

О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ УДАРНО-ВОЛНОВОЙ ДИНАМИКИ ГАЗОВЗВЕСЕЙ

© 2019 г. *А.В. Федоров, Т.А. Хмель*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск
khemel@itam.nsc.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 16-19-00010).

DOI: 10.1134/S0234087919030018

Проведен теоретический анализ модели двухфазной среды для описания ударно-волновых процессов в насыщенных газозвзвесах при учете хаотического движения и столкновений частиц. Определены области гиперболичности и области составного типа определяющей системы уравнений. Показано расширение зон гиперболичности относительно бесстолкновительной модели. Представлена приближенная гиперболизованная модель, проведено сравнение численных решений задачи формирования ударно-волновых структур различного типа. Установлены свойства сходимости численных решений неконсервативных уравнений составного типа с применением монотонизирующих схем Хартена и Джентри-Мартина-Дэйли. Получены условия применимости гиперболизованной модели для разных типов течений. Показано, что в общем случае анализ ударно-волновых процессов в газозвзвесах целесообразно проводить в рамках полной модели.

Ключевые слова: газозвеси, ударные волны, столкновительная модель, характеристический анализ, математическое моделирование, численное моделирование.

ABOUT QUALITATIVE PROPERTIES OF THE COLLISIONAL MODEL FOR DESCRIPTION OF SHOCK-WAVE DYNAMICS OF GAS PARTICLE SUSPENSIONS

A.V. Fedorov, T.A. Khmel

Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics SB RAS, Novosibirsk

The theoretical analysis of a model of two-phase medium which takes into account chaotic motion and collisions of particles for the description of shock-wave processes in dense gas particle suspensions is presented. Domains of hyperbolicity or composite type of the governing system of equations are determined. The expansion of the hyperbolicity zones with respect to the collisionless model is shown. An approximate hyperbolized model is presented, and comparative analysis of numerical solutions of the problem of

the formation of shock-wave structures of various types is performed. The convergence properties in numerical simulations of non-conservative equations of composite type with the use of monotonizing schemes of Harten and Gentry-Martin-Daly are established. Conditions for the applicability of a hyperbolized model for different types of flows are obtained. They indicate that in general it is advisable to analyze the shock-wave processes in gas particle suspensions within the framework of the full model.

Key words: gas suspension, shock waves, collision model, characteristic analysis, mathematical modeling, numerical simulation.

1. Введение

Теоретические исследования течений газозвесей мелких твердых частиц проводятся, как правило, в рамках моделей механики гетерогенных сред [1-5]. Для конечных объемных концентраций частиц необходим учет объема, занятого дискретной фазой, и контактных взаимодействий частиц между собой [2]. Для анализа ударно-волновых процессов в насыщенных сжимаемых средах были развиты различные подходы, учитывающие давление в фазе частиц. Широко известная модель двух сжимаемых сред с замыкающим уравнением релаксационного типа для давлений была предложена в работе Баера-Нанзиато [6] и использовалась в [7-11]. Модели порошковых сред с полуэмпирическими соотношениями для давления в фазе частиц развивались в [12-19]. Если частицы несжимаемы (собственная плотность постоянна), то давление в дискретной фазе обусловлено только их столкновениями друг с другом. В [20,21], по-видимому, впервые предложен кинетический подход для описания усредненных параметров гранулярной среды при учете хаотического движения частиц и их случайных столкновений. Применительно к многофазным средам, давление, порождаемое контактными взаимодействиями частиц, вводится на основе различных представлений в моделях [17-19,22]. В [23,24] применительно к описанию ударно-волновых течений развита модель столкновительной газозвеси на основе молекулярно-кинетических подходов теории гранулированных материалов, предложенных в [25-27] и учитывающих столкновения неупругих шероховатых несжимаемых частиц. Модель [23,24] верифицирована по данным измерений скорости звука (скорости распространения фронта волны разрежения) в засыпках при разрушении камеры высокого давления [28]. Влияние столкновительной динамики частиц на структуры ударных и детонационных волн и процессы диспергирования исследовано в рамках этой модели в [29-32].

Для обоснования корректности постановок задач необходимо знать тип системы определяющих уравнений. Газозвеси твердых частиц малых объ-

емных концентраций описываются системой уравнений Эйлера, приводимой к консервативной форме, с одним давлением, входящим только в уравнения газовой фазы. Такая система является вырожденной гиперболической: для фазы частиц определяется одно собственное число кратности 3 ($\lambda = u$), порождающее лишь два независимых собственных вектора и один присоединенный [33]. При учете столкновительного давления и, соответственно, конечной скорости звука в дискретной фазе $c > 0$, собственные числа различны: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $\lambda_3 = u$, что снимает вопрос о вырожденности.

Однако для конечного объема, занятого частицами (с учетом сил Архимеда), уравнения не приводятся к консервативной форме и в общем случае являются уравнениями составного типа. Вопрос о корректности постановок начально-краевых задач для таких систем до сих пор является открытым. Тем не менее, применение для систем уравнений составного типа в [30-32] численных алгоритмов на основе разностных схем с монотонизирующими операторами оказалось успешным, как и для слабозапыленной среды [33].

Существует ряд моделей механики многофазных сред, основные уравнения которых являются гиперболическими. Это достигается за счет введения в уравнения дополнительных дифференциальных членов, отражающих межфазное взаимодействие [34,35], или дополнительных релаксационных уравнений [6,36]. В некоторых случаях возможно исключение малых дифференциальных членов, линейно зависящих от объемных концентраций частиц [9].

Анализ условий гиперболичности систем уравнений для бесстолкновительной динамики газозвесей конечных объемных концентраций проводился в ряде работ в различных асимптотических приближениях, в частности, в [37,38]. В диссертации Казакова Ю.В. [39] области течения, в которых уравнения гиперболичны, были определены в общем виде условием $|u_1 - u_2| > c_1 \sqrt{1 + (\rho_{11}m_2 / \rho_{22}m_1)^{1/3}}$, где c_1 – скорость звука в газе, ρ_{11}, ρ_{22} – собственные плотности, m_1, m_2 – объемные концентрации газа и частиц.

Представляет интерес модификация этих условий для модели, учитывающей столкновения частиц. В настоящей работе на основе характеристического анализа определены условия гиперболичности системы уравнений столкновительной газозвеси конечных объемных концентраций. Также методами численного моделирования одномерных нестационарных течений проведено сравнение ударно-волновых структур различного типа, определенных в рамках модели [24] и в рамках приближенной модели, уравнения которой гиперболичны.

2. Столкновительная модель динамики газозвеси твердых частиц

Основные уравнения столкновительной двухфазной среды типа газ–твердые (несжимаемые) частицы вытекают из законов сохранения массы, импульса и энергии каждой из фаз и в случае одномерных течений имеют вид [24]

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x} &= J, & \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x} &= -J, \\
 \frac{\partial \rho_1 u_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1^2 + m_1 p_1)}{\partial x} &= -p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} + J u_2 - f, \\
 \frac{\partial \rho_2 u_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2^2 + m_2 p_2)}{\partial x} &= p_1 \frac{\partial m_2}{\partial x} - J u_2 + f, \\
 \frac{\partial \rho_1 E_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1 E_1 + m_1 u_1 p_1)}{\partial x} &= -p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} + J E_2 - f u_2 - q, \\
 \frac{\partial \rho_2 E_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 E_2 + m_2 u_2 p_2)}{\partial x} &= p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} - J E_2 + f u_2 + q, \\
 \frac{\partial \rho_2 E_c}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2 E_c + \eta m_2 u_2 p_2)}{\partial x} &= \eta p_1 \frac{\partial u_2 m_2}{\partial x} - I_0 - J E_c + \eta f u_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Система замыкается уравнениями состояния

$$\begin{aligned}
 E_1 &= c_{v1} T_1 + u_1^2 / 2, & E_2 &= c_{v2} T_2 + u_2^2 / 2 + e_c + Q, & m_2 p_2 &= m_2 p_1 + p_c, \\
 p_c &= 0.5 \alpha_t [1 + 2(1 + \varepsilon) m_2 g(m_2)] p_2 e_c, & g(m_2) &= [1 - (m_2 / m_*)^{4m_*/3}]^{-1}
 \end{aligned}$$

и алгебраическими соотношениями для параметров J, f, Q , определяющих законы массообмена, теплообмена и силового взаимодействия фаз. Здесь ρ_1, ρ_2 – средние плотности, $m_2, m_1 = 1 - m_2$ – объемные концентрации, $\rho_1 = \rho_{11} m_1, \rho_2 = \rho_{22} m_2, \rho_{22} = \text{const}$, u_1, u_2 – скорости, T_1, T_2 – температуры фаз. Столкновительное (гранулярное) давление p_c пропорционально энергии хаотического движения частиц $e_c = 0.5 \sum_{i=1}^N (u'_i)^2 / N$, где u'_i – пульсация скорости i -й частицы, N – число частиц в единице объема.

Параметры, задающие столкновительную динамику частиц: $\eta, \alpha_t, \varepsilon, m_*$, I_0 определены в [24]. Константы $\eta, \alpha_t, \varepsilon$ зависят от формы частиц, коэффициента шероховатости и свойств упругости (реституции) материала частиц, m_* – предельная объемная концентрация плотной упаковки.

Левая часть уравнений (1) представлена в консервативном виде, в правой части присутствуют члены вида $p_1(\partial t_2 / \partial x)$ и $p_1(\partial t_2 u_2 / \partial x)$, таким образом, система не приводится полностью к консервативной форме. Аналогичные уравнения бесстолкновительной модели при $p_c = 0$, $e_c = 0$ представляют собой в общем случае систему составного типа. Ниже проведен анализ уравнений при наличии ненулевого столкновительного давления.

3. Характеристический анализ системы уравнений столкновительной газовой смеси

Для простоты рассмотрим изотермический случай. Основные уравнения можно представить в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(U) \frac{\partial U}{\partial x} = F,$$

$$A(U) = \left\{ \begin{array}{ccccc} u_1 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & m_2 & 0 \\ \frac{c_1^2}{\rho_1} & \frac{c_1^2}{m_1} & u_1 & 0 & 0 \\ \frac{c_1^2}{\rho_{22}m_1} & \frac{c_1^2 \rho_{11}}{\rho_{22}m_1} + \frac{d[Gm_2]}{dm_2} \frac{e_c}{m_2} & 0 & u_2 & G \\ 0 & 0 & 0 & \eta G e_c & u_2 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Здесь $U = \{\rho_1, m_2, u_1, u_2, e_c\}$ – вектор решения. Вектор F не содержит производных и определяется законами массообмена и силового взаимодействия фаз. Замыкающие соотношения модели: $p_1 = p_{1,0} + c_1^2(\rho_{11} - \rho_{11,0})$, где c_1 – замороженная скорость звука в газе.

Тип системы зависит от числа вещественных корней уравнения $\det\{A(U) - \lambda E\} = 0$ (E – единичная матрица). Определитель этой матрицы может быть представлен в виде

$$(u_2 - \lambda) \{ (u_2 - \lambda)^2 [(u_1 - \lambda)^2 - c_1^2] - (u_1 - \lambda)^2 [c_1^2 \varphi + c_2^2] + c_1^2 c_2^2 \},$$

где $\varphi = \rho_{11} m_2 / (\rho_{22} m_1)$, $c_2^2 = [G d(G m_2) / d m_2 + \eta G] e_c$ – скорость звука в изолированной гранулированной среде (замороженная скорость звука в фазе частиц) [23,24].

Бесстолкновительная модель. При $c_2 = 0$ условия гиперболичности определены в асимптотическом приближении ($\varphi \ll 1$) в [37,38]. Для конеч-

ных значений φ условия представлены в [39] и имеют вид $|u_1 - u_2| > c_1 \sqrt{1 + \varphi^{1/3}}$. При выполнении обратного неравенства система является системой составного типа.

Столкновительная модель. Как можно заметить, один из корней характеристического уравнения $\det\{A(U) - \lambda E\} = 0$ всегда вещественный: $\lambda = u_2$. Это означает, что областей эллиптичности не имеется, система либо гиперболична, либо составного типа. Остальные решения являются корнями уравнения

$$(\lambda - u_1)^2 (\lambda - u_2)^2 - (c_1^2 \varphi + c_2^2) (\lambda - u_1)^2 - c_1^2 (\lambda - u_2)^2 + c_1^2 c_2^2 = 0. \quad (3)$$

Гиперболизованная столкновительная модель. Одним из способов гиперболизации уравнений (1) модели [24] является исключение дифференциальных членов $p_1(\partial m_2 / \partial x)$ и $p_1(\partial m_2 u_2 / \partial x)$, что допустимо при малых градиентах концентраций и скоростей. Подобное приближение принималось в [9] при моделировании детонационных течений в гранулированных материалах. При этом упрощении соответствующая уравнению (2) матрица $A(U)$ приобретает более простой вид

$$A(U) = \begin{Bmatrix} u_1 & 0 & \rho_1 & 0 & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & m_2 & 0 \\ \frac{c_1^2}{\rho_1} & \frac{c_1^2}{m_1} & u_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d[Gm_2]}{dm_2} \frac{e_c}{m_2} & 0 & u_2 & G \\ 0 & 0 & 0 & \eta G e_c & u_2 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Характеристическое уравнение отвечает случаю $\varphi = 0$, для которого при $c_2 > 0$ определяются пять различных собственных чисел: $\lambda_{1,2} = u_1 \pm c_1$, $\lambda_{3,4} = u_2 \pm c_2$, $\lambda_5 = u_2$. Таким образом, в данном приближении система является гиперболической.

Скоростное равновесие. Для общего случая системы (2) в случае локального (или глобального) скоростного равновесия $u_1 = u_2$ уравнение (3) сводится к следующему:

$$(\lambda - u)^4 - [c_1^2(1 + \varphi) + c_2^2](\lambda - u)^2 + c_1^2 c_2^2 = 0. \quad (5)$$

Можно показать, что дискриминант уравнения (5) всегда больше нуля

$D = [c_1^2(1+\varphi) + c_2^2]^2 - 4c_1^2c_2^2 = [c_1^2 - c_2^2]^2 + (2\varphi + \varphi^2)c_1^4 + 2\varphi c_1^2c_2^2 > 0$. Таким образом, в точках $u_1 = u_2$ система (1) гиперболична как в бесстолкновительной динамике ($c_2=0$), так и в столкновительной ($c_2>0$) без учета объема ($\varphi=0$) и при учете ($\varphi>0$).

Общий случай столкновительной модели $c_2 \neq 0, u_1 \neq u_2$. Введем новую переменную: $\omega = \lambda - 0.5(u_1 + u_2)$ и обозначим $\Delta = 0.5(u_1 - u_2)$. В этих переменных уравнение (3) имеет вид

$$[(\omega - \Delta)^2 - c_1^2][(\omega + \Delta)^2 - c_2^2] = c_1^2\varphi(\omega - \Delta)^2. \quad (6)$$

Проанализируем уравнение (6). Обозначим $g_- = [(\omega - \Delta)^2 - c_1^2] \times [(\omega + \Delta)^2 - c_2^2]$, $g_+(\omega) = c_1^2\varphi(\omega - \Delta)^2$. В левой части уравнения полином 4-й степени, в правой – второй, т.е. на плюс-минус бесконечности функция слева всегда больше функции справа. Полином слева $g_-(\omega)$ пересекает ось абсцисс в четырех точках: $\omega = \Delta - c_1, \omega = \Delta + c_1, \omega = -\Delta - c_2, \omega = -\Delta + c_2$. Полином справа $g_+(\omega)$ касается оси абсцисс в точке $\omega = \Delta$.

Рассмотрим четыре области течения по относительной скорости фаз: сверхзвуковую $|u_1 - u_2| > c_1, |u_1 - u_2| > c_2$ (А), дозвуковую $|u_1 - u_2| < c_1, |u_1 - u_2| < c_2$ (В) и две межзвуковых: $c_1 < |u_1 - u_2| < c_2$ (С) и $c_2 < |u_1 - u_2| < c_1$ (D).

Область А. Характерное поведение функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ в сверхзвуковой области $|u_1 - u_2| > c_1, |u_1 - u_2| > c_2$ показано на рис.1. Функция $g_+(\omega)$ всегда положительна, касается оси в точке $\omega = \Delta$ и растет при $\omega \rightarrow \pm\infty$ как ω^2 . Функция $g_-(\omega)$ при $\omega \rightarrow \pm\infty$ растет как ω^4 , а в точках при $\omega = \pm\Delta$ она отрицательна. Таким образом, вне интервала $(-\Delta, +\Delta)$ всегда имеется две точки пересечения этих функций. Еще две точки пересечения существуют при условии $g_+(\omega^*) > g_-(\omega^*)$, где ω^* – некоторая точка внутри указанного интервала. Необходимое и достаточное условие получается при ω^* , определяемой из условия касания кривых, т.е. удовлетворяющей условиям $g_+(\omega^*) = g_-(\omega^*), g_+'(\omega^*) = g_-'(\omega^*)$. Близким к этому достаточным условием является $g_-(0) > g_+(0)$, т.е. $[\Delta^2 - c_1^2][\Delta^2 - c_2^2] > c_1^2\varphi\Delta^2$

$$c_1^2c_2^2 / 4\Delta^2 < c_1^2\varphi + c_2^2, c_1^2c_2^2 / 4\Delta^2 < c_1^2 \text{ или}$$

$$|u_1 - u_2| > c_2, |u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{\varphi c_1^2 / c_2^2 + 1}}. \quad (7)$$

При $c_2 = 0$ неравенства (7) выполняются во всей области (при $u_1 = u_2$ имеет место равенство, этот случай рассмотрен выше). При $|u_1 - u_2| > c_1$ второе условие (7) заведомо выполняется, если $\varphi \ll c_2^2 / c_1^2$, то второе условие приближается к $|u_1 - u_2| > c_1$.

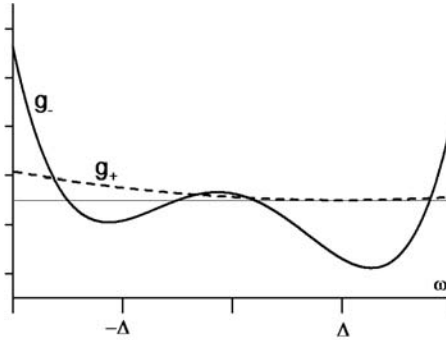


Рис.1. Характерное поведение функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ при $|u_1 - u_2| > c_1$, $|u_1 - u_2| > c_2$.

Кроме того, на участке $|\omega| < \Delta$ должны быть две точки пересечения функций g_- и g_+ . Так как на концах интервала $g_+ > g_-$, то это условие эквивалентно тому, что минимум функции g_+ меньше минимума функции g_- (который равен $1 + c_1^2 c_2^2 / \Delta^4$). Точка минимума определяется из условия

$$\frac{dg_+}{d\omega} = -\frac{2(c_1^2 \varphi + c_2^2)}{(\omega + \Delta)^3} - \frac{2c_1^2}{(\omega - \Delta)^3} = 0, \text{ что дает}$$

$$\omega_* = -\Delta \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad \sigma = (\varphi + c_2^2 / c_1^2)^{1/3}, \quad \min g_+ = \frac{(\sigma + 1)^3 c_1^2}{4\Delta^2}.$$

Условие $\min g_+ < \min g_-$ приводит к

$$4\Delta^4 - \Delta^2(\sigma + 1)^3 c_1^2 + 4c_1^2 c_2^2 > 0. \quad (8)$$

Покажем, что дискриминант этого уравнения всегда положителен.

$$D = (\sigma + 1)^6 c_1^4 - 64c_1^2 c_2^2 = c_1^4 [(\sigma + 1)^3 - 8c_2 / c_1][(\sigma + 1)^3 + 8c_2 / c_1] > 0.$$

Знак дискриминанта определяется знаком множителя $D = (\sigma + 1)^3 - 8(\sigma - \varphi)^{3/2}$, что, в свою очередь, определяется знаком величины $D^* = \sigma + 1 - 2(\sigma - \varphi)^{1/2}$, т.к. $\sigma - \varphi > 0$. Поскольку всегда справедливо $\sigma^2 - 2\sigma + 1 > -4\varphi$ при $\varphi > 0$, то $D^* = \sigma + 1 - 2(\sigma - \varphi)^{1/2} > 0$. Таким образом, неравенство (8) будет вы-

полняться при $\Delta^2 < 0.125[(\sigma+1)^3 c_1^2 - \sqrt{D}]$ или $\Delta^2 > 0.125[(\sigma+1)^3 c_1^2 + \sqrt{D}]$, что эквивалентно

$$|u_1 - u_2| < \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 - \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}} \quad \text{либо}$$

$$|u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 + \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}} .$$

При этом должны также выполняться условия (7). Таким образом, одна из областей гиперболичности определяются одновременным выполнением условий

$$|u_1 - u_2| > c_2, \quad |u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{\varphi c_1^2 / c_2^2 + 1}} \quad \text{и}$$

$$\text{либо } |u_1 - u_2| < \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 - \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}}, \quad (9)$$

$$\text{либо } |u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 + \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}}, \quad \sigma = (\varphi + c_2^2 / c_1^2)^{1/3} .$$

Заметим, что при $c_2 = 0$ (отсутствии столкновений) условия трансформируются в $|u_1 - u_2| > c_1(\sigma+1)^{3/2}$, где $\sigma = \varphi^{1/3}$, т.е. $|u_1 - u_2|^2 > c_1^2(1 + \varphi^{1/3})^3$, что совпадает с условием гиперболичности, полученным в [39]. Близкое к этому условие имеет место также при $c_2 / c_1 \ll \sqrt{\varphi}$, когда $\sigma \approx \varphi^{1/3}$.

Если выполняется обратное неравенство $\sqrt{\varphi} \ll c_2 / c_1 \ll 1$, то $\sigma \approx c_2^{2/3} / c_1^{2/3} \ll 1$, тогда условие $|u_1 - u_2| > c_2 / \sigma^{3/2}$ принимает вид $|u_1 - u_2| > c_1$ и совместимо только с условием

$$|u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 + \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}},$$

которое также близко к $|u_1 - u_2| > c_1$.

Для конечных c_2 / c_1 и малых φ можно положить $\sqrt{\varphi} \ll c_2 / c_1$, $\sigma \approx c_2^{2/3} / c_1^{2/3}$. В этом случае одна из областей гиперболичности (сверхзвуковая) определяется асимптотическим по φ условием

$$|u_1 - u_2| > \max\{c_1, c_2, c_1\chi\}, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma+1)^3 + \sqrt{(\sigma+1)^6 - (8c_2/c_1)^2}} . \quad (10)$$

Заметим, что $\chi < (\sigma+1)^{3/2}$, т.е. для умеренных значений $c_2 \leq c_1$ условие

(10) является более мягким, чем $|u_1 - u_2| > c_1(\sigma + 1)^{3/2}$ при отсутствии столкновений.

Таким образом, с введением дополнительного давления в дискретной фазе «сверхзвуковая» область гиперболичности расширяется.

Область В. Рассмотрим случай $|u_1 - u_2| < c_1$, $|u_1 - u_2| < c_2$. На рис.2 показано характерное распределение функций $g_-(\omega)$ (сплошная линия) и $g_+(\omega)$ (штриховая линия), тонкая линия – нуль. Две крайних точки пересечения функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ обусловлены их разными асимптотиками, а также тем, что $g_-(\omega)$ пересекает нулевую линию в 4-х точках. Две средние точки обусловлены тем, что значение функции $g_-(\omega)$ в точке $\omega = \Delta$ $g_-(\omega) = c_1^2[c_2^2 - 4\Delta^2]$ при $|u_1 - u_2| < c_2$ всегда больше нуля.

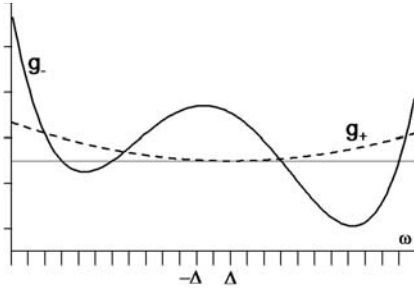


Рис.2. Характерное поведение функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ при $|u_1 - u_2| < c_1$, $|u_1 - u_2| < c_2$.

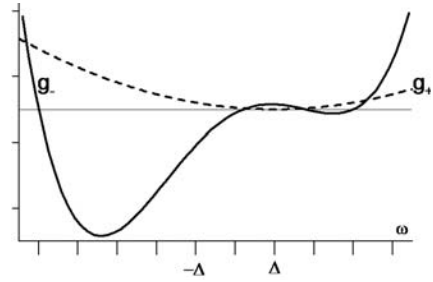


Рис.3. Характерное поведение функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ при $c_1 < |u_1 - u_2| < c_2$.

Область С. В случае $c_1 < |u_1 - u_2| < c_2$ нетрудно убедиться, что, кроме крайних точек пересечения, обусловленных асимптотиками, всегда есть две промежуточные точки пересечения (рис.3). Здесь в точке $\omega = \Delta$ функция $g_-(\omega) = c_1^2[c_2^2 - 4\Delta^2]$ всегда больше нуля, т.к. $|u_1 - u_2| < c_2$, как и в случае В. Таким образом, объединяя случаи В и С, можно утверждать, что при $|u_1 - u_2| < c_2$ система всегда гиперболична. Это существенно отличает данную модель от бесстолкновительной динамики, где в дозвуковых областях при $|u_1 - u_2| < c_1$ уравнения всегда являются системой составного типа.

Область D. Наконец, при $c_2 < |u_1 - u_2| < c_1$ две промежуточные точки пересечения функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ существуют только при достаточно малых значениях параметра φ . Характерное поведение функций показано на рис.4. Точная граница определяется из условия касания кривых $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ в окрестности точки локального максимума функции $g_-(\omega)$ (условие

в квадратурах имеет очень громоздкий вид). Приближенным достаточным условием является $g_+(\omega) > g_-(\omega)$ при $\omega = -\Delta$, что приводит к простому неравенству $|u_1 - u_2| < c_1 c_2 / \sqrt{\varphi c_1^2 + c_2^2}$. Таким образом, при $c_2 < |u_1 - u_2| < c_1 / \sqrt{\varphi c_1^2 / c_2^2 + 1}$ система также гиперболична (область ненулевая при условии $\varphi < 1 - c_2^2 / c_1^2$).

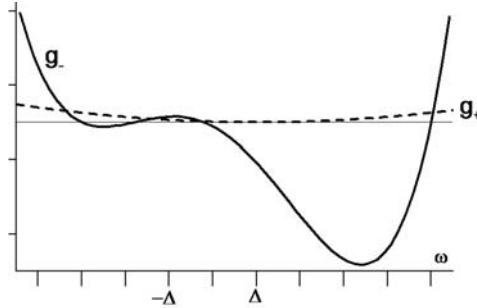


Рис.4. Характерное поведение функций $g_-(\omega)$ и $g_+(\omega)$ при $c_2 < |u_1 - u_2| < c_1$.

Таким образом, суммируя вышесказанное, области гиперболичности системы определяются следующим образом. В сверхзвуковой области относительного движения частиц $|u_1 - u_2| > c_2$ достаточным условием является одновременное выполнение двух неравенств: $|u_1 - u_2| > c_2 / \sigma^{3/2}$, где $\sigma = (\varphi + c_2^2 / c_1^2)^{1/3}$, и либо

$$|u_1 - u_2| < \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma + 1)^3 - \sqrt{(\sigma + 1)^6 - (8c_2 / c_1)^2}},$$

либо $|u_1 - u_2| > \frac{c_1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma + 1)^3 + \sqrt{(\sigma + 1)^6 - (8c_2 / c_1)^2}}$.

В дозвуковых и промежуточных областях достаточное условие:

$$|u_1 - u_2| < c_2 \text{ либо } c_2 < |u_1 - u_2| < \frac{c_1}{\sqrt{\varphi c_1^2 / c_2^2 + 1}}.$$

Полученные условия свидетельствуют о том, что с введением дополнительного давления столкновений и наличия обусловленной им ненулевой скорости звука в дискретной фазе область гиперболичности системы, в сравнении с уравнениями бесстолкновительной смеси, существенно расширилась. Областей эллиптичности, как и в бесстолкновительной смеси, здесь не имеется, а вне зон гиперболичности система является системой составно-

го типа. Как известно (и также показано в [39]), рассмотрение полной (неизотермической) модели не вносит дополнительных условий негиперболичности (т.к. уравнение для температуры может быть записано вдоль уже известной характеристики). Поэтому полученные в работе выводы распространяются и на полную систему уравнений с учетом теплообмена фаз.

4. Моделирование ударно-волновых структур в столкновительных газовзвесах

Сравнение решений, отвечающих полной модели составного типа (1), и решений приближенной гиперболизованной модели, полученной исключением из уравнений (1) дифференциальных членов $p_1(\partial t_2 / \partial x)$ и $p_1(\partial t_2 u_2 / \partial x)$, будет проводиться на основе численного моделирования распространения ударных волн.

Физическая постановка задачи и метод решения. Рассматривалось взаимодействие плоской ударной волны с облаком газовзвеси в одномерной постановке, как и в [29]. В зависимости от параметров среды и амплитуды инициирующей УВ в облаке столкновительной газовзвеси могут формироваться различные типы волн. Теоретически в среде с двумя давлениями возможны следующие комбинации ударных волн: однофронтовые структуры с лидирующим скачком в одной из фаз и последующей зоной релаксации и двухфронтовые структуры с лидирующим скачком в одной из фаз и вторичным скачком параметров другой фазы в зоне релаксации. Подобные однофронтовые и двухфронтовые структуры наряду с дисперсионными волнами описаны для упрощенных моделей (с постоянными значениями скорости звука в каждой фазе) в [40-41].

Для численного решения использовался метод, развитый для расчетов детонационных процессов в слабозапыленных взвесах и основанный на применении схемы Хартена класса TVD для газовой фазы и схемы Джентри-Мартина-Дейли для частиц [33]. Дополнительные недивергентные члены аппроксимировались следующим образом: значения p_1 брались в центральной точке, а производные $\partial t_2 u_2 / \partial x$ и $\partial t_2 / \partial x$ аппроксимировались соответственно шаблону схемы Джентри-Мартина-Дэйли.

Свойства сходимости численного алгоритма для решения уравнений (1), т.е. полной модели составного типа, продемонстрированы на рис.5 как решения на последовательности вложенных сеток. Также на рис.6 показаны решения на несколько последовательных моментов времени, свидетельствующие об устойчивом стационарном распространении ударно-волновой структуры. Приведены данные для взвеси частиц 10 мкм при начальной

плотности облака $\rho_{20} = 10.8 \text{ кг/м}^3$, начальной энергии хаотического движения частиц $e_{c0} = 0.005 \text{ м}^2/\text{мс}^2$ и отсутствии ее диссипации $I_0 = 0$ и амплитуде инициирующей УВ с числом Маха $M=3$. При этих параметрах в облаке устанавливается двухфронтная структура с лидирующим скачком в газе. Можно заметить пик параметров частиц малой амплитуды в хвостовой части столкновительного скачка (профили скоростей, рис.5а), который не связан с наличием дополнительных членов в уравнении, нарушающих их гиперболичность, т.к. аналогичное поведение наблюдается и в расчетах по гиперболизованной модели. По-видимому, это некоторый схемный эффект, обусловленный применением аппроксимаций Джентри-Мартина-Дэйли к разрывным решениям. На профилях температур (рис.5б) можно видеть, что вторичный скачок сопровождается изломом в распределении температуры газа, но температура частиц при этом непрерывна и меняется гладким образом.

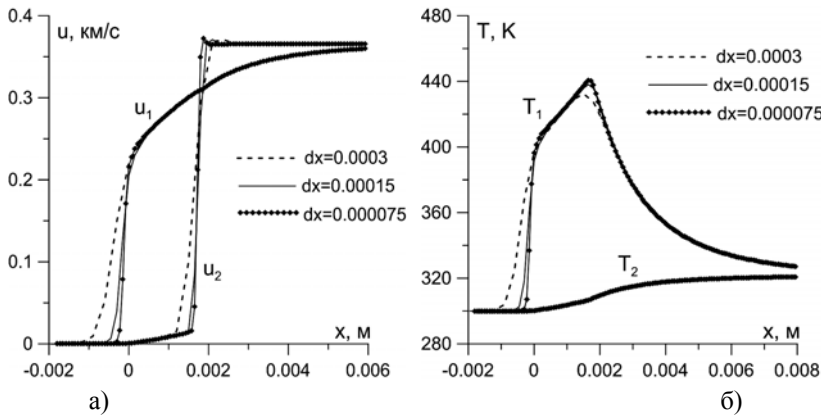


Рис.5. Сравнение решений на последовательности вложенных сеток.

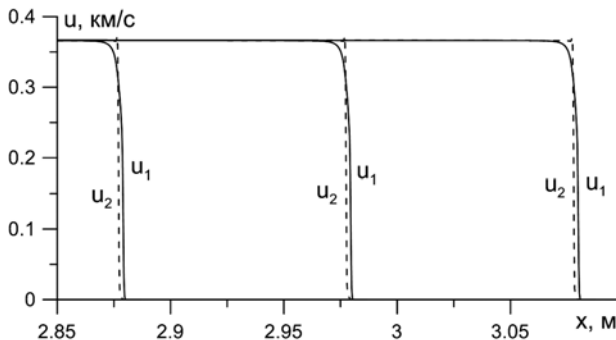


Рис.6. Устойчивое распространение ударно-волновой структуры.

Скорость распространения установившейся структуры на сетках с шагом 0.0003 м, 0.00015 м и 0.000075 м определяется соответственно 502.5 м/с, 501.7 м/с и 501.3 м/с. Также из рис.5 видно, что с уменьшением шага

сетки решения сближаются, фронты становятся все более резкими. При шаге $dx = 0.000075$ м на фронт приходится примерно 3–4 узла. Расчеты распространения ударно-волновых структур не выявили свойств неустойчивости решений полной модели составного типа (рис.6).

Результаты расчетов распространения волн различного типа. Сравнение численных результатов для полной и гиперболизованной моделей проводилась для взвеси частиц алюминия диаметром 10 мкм, шаг сетки принимался 0.0001 м.

Дисперсионные волны реализуются при малых значениях амплитуды падающей волны и достаточно низких значениях плотности облака частиц (в [29] не анализировались). Структура дисперсионной волны характеризуется плавным изменением параметров каждой из фаз от одного (начального) до другого (конечного) равновесных состояний. На рис.5а приведен пример стационарной дисперсионной волны в газозвеси частиц диаметром 10 мкм начальной плотности $\rho_{20} = 10.8 \text{ кг/м}^3$ и скорости УВ в облаке $D = 230$ м/сек. Здесь и далее сплошные и штриховые линии относятся к расчетам по полной и гиперболизованной модели соответственно.

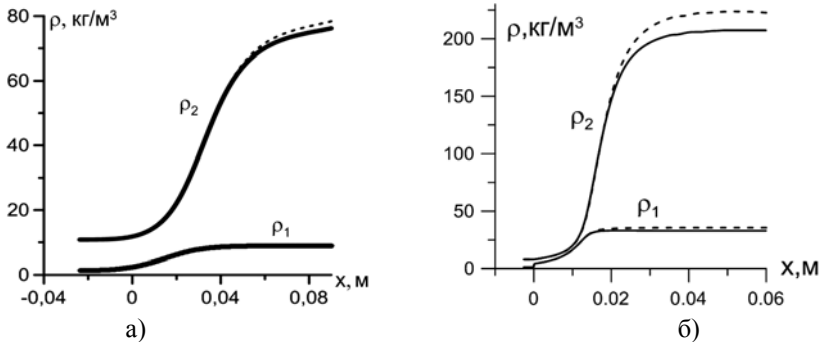


Рис.7. Профили плотностей фаз в дисперсионной волне (а) и волне со скачком в газе (б).

Ударные волны со скачком в газе формируются при вхождении в облако достаточно сильной УВ (рис.7б, $\rho_{20} = 8.1 \text{ кг/м}^3$, $D = 845$ м/сек). Расчеты в рамках обеих моделей показали заметные расхождения при значениях плотности частиц более 100 кг/м^3 (рис.7б).

Ударные волны с лидирующим скачком в дискретной фазе и непрерывным распределением параметров газа описаны в [29]. Амплитуды скачка определяется параметрами столкновительной динамики частиц, в зоне релаксации меняются только параметры газа и температура (тепловая характеристика) фазы частиц. Расчеты по двум моделям показали практически идентичные результаты, что видно из сравнения сплошных и штрихо-

вых линий на рис.8 ($\rho_{20} = 24.3 \text{ кг/м}^3$, $e_{c0} = 0$, $D = 1.17 \text{ км/сек}$).

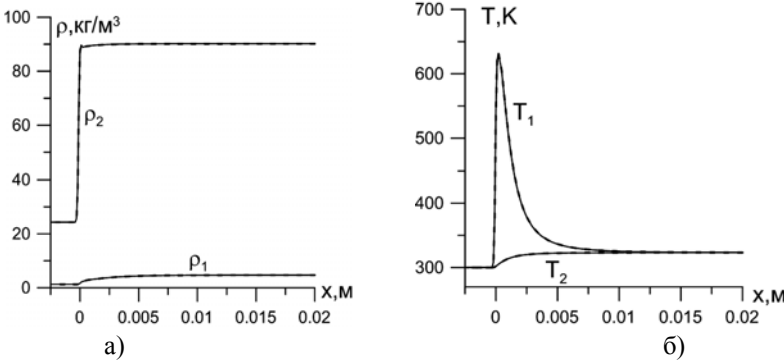


Рис.8. Однофронтная структура с лидирующим скачком в дискретной фазе.

Ударные волны с лидирующим скачком в газе и вторичным скачком в дискретной фазе могут формироваться как промежуточные структуры при переходе к однофронтным структурам второго типа, а также как стационарные структуры в очень узкой области значений параметров. Пример такой структуры показан на рис.9а ($\rho_{20} = 27 \text{ кг/м}^3$, $e_{c0} = 0$, $D = 513 \text{ м/сек}$). Здесь, так же, как и для однофронтных структур первого типа, расчеты по двум моделям показали значительное расхождение в определении ρ_2 .

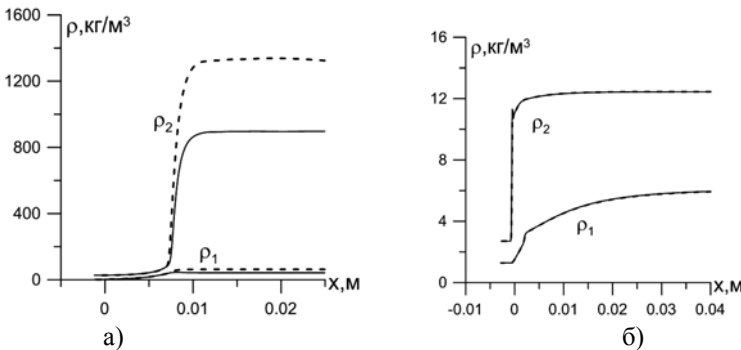


Рис.9. Двухфронтные структуры с лидирующим скачком в газе (а) и в дискретной фазе (б).

Пример ударной волны с лидирующим скачком в дискретной фазе и вторичным скачком в газе представлен на рис.9б ($\rho_{20} = 2.7 \text{ кг/м}^3$, $e_{c0} = 0.005 \text{ м}^2/\text{мс}^2$, $D = 1.26 \text{ км/сек}$). Внутренний скачок в газовой фазе характеризуется разрывом как плотности и скорости, так и температуры газа. Температура частиц во всех случаях меняется непрерывным образом. Как видно, сплошные и штриховые линии на рис.8 и рис.9б сливаются, то есть для этих типов волн две модели дают идентичные результаты.

В целом, учитывая расхождения численных решений для волн первого

типа (рис.7б и рис.9а), приближенная гиперболичная модель может быть применима лишь к очень ограниченному классу течений либо слабозапыленной среды, либо для моделирования волн второго типа с лидирующим скачком в дискретной фазе. Последние реализуются в средах с высоким уровнем пульсационного движения частиц при условиях очень малой диссипации столкновительных характеристик, т.е. почти идеальных столкновениях крупных частиц, что редко реализуется физически. Таким образом, учитывая, что численные расчеты в рамках полной модели составного типа продемонстрировали свойства устойчивости и сходимости решений, ее упрощение с целью гиперболизации для решения данного класса задач не представляется целесообразным.

5. Заключение

В работе проведен анализ модели, описывающей ударно-волновые процессы в газозвесах твердых частиц с учетом влияния объема частиц и их столкновительной динамики.

На основе характеристического анализа определяющей системы уравнений получены достаточные условия гиперболичности. Показано, что наличие давления, генерируемого столкновениями частиц, и ненулевой скорости звука в дискретной фазе приводит к значительному расширению области гиперболичности системы, в сравнении с уравнениями бесстолкновительной среды. Области эллиптичности отсутствуют. Вне зон гиперболичности система является системой составного типа.

Методами численного моделирования одномерных нестационарных течений с применением схемы TVD и Джентри-Мартина-Дэйли исследовано формирование и распространение ударно-волновых структур различного типа. Продемонстрированы свойства сходимости решений системы составного типа и устойчивого распространения ударно-волновых структур.

Проведено сравнение результатов, определенных в рамках полной и приближенной гиперболизованной моделей. Установлено, что модели дают идентичные результаты для дисперсионных волн и однофронтных и двухфронтных структур с лидирующим скачком в дискретной фазе. Для ударно-волновых структур с лидирующим скачком в газе при увеличении плотности до значений порядка 100 кг/м^3 расхождения по двум моделям значительны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Х.А. Рахматулин*. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых

- сред // ПММ, 1956, т.20, №2, с.184-195;
Kh.A. Rakhatulin. Osnovy gasodinamiki vzaimopronikaiushchikh dvizhenii szhimaemykh sred // PMM, 1956, t.20, №2, s.184-195.
2. *P.I. Nigmatulin. Dinamika mnogofaznykh sred. Ch.1. – M.: Nauka, 1987, 464 s.;*
R.I. Nigmatulin. Dinamika mnogofaznykh sred. Ch.1. – M.: Nauka, 1987, 464 s.
 3. *V.N. Nikolaevskii. Gidrodinamicheskiy analiz udarnykh adiabat heterogennykh smesey veshchestv // PMTF, 1969, № 3, с. 82-88;*
V.N. Nikolaevskii. Hydrodynamic analysis of shock adiabats of heterogeneous mixtures of substances // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1969, №3, p.407-411.
 4. *H.N. Яненко, P.I. Солоухин, A.H. Папырин, В.М. Фомин. Сверхзвуковые двухфазные течения в условиях скоростной неравновесности частиц. – Н.: Наука, 1980, 160 с.;*
N.N. Ianenko, R.I. Soloukhin, A.N. Papyrin, V.M. Fomin. Sverkhzvukovye dvukhfaznye techeniia v usloviiakh skorostnoi neravnovesnosti chastits. – N.: Nauka, 1980, 160 s.
 5. *A.E. Медведев, A.B. Федоров, В.М. Фомин. Описание воспламенения и горения смесей газа и твердых частиц методами механики сплошной среды // ФГВ, 1984, т.20, №2, с.3-9,*
A.E. Medvedev, A.V. Fedorov, V.M. Fomin. Description of ignition and combustion of gas mixtures with solid particles by methods of the mechanics of continuous media // Combustion, Explosion and Shock Waves, 1984, v.20, p.127-133.
 6. *M.R. Baer, J.W. Nunziato. A two-phase mixture theory for the deflagration to detonation transition (DDT) in reactive granular materials// Int. Journal of Multiphase flow, 1986, v.12, p.861-889.*
 7. *A.B. Федоров. Математическое описание течения смеси конденсированных материалов при высоких давлениях // В сб.: «Физическая газодинамика реагирующих сред». – Новосибирск: Наука, 1990, с.119-128.*
A.V. Fedorov. Matematicheskoe opisaniye techeniia smesi kondensirovannykh materialov pri vysokikh davleniiah // V sb.: «Fizicheskaiya gazodinamika reagiruiushchikh sred». – Novosibirsk: Nauka, 1990, s.119-128.
 8. *J.M. Powers, D.S. Stewart, H. Krier. Theory of two-phase detonation – Part I: Modelling // Combustion and Flame, 1990, v.80, p.264-279.*
 9. *K.A. Gonthier, J.M. Powers. A numerical investigation of transient detonation in granulated material // Shock Waves, 1996, v.6, p.183-195.*
 10. *S. Xu, D.S. Stewart. Deflagration-to-detonation transition in porous energetic materials: A comparative model study // Journal of Engineering Mathematics, 1997, v.31, p.143-172.*
 11. *J.B. Dzil, R. Menikoff, S.F. Son, A.K. Kapila, D.S. Stewart. Two-phase modeling of DDT in granular materials: A critical examination of modeling issues // Physics of Fluids, 1999, №11, p.378-402.*
 12. *A.B. Федоров. Структура ударной волны в смеси двух твердых тел (гидродинамическое приближение) // Моделирование в механике, 1991, т.5 (22), №4, с.135-158;*
A.V. Fedorov. Struktura udarnoi volny v smesi dvukh tverdykh tel // Modelirovanie v mekhanike, 1991, t.5 (22), №4, s.135-158.
 13. *E.B. Варламов, A.B. Федоров. Бегущая волна в неизотермической смеси твердых тел // Моделирование в механике, 1991, т.5 (22), №3, с.14-26;*
E.V. Varlamov, A.V. Fedorov. Begushchaia volna v neizotermicheskoi smesi tverdykh tel // Modelirovanie v mekhanike, 1991, t.5 (22), №3, s.14-26.

14. *А.В. Федоров, Н.Н. Федорова.* Структура, распространение и отражение ударных волн в смеси твердых материалов (гидродинамическое приближение) // ПМТФ, 1992, т.33, №4, с.10-18;
A.V. Fedorov, N.N. Fedorova. Structure, propagation, and reflection of shock waves in a mixture of solids (the hydrodynamic approximation) // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1992, v.33, №4, p.487-494.
15. *А.В. Федоров, А.А. Жилин.* Структура ударной волны в двухскоростной смеси сжимаемых сред с двумя давлениями // ПМТФ, 1998, т.39, №2, с.10-19;
A.V. Fedorov, A.A. Zhilin. The shock-wave structure in a two-velocity mixture of compressible media with different pressures // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, v.39, №2, p.166-174.
16. *А.А. Жилин, А.В. Федоров.* Распространение ударных волн в двухфазной смеси с различными давлениями компонентов // ПМТФ, 1999, т.40, №1, с.55-63;
A.A. Zhilin, A.V. Fedorov. Propagation of shock waves in a two-phase mixture with different pressures of the components // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1999, v.40, №1, p.46-53.
17. *А.Г. Кутушев, Д.А. Рудаков.* Численное исследование параметров воздушных УВ при разлете расширяющегося слоя порошкообразной среды // ФГВ, 1992, т.28, №6, с.105-112.
A.G. Kutushev, D.A. Rudakov. Numerical investigation of the parameters of the air shocks associated with the expansion of a powder layer // Combustion, Explosion and Shock Waves, 1992, v. 28, N 6, p. 670-676.
18. *А.Г. Кутушев.* Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах. – Санкт-Петербург: Недра, 2003, 283 с.;
A.G. Kutushev. Matematicheskoe modelirovanie volnovykh protsessov v aerodispersnykh i poroshkoobraznykh sredakh. – Sankt-Peterburg: Nedra, 2003, 283 s.
19. *А.А. Губайдуллин, А. Британ, Д.Н. Дудко.* Air shock wave interaction with an obstacle covered by porous material // Shock Waves, 2003, v.13, p.41-48.
20. *М.А. Гольдштик.* Элементарная теория кипящего слоя // ПМТФ, 1972, №6, с.106-112.
M.A. Gol'dshtik. Elementary theory of the boiling layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1972, №6, p.851-856.
21. *М.А. Гольдштик, Б.Н. Козлов.* Элементарная теория концентрированных дисперсных систем // ПМТФ, 1973, №4, с.67-77;
M.A. Gol'dshtik, B.N. Kozlov. Elementary theory of concentrated dispersed systems // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1973, №4, p.851-856.
22. *А.В. Федоров.* Структура комбинированного разрыва в газозвесьях при наличии хаотического давления частиц // ПМТФ, 1992, №5, с.36-41;
A.V. Fedorov. Structure of a combination discontinuity in gas suspensions in the presence of random pressure from particles // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1992, N 5, p. 851-856.
23. *A.V. Fedorov, T.A. Khmel.* Description of Shock Wave Processes in Gas Suspensions Using the Molecular-Kinetic Collisional Model // Heat Transfer Research, 2012, v.43, №2, p.95-107.
24. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Описание динамических процессов в газозвесьях с привлечением молекулярно-кинетических подходов для учета межчастичных столкновений // ФГВ, 2014, т.38, №2, с.81-93;

- T.A. Khmel', A.V. Fedorov.* Description of dynamic processes in two-phase colliding media with the use of molecular-kinetic approaches // *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2014, v.38, №2, p.196-207.
25. *D. Gidaspow.* Multiphase Flow and Fluidization: Continuum and Kinetic Theory Descriptions. – Boston: Academic Press, 1994, 467 p.
26. *A. Goldshtein, M. Shapiro.* Mechanics of collisional motion of granular materials. Part I. General hydrodynamics equations // *J. Fluid Mechanics*, 1995, v.282, p.75-114.
27. *A. Goldshtein, M. Shapiro, C. Gutfinger.* Mechanics of collisional motion of granular materials. Part 3. Self-similar shock wave propagation // *J. Fluid Mechanics*, 1996, v.316, p.29-51.
28. *Б.Е. Гельфанд, С.П. Медведев, А.Н. Поленов, Е.И. Тимофеев, С.М. Фролов, С.А. Цыганов.* Измерение скорости малых возмущений в пористых средах насыпной плотности // *ПМТФ*, 1986, т.27, №1, с.141-144;
B.E. Gelfand, S.P. Medvedev, A.N. Polenov, E.I. Timofeev, S.M. Frolov, S.A. Tsyganov. Measurement of the velocity of weak disturbances of bulk density in porous media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1986, v.27, №5, p.127-130.
29. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Моделирование распространения ударных и детонационных волн в запыленных средах при учете межчастичных столкновений // *ФГВ*, 2014, т.50, №5, с.53-62;
T.A. Khmel', A.V. Fedorov. Modeling of propagation of shock and detonation waves in dusty media with allowance for particle collisions // *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2014, v.50, №5, p.196-207.
30. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Numerical simulation of dust dispersion using molecular-kinetic model for description of particle-to-particle collisions // *Journal of Loss Prevention in the Process Industries*, 2015, v.36, p.223–229.
31. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Роль межчастичных столкновений при взаимодействии ударной волны с плотным сферическим слоем газозвеси // *Физика горения и взрыва*, 2017, т.53, №4, с.84-92;
T.A. Khmel, A.V. Fedorov. Role of particle collisions in shock wave interaction with a dense spherical layer of a gas suspension // *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2017, v.53, №4, p.444-452.
32. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Численное исследование диспергирования шероховатого плотного слоя частиц под воздействием расходящейся ударной волны // *ФГВ*, 2017, т.53, №6, с.87-96;
T.A. Khmel, A.V. Fedorov. Numerical study of dispersion of a rough dense layer of particles under the action of an expanding shock wave // *Combustion, Explosion and Shock Waves*, 2017, v.53, №6, p.696-704.
33. *Т.А. Хмель, А.В. Федоров.* Численные технологии исследования гетерогенной детонации газозвесей // *Матем. моделирование*, 2006, т.18, №8, с.49-63;
T.A. Khmel, A.V. Fedorov. Chislennye tekhnologii issledovaniia geterogennoi detonatsii gazovzvesei // *Matem. Modelirovanie*, 2006, t.18, №8, s.49-63.
34. *В.Ф. Куропатенко.* Обмен импульсом и энергией в неравновесных многокомпонентных средах // *ПМТФ*, 2005, т.46, №1, с.7-15;
V.F. Kuropatenko. Momentum and energy exchange in nonequilibrium multicomponent media // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2005, v.46, №1, p.1-8.
35. *В.Ф. Куропатенко.* Мезомеханика однокомпонентных и многокомпонентных мате-

- риалов // Физическая мезомеханика, 2001, т. 4, № 3, с. 49-55;
V.F. Kuropatenko. Mezomekhanika odnokomponentnykh i mnogokomponentnykh materialov // Fizicheskaja mezomekhanika, 2001, v.4, №3, s.49-55.
36. *А.И. Ивандаев, А.Г. Кутушев, Д.А. Рудаков. Численное исследование метания слоя порошка сжатым газом // ФГВ, 1995, т.31, №4, с.63-70;*
A.I. Ivandaev, A.G. Kutushev, D.A. Rudakov. Numerical investigation of throwing a powder layer by a compressed gas // Combustion, Explosion and Shock Waves, 1995, v.31, №4, p.459-465.
37. *А.Н. Крайко, Л.Е. Стернин. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами // ПММ, 1965, т.29, №3, с.418-429;*
A.N. Kraiko, L.E. Sternin. Theory of flows of a two-velocity continuous medium containing solid or liquid particles // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965, v.29, №3, p.482-496.
38. *С.П. Киселев, Г.А. Руев, А.И. Трунев, В.М. Фомин, М.Ш. Шавалиев. Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. – Новосибирск: Наука, 1992, 261 с.;*
S.P. Kiselev, G.A. Ruev, A.I. Trunev, V.M. Fomin, M.Sh. Shavaliiev. Udarно-volnovye protsessy v dvukhkomponentnykh i dvukhfaznykh sredakh. – Novosibirsk: Nauka, 1992, 261 s.
39. *Ю.В. Казаков. Численное моделирование распространения волн разрежения и детонации в газовзвесах. – Новосибирск – Красноярск: Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук, 1989, 167 с.;*
Iu.V. Kazakov. Chislennoe modelirovanie rasprostraneniia voln razrezheniia i detonatsii v gazovzvesiakh. – Novosibirsk – Krasnoiarsk: Diss. na soiskanie uch. stepeni kand. fiz.-mat. nauk, 1989, 167 s.
40. *И.А. Бедарев, А.В. Федоров. Структура и устойчивость ударной волны в газовзвеси с двумя давлениями // Вычислительные технологии, 2015, т.20, №2, с.3-19;*
I.A. Bedarev, A.V. Fedorov. Struktura i ustoichivost udarnoi volny v gazovzvesi s dvumia davleniiami // Vychislitelnye tekhnologii, 2015, t.20, №2, s. 3-19.
41. *А.В. Федоров, И.А. Бедарев. Структура ударных волн в газовзвеси с хаотическим давлением частиц // Матем. Моделирование, 2017, т.29, № 6, с.3-20;*
A.V. Fedorov, I.A. Bedarev. The Shok-Wave Structure in a Gas-Mixture with Chaotic Pressure // Mathematical Models and Computer Simulations, 2018, v.10, №1, p.1-14.

Поступила в редакцию 19.02.18

После доработки 19.02.18

Принята к публикации 19.04.18