

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗОНЫ ТУРБУЛЕНТНОГО СМЕШЕНИЯ В ПРОДОЛЬНОМ СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

© 2019 г. *А.В. Фомина¹, Г.Г. Черных^{2,3}*

¹ Новокузнецкий институт (филиал) Кемеровского государственного университета, Новокузнецк

² Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

³ Новосибирский государственный университет, механико-математический факультет, Новосибирск

fav@rdtc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке гранта ведущих научных школ НШ – 7214.2016.9 и РФФИ (проект 17-01-00332).

DOI: 10.1134/S0234087919020084

Построена основанная на усовершенствованной двухпараметрической модели турбулентности численная модель динамики цилиндрической локализованной области турбулентных возмущений в продольном горизонтально однородном сдвиговом потоке однородной жидкости. Результаты численных экспериментов демонстрируют существенное порождение энергии турбулентности за счет сдвигового течения. Рассмотрен вопрос о подобии течения по сдвиговому числу Фруда. Показано, что при достаточно больших значениях этого параметра, соответствующих малым градиентам скорости сдвигового течения, наблюдается подобие течения.

Ключевые слова: математическая модель турбулентного пятна в сдвиговом потоке, алгебраическая модель рейнольдсовых напряжений Роди, численное моделирование.

NUMERICAL MODELLING OF DYNAMICS OF CYLINDRICAL TURBULENT PATCH IN LONGITUDINAL SHEAR FLOW

A.V. Fomina¹, G.G. Chernykh^{2,3}

¹ Novokuznetsk Institute (branch) of the Kemerovo State University, Novokuznetsk

² Institute of Computational Technologies SB RAS, Novosibirsk

³ Department of Mathematics and Mechanics, Novosibirsk State University, Novosibirsk

fav@rdtc.ru, chernykh@ict.nsc.ru

Based on modified two–equation model of turbulence the numerical model of dynamics of cylindrical localized zone of turbulent mixing in a longitudinal uniform shear flow of homogeneous fluid has been constructed. The results of numerical experiments demonstrate a

significant turbulent energy generation caused by the effect of shear flow. The question of similarity of the flow with respect to the shear Froude number has been under consideration. The results of numerical experiments show the similarity of flow for large values of this parameter which correspond to small values of velocity gradients of shear flow.

Key words: mathematical model of turbulent patch in a shear flow, Rodi's algebraic Reynolds stresses model of turbulence, numerical modeling.

1. Введение

Эволюция локализованных областей турбулизованной жидкости (пятен турбулентности) оказывает определяющее влияние на формирование тонкой микроструктуры гидрофизических полей в океане [1]. Изучение динамики локализованных турбулентных областей представляет также интерес в связи с изучением турбулентных следов за самодвижущимися телами в однородной и стратифицированной жидкостях.

Достаточно подробный анализ исследований динамики турбулентных пятен в покоящейся жидкости можно найти в [2–10]. В [2] выполнено качественное экспериментальное исследование динамики плоской локализованной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной среде. Некоторые количественные экспериментальные данные получены как в однородной [3], так и в стратифицированной [5] жидкостях. В [4] на основе математической модели, включающей уравнение баланса энергии турбулентности, выполнено численное исследование динамики плоской локализованной области турбулентных возмущений в линейно стратифицированной среде. Показано, что если суммарная энергия турбулентности в зоне смешения в начальный момент времени достаточно велика, то эволюция турбулентного пятна характеризуется первоначальным расширением как по вертикали, так и по горизонтали (почти так же, как и в случае однородной жидкости). Однако через некоторое время под влиянием архимедовых сил рост зоны турбулентного смешения в вертикальном направлении прекращается и наблюдается лишь ее расширение по горизонтали. Процесс динамики зоны турбулентного смешения сопровождается активной генерацией внутренних волн. Построено основанное на численном анализе автомодельное решение задачи о динамике турбулентного пятна в пассивно стратифицированной среде. Показано, что турбулентная диффузия приводит к неполному перемешиванию жидкости в турбулентном пятне: в турбулентном пятне жидкость остаётся стратифицированной, но со стратификацией, отличной от стратификации окружающей среды. Исследования продолжены в [6], в которой с целью более детального описания процесса вертикального турбулентного обмена применена математическая модель турбулентности, включающая в себя дифференциальные уравнения переноса нормальных рей-

нольдсовых напряжений. Изучен баланс энергии течения. Показано, что во внутренние волны переходит лишь малая часть суммарной начальной энергии турбулентности. Осуществлено моделирование течения по плотностному числу Фруда. Продемонстрировано подобие течения при достаточно больших значениях этого параметра. Результаты численного моделирования фазовой картины генерируемых при эволюции зоны турбулентного смешения внутренних волн для одного из моментов времени удовлетворительно согласуются с экспериментально полученными в [5]. Более детальное сопоставление затруднительно в связи с тем, что в опытах не фиксировалась начальная энергия турбулентности и в процессе эволюции турбулентного пятна турбулизующее устройство оставалось в зоне смешения (подобная ситуация характеризует и другие экспериментальные исследования).

В [7,9] выполнены лабораторные исследования динамики турбулентных пятен, генерируемых постоянно действующим источником в линейно стратифицированной среде. В качестве источника турбулентности применялась присутствующая в турбулентном пятне осциллирующая сетка. Задача рассматривалась как в одномерном [7], так и двумерном [9] приближениях. Отмечается, что вначале турбулентное пятно расширяется аналогично случаю однородной жидкости как по вертикали, так и по горизонтали (последнее для двумерной постановки). Затем начинается стадия воздействия силы тяжести и вертикальный рост пятна замедляется и прекращается. В двумерном случае формируется локализованная интрузия (область жидкости промежуточной плотности), генерирующая внутренние волны. Даны законы расширения пятен.

С использованием математической модели, включающей в себя дифференциальные уравнения переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений, задача о динамике турбулентного пятна в линейно стратифицированной среде рассматривалась в [8]. Дискретизация математической модели осуществлялась с применением разработанных автором [8] неявного метода расщепления с коррекцией давления и компактных разностных аппроксимаций. Результаты расчетов [8] в части, касающейся эволюции границы области турбулизованной жидкости и параметров турбулентности в ней, согласуются с результатами [6].

Распространение пассивной примеси от мгновенного локализованного источника в зоне турбулентного смешения численно исследовалось в [10]. На основе анализа результатов численных экспериментов сделан вывод об эффекте памяти в рассматриваемом течении. Осреднённая концентрация "помнит" особенности задания начальных условий для этой величины как в однородной, так и в стратифицированной жидкости.

В целом ряде работ при изучении турбулентного следа за самодвижущимся телом в стратифицированной жидкости задача сводилась к модельной задаче об эволюции плоской зоны турбулентного смешения (турбулентного пятна). Отметим среди них [11, 12]. В [11] такое приближение обосновывается численными экспериментами с полуэмпирическими моделями второго порядка, включая модели с дифференциальными уравнениями переноса компонент тензора рейнольдсовых напряжений. Расчёты характеристик турбулентного следа в [11] выполнялись также и в «полной постановке» с применением трёхмерной параболизированной системы уравнений гидродинамики, замкнутой на основе упомянутых выше математических моделей. В [12] численные эксперименты осуществлены путём применения метода прямого численного моделирования (DNS). Эволюция пятен турбулентности в ближнем следе за удлинённым самодвижущимся телом вращения в температурно–стратифицированной среде в зависимости от типа движителя изучалась на основе численного моделирования в [13]. Показано, что конфигурация движителя может приводить к значительно отличающимся распределениям осреднённых полей скорости, температуры, энергии турбулентности и других величин в пятне турбулентности.

Динамика турбулентного пятна в пикноклине в отсутствие и при наличии поперечного сдвигового турбулентного течения экспериментально исследовалась в [14]. Эксперименты проводились при числах Ричардсона $Ri \geq 1$ по параметрам невозмущённого набегающего потока в центральной по вертикали точке. Показано, что сдвиговое течение может существенно увеличивать размеры турбулентного пятна. Даны теоретические оценки полученных экспериментальных данных. Двумерные турбулентные локализованные области турбулентных возмущений, образующиеся при обрушении подветренных внутренних волн (lee waves) при обтекании препятствия набегающим потоком линейно стратифицированной жидкости с постоянной скоростью изучались на основе DNS в [15]. Типичные, определяемые по высоте области перемешанной жидкости и скорости набегающего потока турбулентные числа Рейнольдса, оказались порядка 6000. На основе сопоставления с теорией Колмогорова–Обухова локально изотропной турбулентности показано, что сформировавшееся турбулентное течение является развитым турбулентным течением, в котором процессы порождения, диссипации и переноса близки к квазистационарному состоянию в течение значимого интервала времени.

Динамика плоской локализованной зоны турбулентного смешения в однородном линейном поперечном сдвиговом потоке однородной и линейно стратифицированной среды на основе полуэмпирических моделей второ-

го порядка изучалась в [16–18]. Выявлено, что поперечное сдвиговое течение приводит к значительному искажению границы зоны турбулентного смешения и картины генерируемых внутренних волн в стратифицированной среде. Сдвиговое течение приводит как в однородной, так и в стратифицированной жидкостях к существенному порождению энергии турбулентности и продлевает жизнь турбулентного пятна. Выполнено моделирование течения в сдвиговом потоке однородной жидкости по сдвиговому числу Фруда, совпадающему по своей величине с обратной величиной обезразмеренного градиента скорости невозмущенного сдвигового потока. На основе численных экспериментов показано, что при больших значениях этого параметра наблюдается подобие.

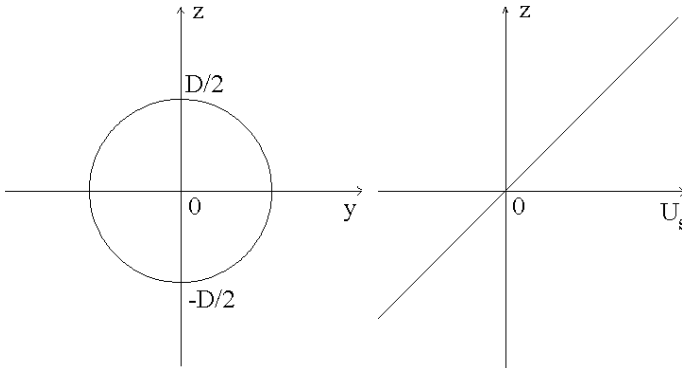


Рис.1. Схема течения в начальный момент времени.

В настоящей работе рассматривается модельная нестационарная задача о динамике области турбулентных возмущений в продольном сдвиговом потоке однородной жидкости. В начальный момент времени турбулизованная область представляет собой направленный вдоль оси x бесконечно длинный цилиндр. Сечение цилиндра плоскостью (y, z) приведено на рис. 1; направленное вдоль оси цилиндра линейное сдвиговое течение представлено также на этом рисунке. Построена основанная на модифицированной двухпараметрической полуэмпирической модели турбулентности Роди и методе расщепления по пространственным переменным численная модель течения. Результаты расчетов иллюстрируют динамику области турбулизованной жидкости, сопровождающуюся значительным порождением энергии турбулентности за счет воздействия сдвигового течения. Обсуждается вопрос о подобии течения по сдвиговому числу Фруда, равному отношению произведения характерной скорости турбулентных возмущений в начальный момент времени на характерное время, обусловленное сдвиговым потоком, к величине начального размера турбулизованной области D и совпадающему с обезразмеренной обратной величиной градиента скорости невозмущенного сдвигового потока.

2. Постановка задачи

Для построения математической модели течения рассмотрим систему уравнений Рейнольдса, полученных в результате осреднения уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска [1]:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial U_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \langle p_1 \rangle}{\partial x_i} = \nu \Delta U_i + g_i \frac{\langle \rho_1 \rangle}{\rho_0} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u'_\alpha u'_i \rangle, \quad (1)$$

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_\alpha} + \left\langle u'_\alpha \frac{\partial T'}{\partial x_\alpha} \right\rangle = \chi \Delta \langle T \rangle. \quad (3)$$

Здесь $U_\alpha = u_\alpha - u'_\alpha$ – осредненные компоненты вектора скорости: $\langle u_\alpha \rangle = U_\alpha$; $p_1 = p - p_s$ – отклонение давления от гидростатического, обусловленного стратификацией $\rho = \rho_s(z)$; $\rho_1 = \rho - \rho_s$ – дефект плотности; $\langle \rangle$ – знак осреднения; штрихом обозначены пульсационные составляющие; $g_i = (0, 0, -g)$, g – ускорение силы тяжести; плотность жидкости считается линейной функцией температуры: $\rho - \rho_0 = -\beta \rho_0 (T - T_0)$, β – коэффициент объёмного расширения жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; χ – коэффициент температуропроводности; по повторяющимся индексам предполагается суммирование. В настоящей работе авторы исследуют течение однородной жидкости: $\rho = \rho_0$ (значит, $T = T_0$). В связи с этим уравнение (3) не рассматривается; векторное слагаемое $g_i (\langle \rho_1 \rangle / \rho_0)$ представляет собой нулевой вектор; слагаемое в (1), содержащее ν в качестве множителя, отбрасывается как малое (такое предположение является стандартным для развитых свободных турбулентных течений).

Система уравнений (1), (2) незамкнута; её замыкание осуществляется с применением алгебраической модели Роди [19,20] рейнольдсовых напряжений $\langle u'_i u'_j \rangle$:

$$\frac{\langle u'_i u'_j \rangle}{e} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{1 - c_2}{c_1} \frac{(P_{ij} / \varepsilon) - 2/3 \delta_{ij} (P / \varepsilon)}{1 + (1/c_1)((P/\varepsilon) - 1)}. \quad (4)$$

Здесь $P_{ij} = -\langle u'_i u'_k \rangle (\partial U_j / \partial x_k) - \langle u'_j u'_k \rangle (\partial U_i / \partial x_k)$ – порождения рейнольдсовых напряжений за счет градиентов осредненного движения; δ_{ij} – символ Кронекера; $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3$; $P = P_{\alpha\alpha} / 2$; ε – скорость диссипации энергии турбулентности $e = \langle u'_\alpha u'_\alpha \rangle / 2$.

Для определения значений величин энергии турбулентности e и скорости диссипации ε привлекаются следующие дифференциальные уравнения переноса:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial e}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u'_\alpha e' \rangle + P - \varepsilon, \quad (5)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U_\alpha \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \langle u'_\alpha \varepsilon' \rangle + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (6)$$

В случае бессдвигового течения (задача о турбулентном пятне в неподвижной жидкости) течение описывается системой уравнений (5), (6), $U_\alpha = 0$ ($\alpha=1,2,3$); в настоящей работе авторы рассматривают течение с полем скорости вида $\mathbf{U}=(U(t,y,z),0,0)$. Осредненный дефект давления предполагается не зависящим от x ; вследствие предположения о структуре вектора скорости он становится нулевым, что согласуется с нулевыми краевыми условиями для величины дефекта давления на бесконечности по переменным y, z .

В результате сделанных предположений мы приходим к системе уравнений:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle u'v' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle u'w' \rangle, \quad (7)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'e' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'e' \rangle + P - \varepsilon, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} \langle v'\varepsilon' \rangle - \frac{\partial}{\partial z} \langle w'\varepsilon' \rangle + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} P - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{e}. \quad (9)$$

В уравнениях (7)–(9) слагаемые, содержащие сомножители в виде коэффициента молекулярной вязкости, как и в (1), опущены в предположении малости. Система уравнений (7)–(9) незамкнута. Замыкание осуществляется следующим образом:

$$-\langle u'v' \rangle = K_u \frac{\partial U}{\partial y}, \quad -\langle u'w' \rangle = K_u \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$-\langle u'e' \rangle = K_e \frac{\partial e}{\partial y}, \quad -\langle w'e' \rangle = K_e \frac{\partial e}{\partial z},$$

$$-\langle v'\varepsilon' \rangle = K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial y}, \quad -\langle w'\varepsilon' \rangle = K_\varepsilon \frac{\partial \varepsilon}{\partial z}.$$

Для получения значений коэффициентов турбулентной вязкости K_u , K_e , K_ε воспользуемся алгебраической неравновесной моделью Роди (4).

С учетом особенностей изучаемого течения имеем

$$\langle u'v' \rangle = \frac{1-c_2}{c_1} \cdot e \cdot \frac{P_{12}/\varepsilon}{1+(1/c_1)((P/\varepsilon)-1)};$$

$$P_{12} = -\langle v'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \frac{\langle v'^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1-c_2}{c_1} \frac{P/\varepsilon}{1+(1/c_1)((P/\varepsilon)-1)} \right);$$

$$-\langle u'v' \rangle = \frac{2}{3} \Phi \left(1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = \tilde{c}_\mu \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial y} = K_u \frac{\partial U}{\partial y}; \quad \Phi = \frac{1-c_2}{c_1 + ((P/\varepsilon)-1)}. \quad (10)$$

Аналогично

$$\langle u'w' \rangle = \frac{1-c_2}{c_1} \cdot e \cdot \frac{P_{13}/\varepsilon}{1+(1/c_1)((P/\varepsilon)-1)};$$

$$P_{13} = -\langle w'^2 \rangle \frac{\partial U}{\partial z}; \quad \frac{\langle w'^2 \rangle}{e} = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{1-c_2}{c_1} \frac{P/\varepsilon}{1+(1/c_1)((P/\varepsilon)-1)} \right);$$

$$-\langle u'w' \rangle = \frac{2}{3} \Phi \left(1 - \Phi \frac{P}{\varepsilon} \right) \frac{e^2}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial z} = K_u \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (11)$$

Для замыкания (8), (9) полагаем: $K_e = K_u$, $K_\varepsilon = K_u/\sigma$. Величины $c_1=2.2$, $c_2=0.55$, $c_{\varepsilon 1}=1.44$, $c_{\varepsilon 2}=1.92$, $\sigma=1.3$ – известные общепринятые эмпирические постоянные [19,20].

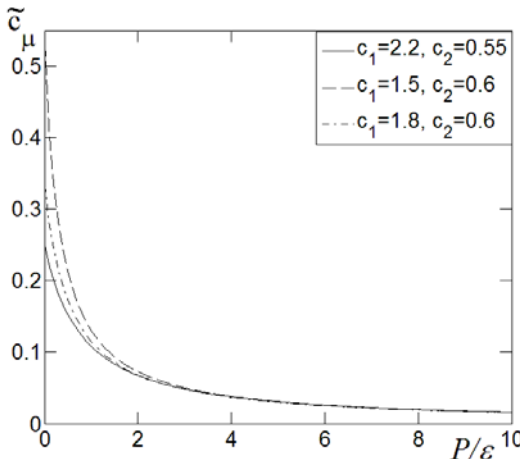


Рис.2. Графики функции \tilde{c}_μ в зависимости от эмпирических постоянных c_1, c_2 и P/ε .

Выбор такого достаточно сложного замыкания математической модели (7)–(9) обусловлен существенным варьированием величины P/ε в рассматриваемом течении. В случае бессдвигового течения величина $U = 0$ и имеет место равенство $P/\varepsilon = 0$; в случае $U \neq 0$ величина P будет зависеть от градиентов сдвигового течения (в расчетах настоящей работы $0 \leq P/\varepsilon \leq 5$). Графики функции $\tilde{c}_\mu = 2/3(\Phi(1 - \Phi(P/\varepsilon)))$ в зависимости от P/ε и известных [19,20] эмпирических постоянных c_1, c_2 представлены на рис.2.

При $t = t_0$ задавались следующие начальные условия:

$$e(t_0, y, z) = \Phi_1(r), \quad \varepsilon(t_0, y, z) = \Phi_2(r), \quad U(t_0, y, z) = \alpha z \sqrt{e_0}/D = U_s(z),$$

$$-\infty < y < \infty, \quad -\infty < z < \infty, \quad t = t_0.$$

Здесь $\alpha = \text{const}$, D – диаметр зоны турбулентного смешения в начальный момент времени, $e_0 = e(t_0, 0, 0)$. Функции $\Phi_1(r)$, $\Phi_2(r)$, $r^2 = y^2 + z^2$ – функции, согласующиеся с экспериментальными данными Линя и Пао (Lin, Pao) о вырождении безимпульсного турбулентного следа в однородной жидкости [21,22]:

$$e(x_0, y, z) = \Phi_1(r) = E_0 \cdot \exp(-4 \cdot r^2/D_1^2),$$

$$\varepsilon(x_0, y, z) = \Phi_2(r) = \sqrt{12} \cdot E_0^{3/2} \cdot \exp(-6 \cdot r^2/D_1^2),$$

величина E_0 выбирается из условий согласования на расстоянии $x = 8D_1$ с экспериментальными данными (D_1 – диаметр тела).

При $r^2 = y^2 + z^2 \rightarrow \infty$ ставились граничные условия $e = \varepsilon = 0$, $U = U_s(z)$, $t \geq t_0$.

При проведении расчетов краевые условия, соответствующие $r \rightarrow \infty$, сносились на границы достаточно большого прямоугольника, размеры которого подбирались исходя из результатов численных экспериментов. Из соображений симметрии решение отыскивается в первом квадранте плоскости (y, z) . Граничные условия на координатных осях принимались следующими:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} = 0, \quad y = 0, \quad z \geq 0;$$

$$U = \frac{\partial e}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad y \geq 0.$$

Переменные задачи могут быть обезразмерены с применением характерных масштабов длины D и скорости $U_0 = \sqrt{e_0}$. При таком обезразмеривании в роли характерного времени течения выступает величина $T_c = D/\sqrt{e_0}$. Вос-

пользуемся следующим представлением обезразмеренных величин: $y^* = y/D$, $z^* = z/D$, $t^* = t/T_c$, $U^* = U/U_0$, $e^* = e/U_0^2$, $\varepsilon^* = \varepsilon D/U_0^3$, $K_u^* = K_u/U_0 D$, $P^* = P/(U_0^3/D)$.

В результате обезразмеривания замкнутые уравнения математической модели примут вид:

$$\frac{\partial U^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} K_u^* \frac{\partial U^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} K_u^* \frac{\partial U^*}{\partial z^*}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial e^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} K_e^* \frac{\partial e^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} K_e^* \frac{\partial e^*}{\partial z^*} + P^* - \varepsilon^*, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t^*} = \frac{\partial}{\partial y^*} K_\varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial y^*} + \frac{\partial}{\partial z^*} K_\varepsilon^* \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial z^*} + c_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon^*}{e^*} P^* - c_{\varepsilon 2} \frac{(\varepsilon^*)^2}{e^*}. \quad (14)$$

В дальнейшем, по возможности, знак обезразмеривания $*$ будет опущен. В задаче есть также еще одно характерное время $T_s = (dU_s/dz)^{-1} = (\alpha\sqrt{e_0}/D)^{-1}$, обусловленное сдвиговым течением. По аналогии с хорошо известным плотностным числом Фруда введем сдвиговое число Фруда $F_s = \sqrt{e_0} T_s / D = \alpha^{-1}$ (см. также [16-18]). В таком случае $U_s^* = z^*/F_s$. В уравнениях (8), (9), как уже отмечалось выше, величина P – порождение энергии турбулентности за счет градиентов осредненного течения

$$\begin{aligned} P &= -\langle u'v' \rangle \frac{\partial U}{\partial y} - \langle u'w' \rangle \frac{\partial U}{\partial z} = K_u \left[\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] = \\ &= K_u \left[\left(\frac{\partial U_d}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_d}{\partial z} + \frac{dU_s}{dz} \right)^2 \right], \quad U_d = U - U_s. \end{aligned}$$

Исходя из представления обезразмеренных величин $U_s = U_s^* \sqrt{e_0}$, $z = z^* D$, имеем

$$\frac{dU_s}{dz} = \frac{\sqrt{e_0}}{D} \frac{dU_s^*}{dz^*} = \frac{\sqrt{e_0}}{D} \frac{1}{F_s} \Rightarrow \frac{dU_s^*}{dz^*} = \frac{1}{F_s}.$$

Таким образом, в обезразмеренных уравнениях (12)–(14) присутствует величина $1/F_s$, характеризующая наличие в задаче фонового линейно сдвигового продольного течения. Значение $F_s = \sqrt{e_0} T_s / D = \alpha^{-1}$ по величине совпадает с обезразмеренной обратной величиной градиента скорости сдвигового течения.

3. Конечно-разностный алгоритм решения задачи

Конечно-разностный алгоритм решения задачи основан на последовательном интегрировании системы дифференциальных уравнений (12)–(14) на каждом слое по времени. В качестве примера приведем конечно-разностный аналог уравнения (13), основанный на неявной схеме расщепления [23,24]

$$\frac{e_{i,j}^{n+1/2} - e_{i,j}^n}{\Delta t} = \frac{(K_e^n)_{i+1/2,j}(e_{i+1,j}^{n+1/2} - e_{i,j}^{n+1/2}) - (K_e^n)_{i-1/2,j}(e_{i,j}^{n+1/2} - e_{i-1,j}^{n+1/2})}{h_y^2} + P_{i,j}^n - \varepsilon_{i,j}^n,$$

$$\frac{e_{i,j}^{n+1} - e_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta t} = \frac{(K_e^n)_{i,j+1/2}(e_{i,j+1}^{n+1} - e_{i,j}^{n+1}) - (K_e^n)_{i,j-1/2}(e_{i,j}^{n+1} - e_{i,j-1}^{n+1})}{h_z^2}, \quad (15)$$

$\Delta t, h_y, h_z$ – шаги равномерной разностной сетки по времени и пространственным переменным. Конечно-разностный аналог уравнения баланса энергии турбулентности отличается от конечно-разностной схемы расщепления расчёта температурных волн [23] отсутствием итераций по нелинейности. Таким образом, схема (15) является упрощением хорошо известной схемы [23]. Коэффициенты вязкости и правые части выбираются с нижнего слоя по времени:

$$(K_e^n)_{i\pm 1/2,j} = 0.5 \left((K_e^n)_{i\pm 1,j} + (K_e^n)_{i,j} \right), \quad (K_e^n)_{i,j\pm 1/2} = 0.5 \left((K_e^n)_{i,j\pm 1} + (K_e^n)_{i,j} \right),$$

$$e_{i,j}^{n+1} = e \left(t_0 + (n+1)\Delta t, i \times h_y, j \times h_z \right), \quad i = 0, \dots, N_y; \quad j = 0, \dots, N_z; \quad n = 0, \dots, N_t;$$

$$P_{i,j}^n = (K_u^n)_{i,j} \left[\left(\frac{U_{i+1/2,j}^n - U_{i-1/2,j}^n}{h_y} \right)^2 + \left(\frac{U_{i,j+1/2}^n - U_{i,j-1/2}^n}{h_y} \right)^2 \right].$$

Порядок аппроксимации на классе гладких решений $O(\Delta t + h_y^2 + h_z^2)$.

Конечно-разностные уравнения решаются методом прогонки. Тестирование численной модели осуществлялось путем сопоставления результатов расчетов на последовательности сеток с расчетами задачи о следе за самодвижущимся и буксируемым телами в однородной жидкости в одномерной постановке с применением цилиндрической системы координат и детальным сопоставлением результатов расчетов с известными экспериментальными данными [24-27]. Расчеты настоящей работы выполнены на равномерной разностной сетке с параметрами: $\Delta t^* = 0.1$, $h_y^* = h_z^* = 0.02$. Размеры сеточной области $0 \leq y^* \leq Y^*$, $0 \leq z^* \leq Z^*$, $Y^* = Z^* = 8$. Изменение шага сетки по времени в 4 раза с одновременным измельчением h_y, h_z в 2 раза приводило к отклонениям в значениях сеточных решений, не превышающим 1% в равномерной норме.

4. Результаты расчетов динамики турбулентного пятна в продольном линейном сдвиговом потоке

Прежде чем излагать результаты расчетов, следуя [6, 16], приведём соображения подобия по сдвиговому числу Фруда $F_s = (U_0 T_s) / D = 1 / \alpha$, $T_s = (dU_s / dz)^{-1}$. Хорошо известно [4,6], что в отсутствие сдвига $U_s(z) = 0$ на достаточно больших временах вырождения течение, генерируемое при эволюции плоской локализованной области турбулентных возмущений в однородной жидкости, становится автомодельным. В связи с этим справедливы представления:

$$e = e_m f_1(r/L), \quad \varepsilon = \varepsilon_m f_2(r/L), \quad (16)$$

где по-прежнему $r = \sqrt{y^2 + z^2}$; L – характерный размер турбулентного пятна. В соответствии с результатами численных экспериментов для величин e_m, ε_m , справедливы выражения

$$\frac{e_m}{U_0^2} = B_1 \left(\frac{t-t_0}{T_c} \right)^{-1.52}, \quad \frac{\varepsilon_m D}{U_0^3} = B_2 \left(\frac{t-t_0}{T_c} \right)^{-2.52}, \quad \frac{L}{D} = B_5 \left(\frac{t-t_0}{T_c} \right)^{0.24}. \quad (17)$$

По аналогии с [6, 16] в случае линейного сдвигового течения $U_s = U_0 \alpha(z/D)$, $t \gg 1$, $F_s \gg 1$ решение следует искать в виде $(t/T_c = (t/T_s) T_s / T_c = (t/T_s) F_s)$:

$$\frac{e}{U_0^2} F_s^{1.52} = G_e \left(\frac{t}{T_s}, \frac{y}{DF_s^{0.24}}, \frac{z}{DF_s^{0.24}} \right), \quad \frac{\varepsilon D}{U_0^3} F_s^{2.52} = G_\varepsilon \left(\frac{t}{T_s}, \frac{y}{DF_s^{0.24}}, \frac{z}{DF_s^{0.24}} \right),$$

$$\frac{e_m}{U_0^2} F_s^{1.52} = \varphi_e \left(\frac{t}{T_s} \right), \quad \frac{L_y}{D} F_s^{-0.24} = \varphi_{1L} \left(\frac{t}{T_s} \right), \quad \frac{L_z}{D} F_s^{-0.24} = \varphi_{2L} \left(\frac{t}{T_s} \right). \quad (18)$$

Течение, генерируемое при эволюции локализованной области турбулентности в продольном сдвиговом потоке, иллюстрируется изменением характерных размеров L_y, L_z , определяемых из соотношений $e(t, L_y, 0) = e(t, 0, 0) / 2$, $e(t, 0, L_z) = e(t, 0, 0) / 2$. На рис.3а,б представлены графики функций $L_y(t), L_z(t)$ для различных $U_s(z)$. Можно видеть, что до значений $t/T_c \leq 300$ размеры $L_z(t)$ турбулизованной области практически совпадают для всех рассмотренных сдвигов $U_s(z)$ и бессдвигового течения. При больших значениях времени течение характеризуется несколько более интенсивным вертикальным расширением турбулентного пятна, обусловленным порождением энергии турбулентности в пятне за счет сдвигового течения. С учетом сооб-

ражений подобия по сдвиговому числу Фруда F_s характерные “универсальные” кривые $F_s^{-0.24} L_y^*(t/T_s)$, $F_s^{-0.24} L_z^*(t/T_s)$ приведены на рис.3с, d.

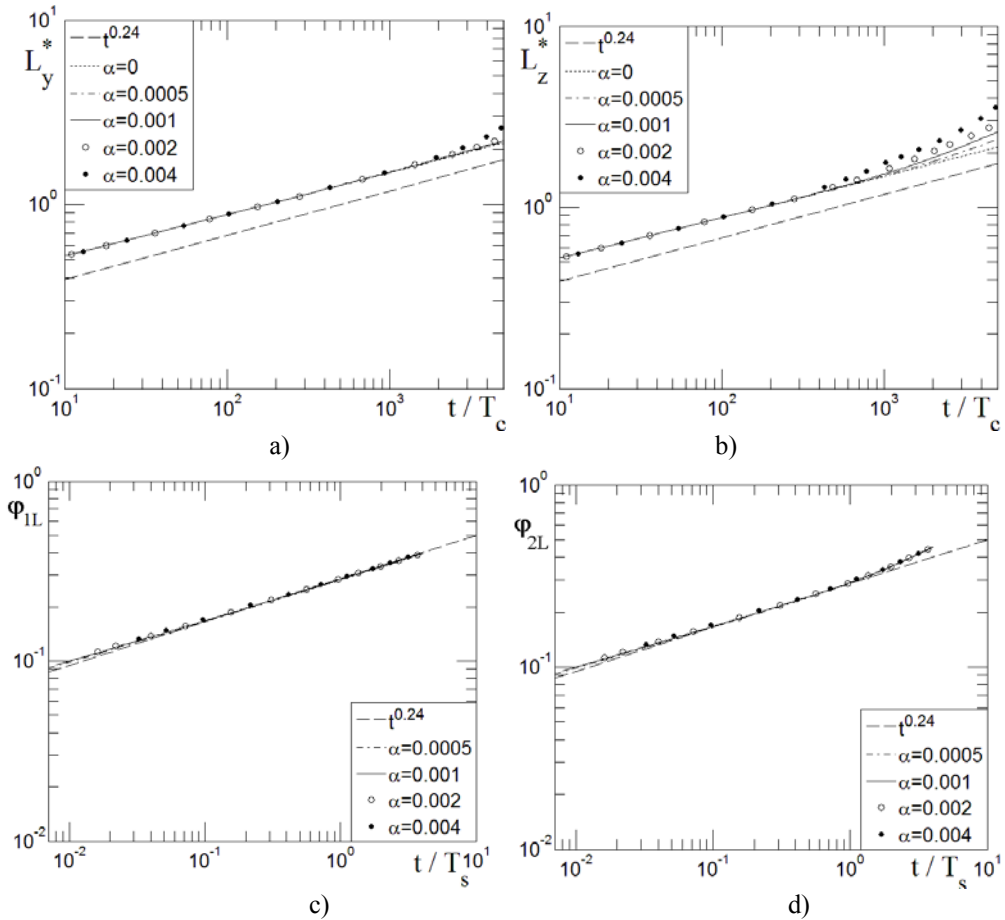


Рис.3. Графики функций $L_y^*(t)$ – a); $L_z^*(t)$ – b); $\Phi_{1L} = F_s^{-0.24} L_y^*(t/T_s)$ – c); $\Phi_{2L} = F_s^{-0.24} L_z^*(t/T_s)$ – d) для различных значений $U_s(z)$.

Течение характеризуется также поведением характерного масштаба энергии турбулентности $e(t, 0, 0) = e_m(t)$ в зависимости от времени и сдвигового течения $U_s(z)$ (рис.4а). Видно, что до значений времени $t/T_c \leq 400$ величины $e(t, 0, 0)$ практически совпадают (максимальное отклонение соответствует $\alpha = 0.004$ и составляет примерно 7%); при больших значениях времени течение характеризуется порождением энергии турбулентности за счет градиентов продольной компоненты скорости $U(t, y, z)$. Аналогичным обра-

зом ведет себя суммарная энергия турбулентности $E_t(t) = \int_0^\infty \int_0^\infty e dy dz$ (рис.4б).

Результаты соответствующего моделирования по сдвиговому числу Фруда F_s представлены на рис.4с, d. Можно видеть приближенное подобие.

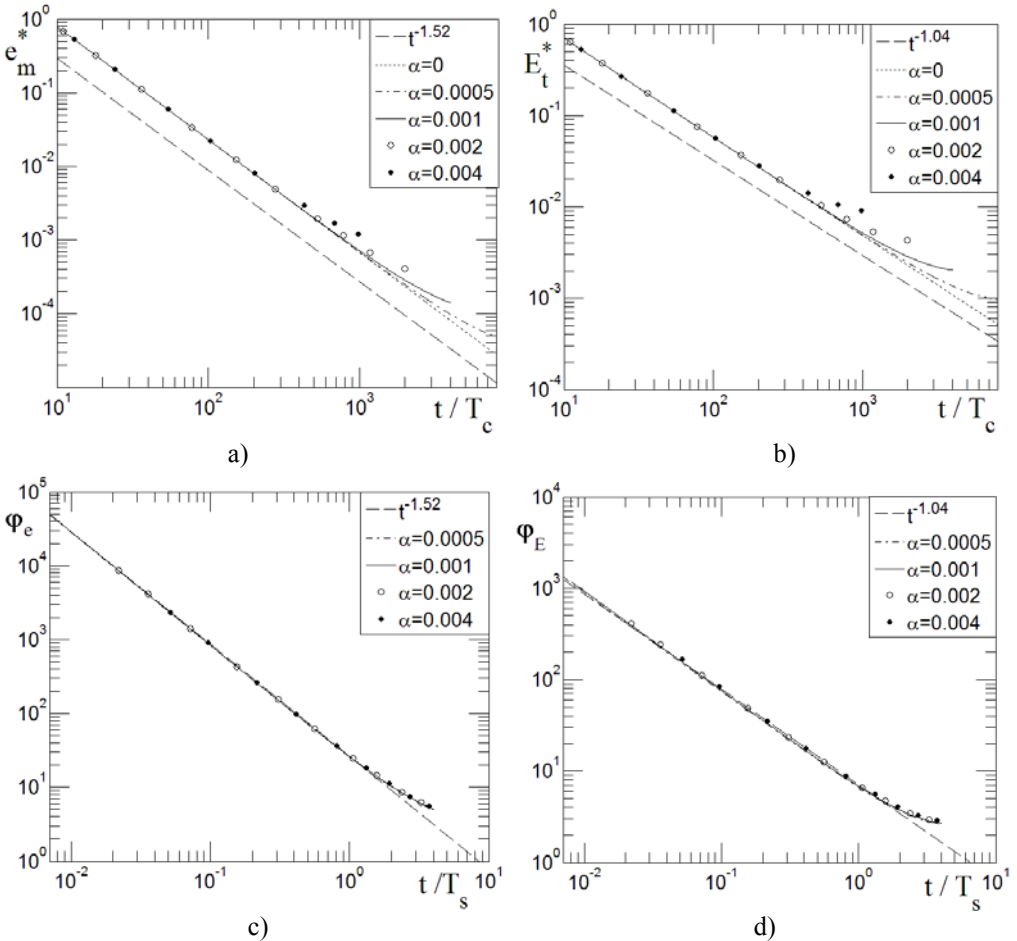


Рис.4. Графики функций $e_m^*(t)=e(t,0,0)$ – а); $E_t^*(t)$ – б); $F_s^{1.52}e_m^*(t/T_s)=\varphi_e(t/T_s)$ – в); $F_s^{1.04}E_t^*(t/T_s)=\varphi_E(t/T_s)$ – д) для различных значений $U_s(z)$.

С целью иллюстрации подобия по сдвиговому числу Фруда на рис.5а, б представлены также графики энергии турбулентности $e(t,0,z)=H_1(t,z)$ – (а), $G_e(t/T_s,0,z^*/F_s^{0.24})=H_2(z^*/F_s^{0.24})$ – (б) на вертикальной оси в исходных координатах и координатах подобия области течения для $t/T_s=2$. Можно видеть, что при $F_s \geq 1000$ графики функций мало отличаются друг от друга, что также свидетельствует о приближенном подобии течения при больших F_s . Характерные гидродинамические поля более полно иллюстрируются изолиниями (рис.6), соответствующими $t/T_s=2$. Они получены для $\alpha=0.001$.

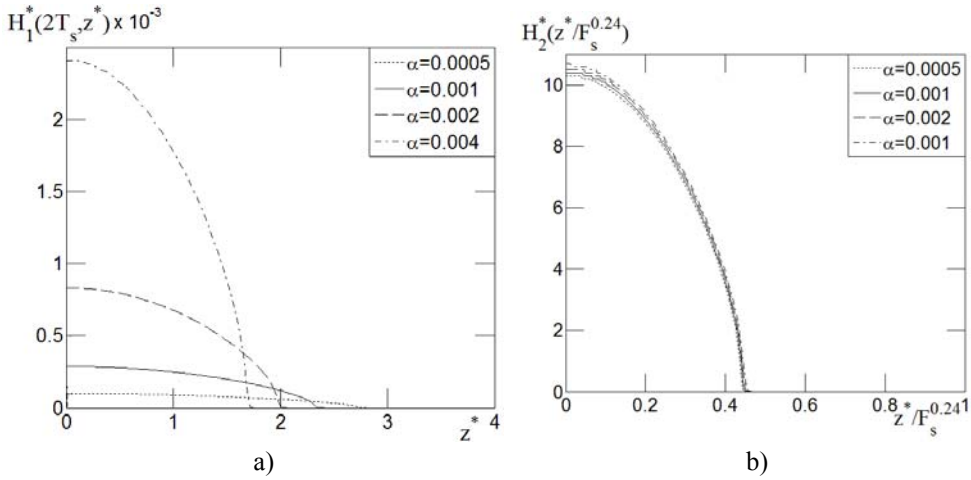


Рис.5. Графики функций энергии турбулентности e на вертикальной оси в исходных координатах – (а) и координатах подобия – (б) для $t/T_s = 2$.

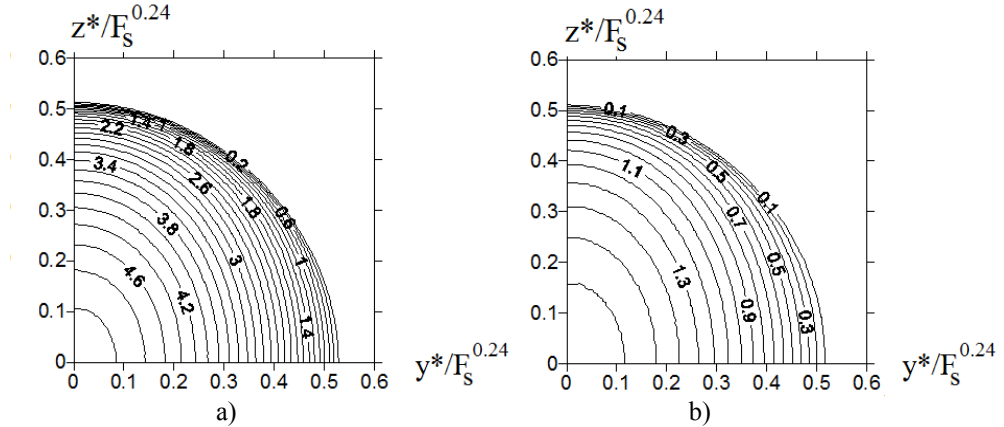


Рис.6. Изолинии энергии турбулентности и скорости диссипации, $t/T_s = 4$; $G_e = e^*F_s^{1.52} = \text{const}$ – (а); $G_\epsilon = \epsilon^*F_s^{2.52} = \text{const}$ – (б).

5. Заключение

Основные результаты работы сводятся к следующему. Построена основанная на алгебраической модели Роди рейнольдсовых напряжений математическая модель и выполнено численное моделирование эволюции цилиндрической локализованной области турбулентных возмущений в продольном горизонтально однородном сдвиговом потоке однородной жидкости. Результаты численных экспериментов демонстрируют существенное порождение энергии турбулентности за счет сдвигового течения. Последнее может продлевать жизнь турбулентного пятна. Рассмотрен вопрос о подобии течения по сдвиговому числу Фруда при достаточно больших значениях этого параметра. Численные эксперименты подтверждают подобие течения при больших значениях числа Фруда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Монин А.С., Яглом А.М.* Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Санкт-Петербург: Гидрометеиздат, 1992, т.1, 696с.;
Англ. перевод: *Monin A.S., Yaglom A.M.* Statistical fluid mechanics. V.1. Mechanics of turbulence. Dover Books on Physics, 2007, 784 p.
2. *Schooley A.H.* Wake collapse in a stratified fluid // *Science*, 1967, v.157, № 3787, p.421-423.
3. *Власов Ю.Н., Некрасов В.Н., Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д.* О развитии области турбулентного смешения в жидкости // ПМТФ, 1973, №2, с.91-95;
Vlasov Yu.N., Nekrasov V.N., Trokhan A.M., Chashechkin Yu.D. Development of turbulent mixing in a fluid // *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1973, v.14, Iss.2, p.222-225.
4. *Васильев О.Ф., Кузнецов Б.Г., Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Развитие области турбулизованной жидкости в стратифицированной среде // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа, 1974, № 3, с.45-52;
Vasiliev O.F., Kuznetsov B.G., Lytkin Yu.M., Chernykh G.G. Development of the region of a turbulized liquid in a stratified medium // *Fluid Dynamics*, 1974, v.9, №3, p.368-373.
5. *Трохан А.М., Чашечкин Ю.Д.* Генерация внутренних волн в стратифицированной жидкости гидродинамически линейным источником (двумерная задача) // Теория дифракции и распространения волн (краткие тексты докладов 7 Всесоюзн. Симп. по дифракции и распространению волн), Ростов-на-Дону, 1977, т.3, с.186-189.
Trokhan A.M., Chashechkin Yu.D. Generation of internal waves in stratified fluid by an impulse hydrodynamic line source(two-dimensional problem) / In: *Theory of diffraction and propagation of waves: Abstracts of the 7 All-Union Symp. On the Diffraction and Propagation of Waves.3.* USSR Acad. Sci., Moscow, 1977, p.186-189.
6. *Лыткин Ю.М., Черных Г.Г.* Подобие течения по плотностному числу Фруда и баланс энергии при эволюции зоны турбулентного смешения в стратифицированной среде // Математические проблемы механики сплошных сред: сб. научн. тр. Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО АН СССР, 1980, вып. 47, с.70-89;
Lytkin Yu.M., Chernykh G.G. Similarity of the flow with respect to the density Froude number and energy balance at the evolution of the turbulent mixing zone in a stratified medium, in: *Mathematical Problems of Continuum Mechanics: A Collection of Scientific Works*, Inst. Hydrodynamics of the USSR Acad. Sci. – Novosibirsk: 1980, Iss.47, p.70-89.
7. *Fernando H.J.S.* The growth of a turbulent patch in stratified fluid // *J. Fluid Mech.*, 1988, v.190, p.55-70.
8. *Толстых А.И.* Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1990, 230 с.;
Tolstykh A.I. Compact difference schemes and their applications to fluid dynamics problems. – М.: Nauka, 1990, 230 p.
9. *De Silva I.P.D., Fernando H.J.S.* Experiments on collapsing turbulent regions in stratified fluids // *J. Fluid Mech.*, 1998, v.358, p.29-60.
10. *Chashechkin Yu.D., Chernykh G.G., Voropayeva O.F.* The propagation of a Passive Admixture from a Local Instantaneous Source in a Turbulent Mixing Zone // *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 2005, v.19, №7, p.517-529.
11. *Chernykh G.G., Voropayeva O.F.* Numerical modeling of momentumless turbulent wake dynamics in a linearly stratified medium // *Comp. and Fluids*, 1999, v.28, №3, p.281-306.
12. *Pal Amikesh, De Stadler Matthew B., Sarkar Sutanu.* The spatial evolution of fluctuations in a self-propelled wake compared to a patch of turbulence // *Physics of Fluids*, 2013, v.25, p.095106-1-095106-20.

13. Jones M.C., Paterson E.G. Influence of Propulsion Type on the Stratified Near Wake of an Axisymmetric Self-Propelled Body // *Journal of Marine Science and Engineering*, 2018, 6, 46; doi:10.3390/jmse 6020046.
14. Fernando H.J.S. Turbulent patches in a stratified shear flow // *Physics of Fluids*, 2003, v.15, №10, p.3164-3169.
15. Yakovenko S.N., Thomas T.G., Castro I.P. A turbulent patch arising from a breaking internal wave // *J. Fluid Mech.*, 2011, v.677, p.103-133.
16. Chernykh G.G., Voropaeva O.F. Dynamics of a momentumless turbulent wake in a shear flow // *Journal of Engineering Thermophysics*, 2015, v.24, №1, p.12–21.
17. Воронаева О.Ф., Черных Г.Г. Динамика локальных областей турбулизованной жидкости в условиях фоновых возмущений гидрофизических полей // *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2015, т.8, № 4, с.12–17;
Voropaeva O.F., Chernykh G.G. The dynamics of local zones of turbulized fluid under the background disturbances of hydrophysical fields // *Fundamentalnaya i prikladnaya gidrofizika*, 2015, t.8, №4, s.12–17.
18. Воронаева О.Ф., Черных Г.Г. Динамика безымпурсного турбулентного следа в сдвиговом потоке линейно стратифицированной среды // *Теплофизика и аэромеханика*, 2016, т.23, №1, с.63–71;
Voropaeva O.F., Chernykh G.G. Dynamics of momentumless turbulent wake in a shear flow of a linearly stratified medium // *Thermophysics and Aeromechanics*, 2016, v.23, Iss.1, p.59–68.
19. Gibson M.M., Launder B.E. On the calculation of horizontal turbulent free shear flows under gravitational influence // *J. Heat Transfer. Trans. ASME*, 1976, №98C, p.81-87.
20. Rodi W. Turbulence models and their application in hydraulics / A state of the art review, University of Karlsruhe, 1980, 104 p.
21. Lin J.T., Pao Y.H. Wakes in stratified fluids // *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1979, v.11, p.317-338.
22. Hassid S. Collapse of turbulent wakes in stable stratified media // *Journal of Hydronautics*, 1980, v.14, №1, p.25-32.
23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravnenia matematicheskoi fiziki* (Equations of mathematical physics). – М.: Nauka, 1972.
24. Капцов О.В., Фомина А.В., Черных Г.Г., Шмидт А.В. Автомодельное вырождение безымпурсного турбулентного следа в пассивно стратифицированной среде // *Математическое моделирование*, 2015, т.27, №1, с. 84-98;
Kaptsov O.V., Fomina A.V., Chernykh G.G., Shmidt A.V. Avtomodelnoe vyrozhdienie bezympulsnogo turbulentnogo sleda v passivno stratifitsirovannoi srede // *Matematicheskoe modelirovanie*, 2015, t.27, №1, s.84-98.
25. Федорова Н.Н., Черных Г.Г. О численном моделировании безымпурсного турбулентного следа за сферой // *Моделирование в механике*, 1992, т.6(23), №1, с.129-149;
Fedorova N.N., Chernykh G.G. O chislennom modelirovanii bezympulsnogo turbulentnogo sleda za sferoi // *Modelirovanie v mekhanike*, 1992, t.6(23), №1, s.129-149.
26. Федорова Н.Н., Черных Г.Г. О численном моделировании плоских турбулентных следов // *Математическое моделирование*, 1994, т.6, №10, с.24-34;
Fedorova N.N., Chernykh G.G. O chislennom modelirovanii ploskikh turbulentnykh sledov // *Matematicheskoe modelirovanie*, 1994, t.6, №10, s.24-34.
27. Chernykh G.G., Fomina A.V., Moshkin N.P. Numerical Simulation of Dynamics of Turbulent Wakes behind Towed Bodies in Linearly Stratified Media // *Journal of Engineering Thermophysics*, 2009, v.18, №4, p.279–305.

Поступила в редакцию 09.10.2017

После доработки 11.07.2018

Принята к публикации 10.09.2018