод частиц

Покажем связь между микро- (системой ОДУ) и макро- (уравнением в частных производных) представлениями. Пусть существует N частиц, движущихся с заданной скоростью v_i (рис.1).

Эволюция системы (без ограничения общности, в одномерном случае) однозначно определяется уравнениями движения и начальными условиями.

$$\begin{cases} dx_i(t)/dt = v_i, \\ x_i(0) = x_i^0, \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (1)$$

Переходим от «микро» (моделирование поведения системы отдельных частиц) (1) к «макро», вводя массовую плотность (концентрацию) (рис.2) $\rho(x, t)$, определив её следующим образом:

$$\forall \phi(x) \in C_0^2 : \int \phi(x) \rho(x, t) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(x_i(t)). \quad (2)$$

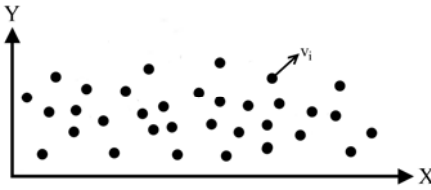


Рис.1. Множество частиц.

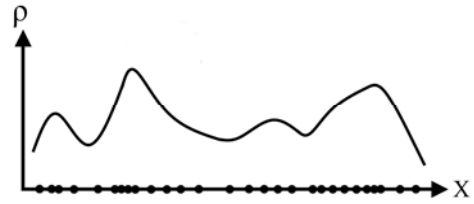


Рис.2. Распределение частиц и его предельная плотность.

Дифференцируя обе части (2) по времени и используя в правой части правило дифференцирования сложной функции, получим

$$\int \phi(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi(x_i(t))}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \stackrel{(1)}{=} \int \frac{\partial \phi(x)}{\partial x} v \rho(x, t) dx = - \int \phi(x) \frac{\partial (v\rho)}{\partial x} dx,$$

$$\int \phi(x) (\partial \rho / \partial t + \partial (v\rho) / \partial x) dx = 0,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial \rho / \partial t + \partial (v\rho) / \partial x = 0, \\ \rho(x, 0) = \rho^0(x). \end{array} \right.$$

В реальных задачах нельзя решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений из-за большого числа частиц N (порядка 10^{23}). Решение уравнения переноса обладает целым рядом хорошо известных вычислительных трудностей. Идея микро – макро перехода наводит на мысль о рассмотрении системы с уменьшенным числом частиц

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_i(t)}{dt} = v_i, \\ \tilde{x}_i(0) = \tilde{x}_i^0, \quad i = 1, \dots, \tilde{N}, \quad \tilde{N} \ll N. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) является основой метода частиц [9].

3. Алгоритм применения метода частиц

Как показано в [5], мы можем представить задачу в виде нескольких дифференциальных операторов, последовательно примененных к консервативным переменным, тогда перенос, градиент давления и вязкость описываются независимо.

Можно считать, что на границе между двух частиц находится разрыв. Таким образом, в каждый момент времени мы представляем задачу в виде набора разрывов. Это идея С.К. Годунова [27]. Мы же рассматриваем нашу систему как набор частиц. Во всех уравнениях проводим нелинейный перенос и одновременно (явный метод) моделируем правые части (градиент давления и диффузию импульса и энергии, если речь идет о системе уравнений газовой динамики).

Покажем это на примере уравнения Хопфа, которое в микро постановке записывается как:

$$\begin{cases} dx_i(t) / dt = u(x_i(t)) / 2, & t \in [0, T], \quad i = 1, \dots, N, \\ x_i(0) = x_i^0. \end{cases}$$

Реализация разрывного метода частиц осуществляется в три этапа: инициализация, сдвиг частицы, перестройка частицы [9]. Первый этап выполняется только один раз, остальные – каждый шаг по времени. Для описания частиц введем обозначения: h_i – полуширина частицы, y_i – высота частицы, x_i – координата центра частицы, $S_i = 2h_i y_i$ – площадь частицы.

На первом этапе получаем начальные значения ширины, высоты и центра всех частиц. Это можно сделать разбиением расчетной области на конечное число отрезков, служащих основаниями прямоугольных частиц. Высоты частиц y_i принимаются равными значениям заданных на начальный момент времени функции $u(x, 0)$ в точках $x_i(0)$ – центрах оснований прямоугольников.

Далее явным методом Эйлера решается система уравнений движения частиц:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + \tau y_i / 2, \quad i = 1, \dots, N.$$

Применение более точного метода не имеет смысла, так как ключевым элементом в подобных задачах является восстановление плотности распределения, или высоты частицы на каждом шаге.

После того как частицы сдвинулись, между ними могут возникнуть пересечения и зазоры. Они представляют собой ошибку аппроксимации плот-

ности. Необходимо минимизировать ошибку, для чего будем изменять ширину частицы. С учётом сохранения площади, высота частицы также изменится. Рассмотрим случаи возможного «взаимодействия» частиц.

Возникает пересечение частиц, т.е. частица с большей скоростью «налетает» на частицу с меньшей скоростью (рис.3). Получившееся пересечение можно убрать путем сужения одной из частиц. Высота частицы увеличится. С физической точки зрения, очевидно, что в результате столкновения двух масс газа с различной плотностью увеличиться может только та из них, которая обладает меньшей плотностью, поэтому критерием отбора перестраиваемой частицы в этом случае служит ее меньшая по сравнению с налетевшей на нее частицей плотность. Этот случай соответствует движению в газе волн сжатия либо ударной волны.



Рис.3. Пересечение частиц.

Возникает зазор между частицами, т.е. частица с большей скоростью «отлетает» от частицы с меньшей скоростью (рис.4). Зазор между частицами убирается расширением одной из частиц, что приводит к уменьшению ее высоты. Из двух частиц, взаимодействующих таким образом, уменьшиться должна та, чья высота больше.



Рис.4. Зазор между частицами.

Таким образом, на рис.3 и рис.4 изменится частица с символом (*). Площадь заштрихованной области равна площади закрашенной области.

Отметим, что при использовании указанных правил перестройки частиц и критериев отбора в результате взаимодействия частицы с одним из соседей может возникнуть зазор либо пересечение с другим соседом, что говорит о приближённости этапа коррекции, тем не менее, в итоге значительно улучшающего точность моделирования нелинейного переноса.

Хотя в начальный момент критерий определяется однозначно, в дальнейшем может возникнуть смешанный случай: как вариант со сжатием, так и вариант с расширением. В случае сжатия (I) это означает, что на следующем шаге по времени нам придется рассматривать 2 взаимодействия для

выделенной (*) частицы – сжатие слева и разрежение справа. В случае разрежения (II) также возможны два взаимодействия – разрежение слева и сжатие справа. Вычислительная практика привела к следующему алгоритму: использовать тот вариант, который был использован на предыдущем шаге по времени. Т.е в первом случае предпочтительнее сжатие, во втором – расширение.



Рис.5. Смешанные случаи взаимодействия частиц.

4. Алгоритм вычисления сил давления

Рассмотрим учёт градиента давления. Сначала напомним вид уравнений Эйлера идеальной газовой динамики:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(v \rho v)}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(v \rho E)}{\partial x} = -\frac{\partial(pv)}{\partial x}, \\ p = \rho RT, \quad E = \varepsilon + v^2/2, \quad \varepsilon = RT/(\gamma - 1). \end{array} \right.$$

Разница давлений слева и справа от частицы приводит к изменению импульса и энергии частицы. Согласно законам сохранения это изменение можно записать как:

$$S_{\rho v_i}(t_{j+1}) - S_{\rho v_i}(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (p(a_i(t)) - p(b_i(t))) dt,$$

$$S_{\rho E_i}(t_{j+1}) - S_{\rho E_i}(t_j) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} (pv(a_i(t)) - pv(b_i(t))) dt.$$

Простейшим способом аппроксимации интегралов в правой части является их представление в виде произведения подынтегральной функции на шаг по времени, что приводит к расчётным формулам:

$$S_{\rho v_i}(t_{j+1}) = S_{\rho v_i}(t_j) + \tau(p_i^-(t_j) - p_i^+(t_j)),$$

$$S_{\rho E_i}(t_{j+1}) = S_{\rho E_i}(t_j) + \tau(p_i^-(t_j)v_i^-(t_j) - p_i^+(t_j)v_i^+(t_j)).$$

Вычисленные на предыдущем шаге значения плотности, импульса, и энергии позволяют определить давление в центре частицы. Для этого необходимо воспользоваться уравнением состояния, в нашем случае уравнением состояния идеального газа $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$ и определением плотности полной энергии $\rho E = \rho (\varepsilon + v^2 / 2)$. Получим

$$p_i^j = (\gamma - 1) \left(\rho E_i^j - (\rho v_i^j)^2 / (2\rho_i^j) \right).$$

Для определения значений давления и скорости на границе частицы воспользуемся схемой, основанной на «взаимодействии» частиц. Дальнейшее описание взято из [8]. Если на шаге по времени на одной из границ частицы происходило взаимодействие (см. рис.3 и рис.4), приведшее к перестройке частицы (в соответствии с описанными выше критериями), то значение давления и скорости на этой границе полагались равными давлению и скорости той частицы, которая явилась причиной перестройки. Если же перестройки в результате взаимодействия не произошло, то давление на границе полагалось равным давлению в центре частицы. Оговоримся, что в случае, когда между рассматриваемой частицей и соседней образуется зазор, но расширения рассматриваемой частицы не происходит из-за того, что имеет место взаимодействие типа сжатия на другой границе, давление всё равно полагается равным давлению соседней частицы. Если обозначить dx^- и dx^+ величину пересечения между рассматриваемой частицей и левым и правым соседом соответственно (отрицательные значения соответствуют зазору), то указанное правило выбора давления на границе можно сформулировать следующим образом:

$$p_i^-(t_j) = p_{i-1}^j \quad \text{при} \quad dx_i^- > 0, \quad \rho_i^j \leq \rho_{i-1}^j \quad \text{или} \quad dx_i^- < 0, \quad \rho_i^j \geq \rho_{i-1}^j;$$

$$p_i^+(t_j) = p_{i+1}^j \quad \text{при} \quad dx_i^+ > 0, \quad \rho_i^j \leq \rho_{i+1}^j \quad \text{или} \quad dx_i^+ < 0, \quad \rho_i^j \geq \rho_{i+1}^j.$$

5. Применение лимитеров

В результате сжатия частицы новая высота частицы может оказаться выше, чем высота частицы, взаимодействие с которой привело к перестройке. Результатом такого всплеска становится появление в решении осцилляций, приводящих к неустойчивости. Аналогично в случае разрежения полученные значения функций могут оказаться меньше, чем соответствующие значения для частицы, с которой произошло взаимодействие. Подобные всплески приходится устранять, требуя, чтобы значения плотности, импульса и энергии частицы, получившиеся после её перестройки, не превы-

шали соответствующих значений для частицы, приведшей к перестройке. Это приводит к перемещению центра частицы, поскольку необходимо сохранить объем частицы и ее соприкосновение с соседом

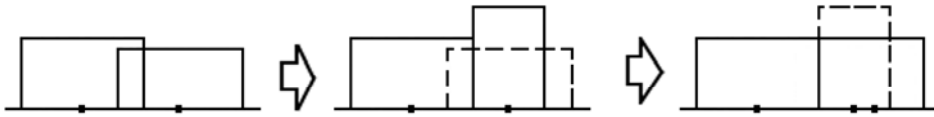


Рис.6. Применение лимитера.

Эксперименты показали, что подобный механизм корректировки частиц является необходимым условием получения правильных результатов при расчете распространения ударной волны и вреден для задачи об акустических волнах.

6. Вычисление второй производной

В уравнениях Бюргерса и Навье-Стокса возникают диффузионные и вязкостные члены. Их аппроксимация на неравномерной сетке стандартными разностными методами приведет к потере точности. Новый способ основан на использовании идеи методов частиц. Если в уравнении присутствует вторая производная, то там существует диффузия массы или импульса. Таким образом, в терминах методов частиц, мы должны вычислить массу (импульс), перетекающую в соседние частицы.

Пусть h_i , y_i , x_i , S_i – ранее введенные обозначения. Сначала, как обычно, сдвигаем и перестраиваем частицы. На этом шаге площадь частиц не изменяется, но изменяются высота и ширина частицы. То есть нам известна новая ширина частиц \hat{h}_i . За шаг времени τ за счет диффузии в частицу «вливается» (прибавка к площади):

$$\tau((y_{i+1} - y_i) / (h_{i+1} + h_i) - (y_i - y_{i-1}) / (h_i + h_{i-1})).$$

Тогда вычисляем новую площадь:

$$\hat{S}_i = S_i + \tau((y_{i+1} - y_i) / (h_{i+1} + h_i) - (y_i - y_{i-1}) / (h_i + h_{i-1})),$$

далее находим высоту частицы \hat{y}_i :

$$\hat{y}_i = \hat{S}_i / (2\hat{h}_i).$$

7. Тесты

7.1. Уравнение Бюргерса. Уравнение Бюргерса записывается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial((u/2)u)}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Среди его решений есть сглаженная «ударная» волна:

$$u(x,t) = \frac{a + b \exp\left(\frac{a-b}{2\mu}(x - x_0 - Dt)\right)}{1 + \exp\left(\frac{a-b}{2\mu}(x - x_0 - Dt)\right)}, \quad D = \frac{a+b}{2}.$$

В качестве начального условия возьмем точное решение $u(x,t)$ при $t = 0.0$, $a = 1.0$, $b = 0.2$, $x_0 = 3.0$. Время счета $T = 6.0$. Сравнение численного решения с точным приведено на рис.7.

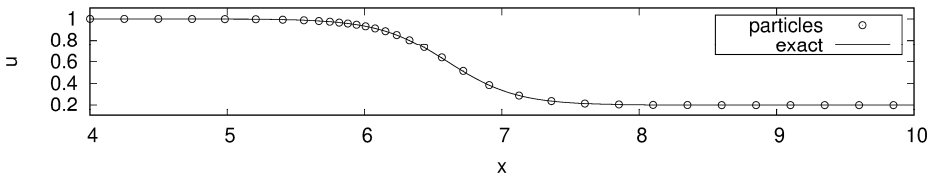


Рис.7. Задача о движении сглаженного разрыва для уравнения Бюргерса.

7.2. Уравнения мелкой воды. Уравнения мелкой воды записываются в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(uhu)}{\partial x} = -\frac{1}{2}gh^2,$$

где h – высота свободной поверхности, u – скорость течения.

Решается задача о волне разрежения, начальные условия:

$$h_l = 4.0, \quad h_r = 1.0, \quad v_l = 0.0, \quad v_r = 2\sqrt{g}.$$

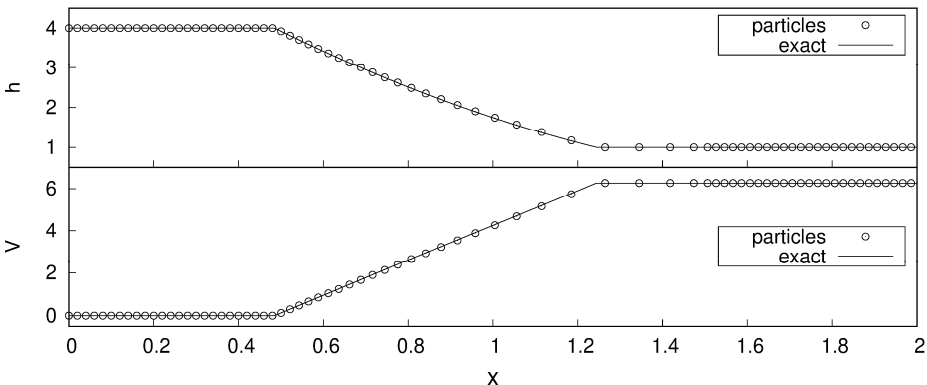


Рис.8. Решение системы уравнений мелкой воды для задачи о волне разрежения.

Время счета $T=2.0$. Особенностью данных начальных условий является возникновение звуковой точки, т.е. точки, в которой скорость равна местной

скорости звука. Некоторые разностные схемы не могут правильно их об- считывать. Метод частиц корректно решает эту задачу (рис.8).

7.3. Уравнения газовой динамики. 7.3.1. Задача о распространении ударной волны. Начальные условия взяты из [28].

$$\rho_l = 1.0, \quad \rho_r = 2/3, \quad p_l = 4.0, \quad p_r = 2.0, \quad v_l = 2.0, \quad v_r = 1.0, \quad D = 4.0.$$

Исследовалась устойчивость решения на больших отрезках времени. Даже после 3000 шагов по времени решение продолжало размазываться на 1 частицу (рис.9).

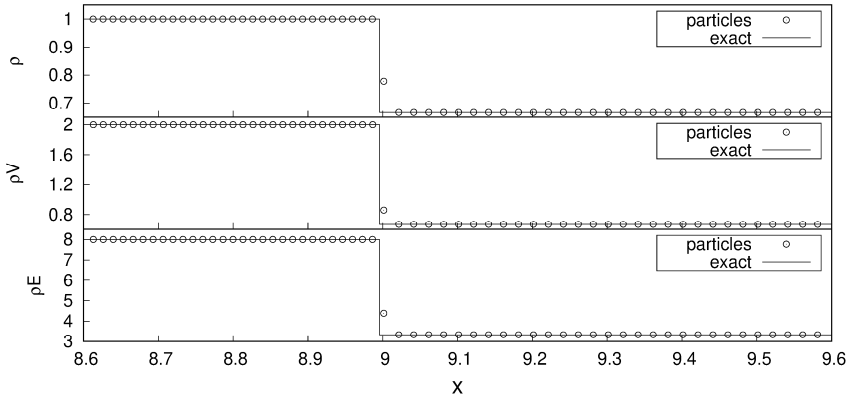


Рис.9. Решение системы уравнений газовой динамики для задачи о распространении ударной волны.

7.3.2. Задача о распаде произвольного разрыва. Решение состоит из ударной волны и контактного разрыва,двигающихся направо, и волны разрежения,двигающейся налево. Начальные условия взяты из [29]

$$\rho_l = 1.0, \quad \rho_r = 0.125, \quad p_l = 1.0, \quad p_r = 0.1, \quad v_l = 0.75, \quad v_r = 0.0.$$

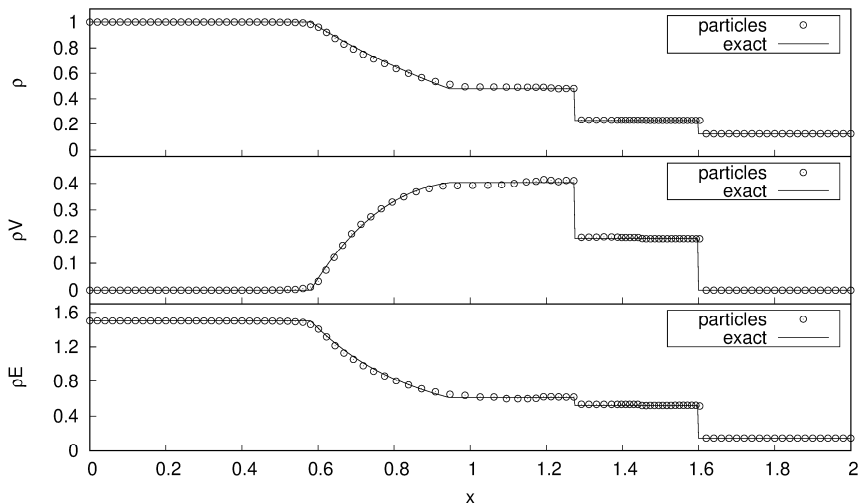


Рис.10. Решение системы уравнений газовой динамики для задачи распада произвольного разрыва.

На рис.10 видно, что метод частиц правильно показывает все составляющие решения.

7.3.3. Распространение акустического импульса. Методом частиц будем решать систему уравнений газовой динамики, без упрощения линейной акустики. Следует отметить, что для случая слабых ударных волн, к которым можно отнести уравнения акустики, применение лимитеров мешает возникновению правильного решения.

Начальные условия:

$$\bar{\rho} = 1000,$$

$$\tilde{\rho} = \begin{cases} \frac{2(x-l_1)}{l_2-l_1}, & x \in [l_1, 0.5(l_1+l_2)]; \\ \frac{2(l_2-x)}{l_2-l_1}, & x \in [0.5(l_1+l_2), l_2]; \\ 0, & x \notin [l_1, l_2]. \end{cases}$$

$$\rho = \bar{\rho} + \tilde{\rho}, \quad v = 0.0.$$

Было произведено сравнение точного решения распространения акустического импульса в линейной постановке и численного решения для нелинейной постановки (уравнения Эйлера). Решения качественно схожи, однако в численном решении присутствуют мелкие осцилляции, которые затухают, что видно на рис.11.

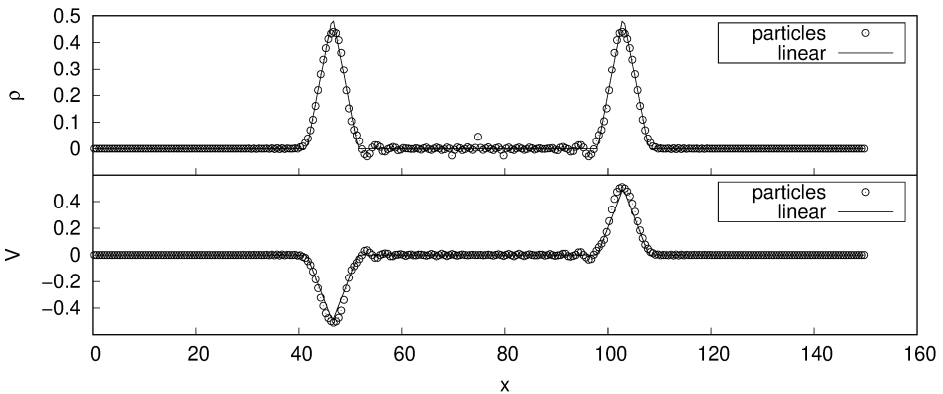


Рис.11. Решение задачи о распространении акустического импульса.

7.4. Система уравнений стохастической газодинамики. Используется система, полученная в [30]. На наш взгляд, она описывает неравновесные течения точнее, чем система Навье-Стокса. Для её численного решения не требуется использования лимитеров в отличие от навье-стоксовского:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho V_j) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\text{Kn}A\rho), \\ \frac{\partial(\rho V)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V(\rho V)) = -\frac{\partial}{\partial x}(B\rho) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\text{Kn}A(\rho V)), \\ \frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(V(\rho E)) = -\frac{\partial}{\partial x}(B(\rho V)) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\text{Kn}A(\rho E)), \end{cases}$$

где $\text{Kn}=0.1$ – число Кнудсена, $A=0.085T^{1/2}$, $B=0.5T$, $p=B\rho$ называем давлением, $\nu = \text{Kn}A$ – коэффициентом кинематической вязкости.

В качестве теста взята задача о структуре фронта ударной волны. Рассматривался одноатомный газ ($\gamma = 5/3$, $\text{Pr} = 2/3$) с числом Маха входящего потока $M = 1.55$. На рис.12 приведены профили нормированной плотности для системы уравнений стохастической газовой динамики и уравнений Навье-Стокса

$$\rho' = (\rho - \rho_1) / (\rho_2 - \rho_1),$$

где ρ_1, ρ_2 – значения на границах, EXP – экспериментальные значения из [31], SGD – численное решение методом частиц системы стохастических уравнений газовой динамики, NS – численное решение методом частиц системы уравнений Навье-Стокса.

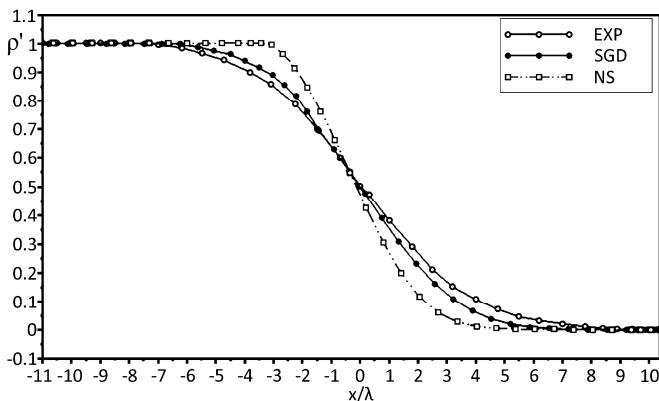


Рис.12. Сравнение системы уравнений стохастической газодинамики и системы Навье-Стокса.

8. Выводы

Как видно из приведенных графиков, метод частиц хорошо подходит для уравнений гиперболического типа, где возможны разрывные решения. Однако и в случае уравнения с диффузией метод частиц показывает адекватные результаты и достаточно точно находит сглаженное решение. Отдельно хочется отметить, что использование лимитеров необходимо только

для разрывных решений. Энтропийное согласование (лимитеры) мешает возникновению акустического импульса и ухудшает погрешность. Если в задачах с разрывами с лимитерами приходится мириться, в задачах с диффузией это только добавляет ошибок. Более точные исходные математические модели позволяют использовать более качественные численные методы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ф.Х. Харлоу*. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике / Под ред. Б. Олдера, С. Фернбаха, М. Ротенберга. – М.: Мир, 1967, с.316–342;
F.H. Harlow. The Particle-in-Cell Computing Method for Fluid Dynamics // Methods in Computational Physics, vol.3 / B. Alder, S. Fernbach, and M. Rotenberg (Eds.). – New York: Academic Press, 1964.
2. *R.W. Hockney, J.W. Eastwood*. Computer simulation using particles / McGraw-Hill, 1981.
3. *Ю.С. Сигов*. Вычислительный эксперимент: мост между прошлым и будущим физики плазмы. – М.: Физматлит, 2001;
Yu.S. Sigov. Computing Experiment: The Bridge between the Past and Future of Plasma Physics. – М.: Fizmatlit, 2001.
4. *М.Ф. Иванов, В.А. Гальбурт*. Численное моделирование динамики газов и плазмы методом частиц. – М.: МФТИ, 2000;
M.F. Ivanov, V.A. Gal'burt. Chislennoe modelirovanie dinamiki gazov i plazmy metodom chastits. – М.: MFTI, 2000.
5. *С.В. Богомолов, К.В. Кузнецов*. Метод частиц для системы уравнений газовой динамики // Математическое моделирование, 1998, т.10, №7, с.93–100;
S.V. Bogomolov, K.V. Kuznetsov. Particle method for system of gas dynamics equations // Matematicheskoe modelirovanie, 1998, t.10, №7, s.93–100.
6. *С.В. Богомолов, Е.В. Захаров, С.В. Зеркаль*. Моделирование волн на мелкой воде методом частиц // Математическое моделирование, 2002, т.14, №3, с.103–116;
S.V. Bogomolov, E.V. Zakharov, S.V. Zerkal. The shallow water wave simulating by particle method // Matematicheskoe modelirovanie, 2002, t.14, №3, s.103–116.
7. *С.В. Богомолов*. Метод частиц. Несжимаемая жидкость // Математическое моделирование, 2003, т.15, №1, с.46–58;
S.V. Bogomolov. Particle method. Incompressible fluid // Matematicheskoe modelirovanie, 2003, t.15, No. 1, s.46–58.
8. *С.В. Богомолов, Д.С. Звенков*. Явный метод частиц, несглаживающий газодинамические разрывы // Математическое моделирование, 2007, т.19, №3, с.74–86;
S.V. Bogomolov, D.S. Zvenkov. Explicit particle method, non-smoothing gas-dynamic discontinuities // Matematicheskoe modelirovanie, 2007, t.19, №3, s.74–86.
9. *А.Ж. Баев, С.В. Богомолов*. Об устойчивости разрывного метода частиц для уравнения переноса. // Математическое моделирование, 2017, т.29, №9, с.3–18;
A.Zh. Bayev, S.V. Bogomolov. On the stability of the discontinuous particle method for the transfer equation // Math. Models and Computer Simulations, 2018, v.10, №2, p.186–197.
10. The affine particle-in-cell method / C. Jiang, C. Schroeder, A. Selle et al. // ACM Trans. Graph, 2015, v.34, №4, p.51:1–51:10.
11. C. Jiang, C. Schroeder, J. Teran. An angular momentum conserving affine-particle-in-cell method // Journal of Computational Physics, 2017, v.338, p.137–164.
12. A polynomial particle-in-cell method / C. Fu, Q. Guo, T. Gast et al. // ACM Trans. Graph, 2017, v.36, №6, p.222:1–222:12.

13. *L.B. Lucy*. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis // *Astronomical Journal*, 1977, v.82, p.1013–1024.
14. *R.A. Gingold, J.J. Monaghan*. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 1977, v.181, №3, p.375–389.
15. *G.R. Liu, M.B. Liu*. Smoothed Particle Hydrodynamics: A Meshfree Particle Method. – World Scientific, 2003.
16. SPHysics. – URL: https://wiki.manchester.ac.uk/sphysics/index.php/SPHYSICS_Home_Page.
17. PySPH. – URL: <https://github.com/pypr/pysph>.
18. GPUSPH. – URL: <http://www.gpusph.org/>.
19. *S.R. Idelsohn, E. Oñate, F. Del Pin*. The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves // *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2004, v.61, №7, p.964–989.
20. Large time-step explicit integration method for solving problems with dominant convection / *S. R. Idelsohn, N. Nigro, A. Limache, E. Oñate* // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2012, v.217–220, p.168–185.
21. Lagrangian versus Eulerian integration errors / *S. R. Idelsohn, E. Oñate, N. Nigro et al.* // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, v.293, p.191–206.
22. The particle finite element method – an overview / *E. Oñate, S.R. Idelsohn, F. Del Pin, R. Aubry* // *International Journal of Computational Methods*, 2004, v.01, №02, p.267–307.
23. *D. Hietel, K. Steiner, J. Struckmeier*. A finite volume particle method for compressible flows // *Math. Models and Methods in Applied Sciences*, 2000, v.10, №9, p.1363–1382.
24. Meshless Methods for Conservation Laws / *D. Hietel, M. Junk, J. Kuhnert, S. Tiwari* // *Analysis and Numerics for Conservation Laws*. – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2005, p.339–362.
25. *D. Teleaga, J. Struckmeier*. A finite-volume particle method for conservation laws on moving domains // *International J. for Numerical Methods in Fluids*, 2008, v.58, №9, p.945–967.
26. *N.V. Ardelyan, G.S. Bisnovatyi-Kogan, S.G. Moiseenko*. Simulation of magnetorotational astrophysical processes by implicit operator-difference scheme // *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2017, v.38, № 5, p.874–879.
27. *С.К. Годунов*. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*, 1959, т. 47(89), №3, с.271–306; англ. пер.: *S.K. Godunov*. A Difference Scheme for Numerical Solution of Discontinuous Solution of Hydrodynamic Equations / *US Joint Publ. Res. Service, JPRS 7225 Nov. 29, 1960*.
28. *А.А. Самарский*. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977, 656 с.; англ. пер.: *A.A. Samarskii*. The theory of difference schemes. – New York – Basel. Marcel Dekker, Inc, 2001, 761 p.
29. *R. Liska, B. Wendroff*. Comparison of several difference schemes on 1D and 2D test problems for the Euler equations // *SIAM J. on Scientific Computing*, 2003, v.25, p.995–1017.
30. *С.В. Богомолов, Н.В. Есикова, А.Е. Кувшинников*. Микро-макро модели Фоккера–Планка–Колмогорова для газа из твёрдых сфер // *Матем. моделир.*, 2016, т. 28, №2, с.65–85; англ. пер.: *S.V. Bogomolov, N.B. Esikova, A.E. Kuvshinnikov*. Micro-macro Kolmogorov–Fokker–Planck models for a hard-sphere gas // *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2016, v.8, №5, p.533–547.
31. *H. Alsmeyer*. Density profiles in argon and nitrogen shock waves measured by the absorption of an electronic beam // *J. Fluid Mech.*, 1976, v.74, №3, p.497–513.

Поступила в редакцию 14.05.2018

После доработки 26.09.2018

Принята к публикации 22.10.2018