

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ МАССИВНЫХ ЧАСТИЦ В МЕТРИКЕ КРУСКАЛА

© 2019 г. *Н.Н. Фимин¹, Ю.Н. Орлов¹, В.М. Чечеткин^{1,2}*

¹ Федеральный исследовательский центр институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

² Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
oberon@kiam.ru (Н.Н. Фимин)

Работа подготовлена при поддержке Программы Президиума РАН №28 "Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей" (В.М. Чечеткин) и гранта РФФИ 16-02-00656-А (Н.Н. Фимин).

DOI: 10.1134/S0234087919030043

Рассматриваются свойства динамики отдельной массивной частицы и системы массивных частиц в метрике Крускала, являющейся максимальным аналитическим расширением метрики Гильберта гравитирующей точки в вакууме.

Ключевые слова: лагранжиан, метрика Крускала–Шекереса, максимальное аналитическое расширение, особенности динамики, гессиан.

ANALYTICAL INVESTIGATION OF MASSIVE PARTICLES DYNAMICS IN KRUSKAL METRIC

N.N. Fimin¹, Yu.N. Orlov¹, V.M. Chechetkin^{1,2}

¹ Keldysh Institute for Applied Mathematics of RAS

² Institute for Computer Aided Design of RAS

The properties of the dynamics of a single massive particle and a system of massive particles are considered in the Kruskal metric, which is the maximum analytic extension of the Hilbert metric to a gravitating point in a vacuum.

Key words: Lagrangian, Kruskal-Szekeres metric, maximal analytical extension, singularity of dynamics, Hessian.

1. Введение

В настоящее время в астрофизике черных дыр господствующей парадигмой является предположение о необходимости введения в рассмотрение "максимального аналитического расширения" Крускала–Шекереса [1,2]

пространства–времени, соответствующего метрике Гильберта точечной массы (распространенное в литературе наименование данной метрики как "метрики Шварцшильда" с исторической точки зрения не вполне правомерно; кроме того – и что более важно – динамика частиц ненулевой массы в пространстве–времени с метриками, введенными Гильбертом [5] и Шварцшильдом [6], существенно отличается). При этом многие авторы утверждают, что метрика Крускала обладает глубоким физическим содержанием, позволяющим выявить новые по сравнению с описанием в терминах стандартных (гипер)сферических координат реально существующие свойства метрики черной дыры (в частности, описать существование "белых дыр", мостов Эйнштейна–Розена и др.).

Авторам настоящей работы представляется, что, помимо дифференциально–геометрического подхода к исследованию следствий решений уравнений Эйнштейна, разумно развивать также динамический подход, который основан на исследовании эволюции рассматриваемой системы в фазовом пространстве – а также, возможно, на кокасательном расслоении 2-го и более высоких порядков над многообразием с римановой метрикой (следует отметить, что впервые подобная методика анализа динамики в искривленном пространстве–времени была предложена А.А. Власовым в [7]). Авторы полагают, что современная астрофизика при создании моделей объектов и явлений, в частности, связанных с общей теорией относительности (ОТО), должна существенно учитывать их динамические свойства и выявлять, соотносясь с таковыми, парадоксальные и неясные в интерпретации детали эволюции упомянутых моделей.

При этом методы математического моделирования играют, безусловно, ключевую роль, так как согласно общепринятому мнению в связи с существенной нелинейностью полевых уравнений аналитические оценки в ОТО возможны только для простейших модельных ситуаций. В действительности это не совсем так, даже более того – детальный анализ полуаналитических расчетов (в частности, выполненных методами компьютерной алгебры) в ряде случаев существенно необходим для выявления свойств астрофизических объектов, атрибуты которых должны описываться с привлечением методов теории относительности.

В настоящей работе проводится детальный анализ рассматриваемых параллельно метрик Гильберта и Крускала на предмет выявления критических несоответствий при наблюдении за эволюцией материальной точки и совокупности массивных тел в гравитационном поле черной дыры. Будет показано, что для данных двух метрик описание движения отдельной части-

цы и системы частиц отличаются за счет присутствия критических точек динамики (точек остановки, поворота), причем данные точки – в отличие от особенностей дифференциально–геометрического типа, связанных со структурой собственно метрических тензоров – имеют неустранимую природу. Таким образом, можно утверждать, что в некотором смысле рассматриваемые здесь метрики приводят к различным вариантам динамики частиц в гравитационном поле, и правомерность соответствующего выбора должна быть установлена путем анализа наблюдательных данных.

2. Преобразование пространства–времени Гильберта к форме Крускала

Метрика Гильберта в окрестности точечной массы M имеет вид (в единицах $G = c = 1$):

$$ds_H^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

$$d\Omega^2 \equiv (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Преобразование к новым координатам X, T по формулам

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \exp\left(\frac{r}{2M}\right) = X^2 - T^2, \quad \frac{t}{2M} = \ln \left| \frac{X+T}{X-T} \right|$$

дает метрику Крускала [8]

$$ds_K^2 = \Phi(X, T)(-dT^2 + dX^2) + r^2(X, T)d\Omega^2, \quad (2)$$

$$\Phi(X, T) \equiv \frac{32M^3}{r(X, T)} \exp\left(-\frac{r(X, T)}{2M}\right).$$

Данное преобразование неоднозначно, поскольку одним и тем же значениям координат (X, T) отвечают два набора функций от "исходных" (физически очевидных) координат (r, t) :

$$T = \pm \Xi(r, t) \left(\exp(t/(2M)) - 1 \right), \quad X = \pm \Xi(r, t) \left(\exp(t/(2M)) + 1 \right), \quad (3)$$

$$\Xi(r, t) \equiv \left(\frac{r \exp(r/(2M)) - 2M \exp(r/(2M))}{8M \exp(t/(2M))} \right)^{1/2}.$$

Функция $r(X, T)$ при дополнительном априорном требовании аналитичности на поверхностях $X = \pm T$ (т.е., в частности, при $r = 2M$) выражается через функцию Ламберта 0-го порядка: $r(X, T) = 2M + 2M \times W(0; (1/e) \cdot (X^2 - T^2))$. При отказе от этого требования функция $r(X, T)$ не

является вещественнозначной; следует учитывать, что условию $r > 0$ отвечает в новых координатах неравенство $X^2 - T^2 > -1$, а $W(0; \xi) \in \mathbb{R}^1$ только при $\xi \in (-1/e; +\infty)$. Для $X^2 - T^2 \in (-1, 0)$ (при $0 < r < 2M$) существует вторая вещественнозначная форма выражения $r = r(X, T)$ через функцию $W(-1; (1/e) \cdot (X^2 - T^2))$, однако она не может быть аналитически продолжена в область $r \geq 2M$.

Для исследования кинематических и динамических свойств движения частиц в поле метрики Крускала нам потребуется набор значений коэффициентов Кристоффеля данной метрики. Их вычисление может быть произведено, например, посредством использования формул Дингля [9] (приводятся только неаннулирующиеся тождественно коэффициенты, с учетом симметрии по нижним индексам):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{XW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, & \Gamma_{14}^1 &= \Gamma_{41}^1 = \frac{-TW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{XW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, & \Gamma_{14}^4 &= \Gamma_{41}^4 = \frac{-2XW^2(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)\sin^2\theta}, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}X(W(0, \eta) + 1)\sin^2\theta, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \frac{XW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \frac{XW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, & \Gamma_{24}^2 &= \Gamma_{42}^2 = \frac{-TW(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{44}^2 &= \frac{1}{8} \frac{(W(0, \eta) + 1)^3(T^2 - X^2)\sin 2\theta}{W(0, \eta)}, & \Gamma_{44}^4 &= \frac{2TW^2(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{13}^3 &= \Gamma_{31}^3 = \frac{-2XW(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, & \Gamma_{34}^3 &= \Gamma_{43}^3 = \frac{2TW(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{11}^4 &= \frac{4TW^2(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^5(T^2 - X^2)^2\sin^2\theta}, & \Gamma_{14}^4 &= \Gamma_{41}^4 = \frac{-2XW(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)}, \\ \Gamma_{22}^4 &= -\frac{4TW^2(0, \eta)(W(0, \eta) + 2)}{(W(0, \eta) + 1)^5(T^2 - X^2)^2\sin^2\theta}, & \Gamma_{24}^4 &= \Gamma_{42}^4 = \text{ctg } \theta, \\ \Gamma_{33}^4 &= \frac{-2TW^2(0, \eta)}{(W(0, \eta) + 1)^2(T^2 - X^2)\sin^2\theta}, & \Gamma_{33}^1 &= \frac{1}{2}X(W(0, \eta) + 1), \end{aligned}$$

где $\eta \equiv (1/e) \cdot (X^2 - T^2)$. Уравнения геодезических линий выписываются стандартным образом, однако специальный интерес они представляют в основном в окрестности биссектрис $X = \pm T$ на 2-мерном (X, T) -сечении общего пространства-времени с метрикой (2): их соответствующие решения могут быть использованы для постановки квазилокальных граничных условий вблизи горизонта событий при рассмотрении, в частности, задачи о динамике многочастичной системы в "физических" координатах $(\tilde{x}_a)|_{a=1,\dots,4} = (r, \theta, \varphi, t)$. Поскольку $\lim_{X \rightarrow T} W(0, \eta) / (X^2 - T^2) = 1/e$, то значения вышеприведенных коэффициентов Кристоффеля не являются особенными при $X \rightarrow \pm T$, и поэтому существуют C^2 -гладкие решения $X(T)$ дифференциальных уравнений 2-го порядка (геодезического движения) $(x^i)_{TT} + \Gamma_{bc}^i(x^b)_T(x^c)_T = 0$ (данная форма уравнений может быть обобщена на случай вырождения динамики, см. ниже). Решения $x^i(T)$ ($X(T), \theta(T), \varphi(T)$) в окрестностях биссектрис (X, T) -плоскости (при $X(T) \pm T \rightarrow 0$) по теореме о неявной функции позволяют ввести для пробной частицы понятие "псевдоскорости" (нетензорного вида) в этих окрестностях:

$$(Q^K)^2 = \Phi(X, T)X_T^2 + (r(X, T))^2(\theta_T^2 + \sin^2\theta \cdot \varphi_T^2), \quad (Q_0^K)^2 \equiv \lim_{X \rightarrow \pm T} (Q^K)^2.$$

При учете только одной X -компоненты получаем предел "радиальной" псевдоскорости $Q_0^K(\Omega_T = 0) = 4M \exp(-1/2)X_T|_{X \rightarrow \pm T}$. Выражение для псевдоускорения в крускаловских координатах введем аналогично гильбертовскому случаю:

$$G^K(\Omega_T = 0) \equiv \frac{dQ^K}{dT}(\Omega_T = 0) = \frac{4MTW(1/e \cdot (X^2 - T^2))^{3/2}(2 + W(1/e \cdot (X^2 - T^2)))}{(X^2 - T^2)^{1/2}(T^2 - X^2)(1 + W(1/e \cdot (X^2 - T^2)))^{5/2}} X_T + \sqrt{\Phi(X, T)} X_{TT}. \quad (4)$$

На горизонте в метрике Гильберта скорость $Q^H(\Omega_T = 0)$ и ускорение $G^H(\Omega_T = 0)$ аннулируются. Что происходит в метрике Крускала? Поскольку, как будет видно из дальнейшего, в определениях величин X_T и X_{TT} задействована (как независимая переменная) гильбертовская скорость, для единообразности представления необходимо получить искомые значения в терминах "старых" координат. Для этого, используя формулы перехода (3),

выразим квазирадиальную псевдоскорость частицы в метрике Крускала через радиальную скорость частицы в физических координатах dr/dt :

$$\frac{dX}{dT} = \frac{X_r dr + X_t dt}{T_r dr + T_t dt} = - \left(\exp\left(\frac{t+r}{2M}\right) (vr+r-2M) + \exp\left(\frac{r}{2M}\right) (vr-r+2M) \right) \times \\ \times \left(\exp\left(\frac{t+r}{2M}\right) (-vr-r+2M) + \exp\left(\frac{r}{2M}\right) (vr-r+2M) \right)^{-1}, \quad v \equiv \frac{dr}{dt}. \quad (5)$$

Очевидно, можно получить и обратное соотношение $v = v(X, T; X_T)$, выражая X_r, \dots, T_t через переменные X, T :

$$v = \frac{X_T T_t - X_t T}{X_r - X_T T_r} = \frac{W(1/e(X^2 - T^2))(T - XX_T)}{(W(1/e(X^2 - T^2)) + 1)(X_T T - X)}, \quad \lim_{X \rightarrow T} v(X, T; X_T) = 0.$$

"Формальная точка остановки" квазирадиального ($\Omega_T \equiv 0$) движения частицы в крускаловской системе координат характеризуется условием $Q^K \rightarrow 0$. Величина $\Phi \neq 0$ (всюду в интересной для анализа области); числитель выражения для X_T равен нулю при

$$r = r_s(v, t) \equiv 2M(\exp(t/[2M]) - 1) / (v + \exp(t/[2M]) + v \exp(t/[2M]) - 1).$$

При $v=0$ (остановка частицы в координатах Гильберта) получаем $r_s(0, t) = 2M$. Однако в этом случае в правой части выражения (5) возникает неопределенность типа $0/0$; ее регуляризация (по переменным r и v последовательно) дает $X_T \neq 0$ при $r > -2M$. То есть "остановка" в крускаловских координатах возможна только при $v \neq 0$!

Формальная сингуляризация ($X_T \rightarrow \infty$) происходит при

$$r = r_\infty = 2M(\exp(t/[2M]) + 1) / (-v + \exp(t/[2M]) + v \exp(t/[2M]) + 1).$$

При этом должно выполняться условие $v \neq 0$ (иначе мы вновь получаем вышеуказанную неопределенность). Определим значение X_T при $r \rightarrow 2M$ (горизонт событий Гильберта): $\lim_{X \rightarrow T} X_T = (\exp(t/[2M]) - 1) / (\exp(t/[2M]) + 1)$ ($\forall v$), откуда с учетом формулы перехода $t/(2M) = \ln((X+T)/(X-T))$ получаем, что $\lim_{X \rightarrow T} X_T = \lim_{X \rightarrow T} T/X = 1$; при этом, как легко можно видеть из (5) (приравнивая правую часть единице), имеем $v \rightarrow v_s = 1 - 2M/r \xrightarrow{r \rightarrow 2M} 0$ (что согласуется с известной асимптотикой $Q^H = (1 - 2M/r)^{-1/2} v \xrightarrow{r \rightarrow 2M} 0$). Скорость в координатах Крускала пол-

ностью самосогласованно определяется в (X, T) -координатах при условии фиксации скорости в координатах Гильберта (локальной – в конкретной точке пространства–времени, или при априорной известности поведения функции $v = v(r, t)$, причем в качестве "внутренних" координат, безусловно, может быть задействована произвольная система отсчета, не только гильбертовская). В принципе можно рассмотреть вопрос об экстремумах функции $X_T(r, t | v)$, для чего перейдем к следующему этапу анализа крускаловской динамики.

Весьма существенную роль в динамике частицы в окрестности горизонта должно играть значение псевдоускорения $G^K(\Omega_T = 0)$, представляющего комбинацию X_T и X_{TT} с функциональными множителями. Для детального выявления физических характеристик движения частиц в крускаловском пространстве–времени нам необходимо установить связь не только геометрических координат, но и динамических переменных в обоих сравниваемых здесь метриках. Поэтому рассмотрим свойства пары слагаемых в выражении (4) для G^K . Неизвестным до сих пор оставалось лишь поведение величины $X_{TT}(r, t | v)$. Приведем его явное значение:

$$\begin{aligned}
 X_{TT} = & (-e^{\frac{1}{2}\frac{3r-z}{M}} r^3 \sqrt{2v} + e^{\frac{1}{2}\frac{3r+z}{M}} r^3 \sqrt{2v} - 8ie^{\frac{1}{4}\frac{5r-z}{M}} M^{3/2} \sqrt{2M-r} r + \\
 & + 2ie^{\frac{1}{4}\frac{5r+z}{M}} v^2 \sqrt{2M-r} \sqrt{M} r^2 - 16ie^{\frac{1}{4}\frac{5r+z}{M}} v^2 M^{5/2} \sqrt{2M-r} + \\
 & + 8ie^{\frac{1}{4}\frac{5r+z}{M}} M^{5/2} \sqrt{2M-r} + 4e^{\frac{1}{2}\frac{3r+z}{M}} r \sqrt{2v} M^2 - 4e^{\frac{1}{2}\frac{3r+z}{M}} r^2 \times \\
 & \times \sqrt{2v} M - 8ie^{\frac{1}{4}\frac{5r+z}{M}} M^{3/2} \sqrt{2M-r} r + 2ie^{\frac{1}{4}\frac{5r-z}{M}} v^2 \sqrt{2M-r} \sqrt{M} r^2 - 4 \times \\
 & \times e^{\frac{1}{2}\frac{3r-z}{M}} r \sqrt{2v} M^2 + 4e^{\frac{1}{2}\frac{3r-z}{M}} r^2 \sqrt{2v} M + 2ie^{\frac{1}{4}\frac{5r-z}{M}} \sqrt{2M-r} \times \\
 & \times \sqrt{M} r^2 - 16ie^{\frac{1}{4}\frac{5r-z}{M}} v^2 M^{5/2} \sqrt{2M-r} + 8ie^{\frac{1}{4}\frac{5r-z}{M}} M^{5/2} \sqrt{2M-r} + \\
 & + 2ie^{\frac{1}{4}\frac{5r+z}{M}} \sqrt{2M-r} \sqrt{M} r^2) \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2}\frac{r-z}{M}} \times ((r-2M)(-ve^{\frac{1}{2}\frac{r+z}{M}} r + \\
 & + ve^{\frac{1}{2}\frac{r}{M}} r + 2e^{\frac{1}{2}\frac{r+z}{M}} M - e^{\frac{1}{2}\frac{r+z}{M}} r + 2e^{\frac{1}{2}\frac{r}{M}} M - e^{\frac{1}{2}\frac{r}{M}} r)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Простой анализ возможности аннуляции и наличия особенностей полученного выражения приводит к следующим заключениям: сингулярными точками (нулями знаменателя) являются

$$r = r_{\infty;1} = 2M, \quad r = r_{\infty;2} = \frac{2M(1 + \exp(t/[2M]))}{1 + \exp(t/[2M]) - v + v \exp(t/[2M])}$$

(при $v \rightarrow 0$ оба выражения совпадают); обращение в нуль числителя ускорения происходит при $r = r_{0;1} = 2M$. Однако непосредственный интерес представляет лишь анализ особых точек G^K , который дает следующее: $G^K(\Omega_T = 0) \rightarrow \infty$ при $r = 2\pi i M$, $G^K(\Omega_T = 0) \rightarrow 0$ при $r = r_{0;1} = 2M$ и $r = r_{0;2} = 2M \cdot \mathfrak{F}(X, T; t)$, где величина $\mathfrak{F}(X, T; t) \geq 0$ (явный вид не приводим из-за чрезмерной громоздкости) имеет сингулярности при $X = \pm T$ и $X = \pm e^{-2} \sqrt{T^2 e^4 - 2e^3}$. Отсюда можно в принципе получить экстремумы скорости радиального движения частицы.

Рассмотрим вопрос о динамике частиц, используя аппарат лагранжевой и гамильтоновой геометрии.

3. Лагранжев и гамильтонов формализм для движения частиц в метрике Крускала

Динамика частицы в лагранжевом формализме определяется вариацией действия с интегральным ядром, представляющим собой кинетический потенциал данной частицы в рассматриваемой метрике:

$$\delta S = \int (\partial L_K / \partial x^i - d(\partial L_K / \partial \dot{x}^i) / d\lambda) \delta x^i d\lambda.$$

Лагранжева плотность для частицы массы m в метрике Крускала имеет следующий вид:

$$L = L_K \equiv \sqrt{m\Phi(X, T)(-T_\lambda^2 + X_\lambda^2) + mr^2(X, T)(\theta_\lambda^2 + \sin^2\theta \cdot \varphi_\lambda^2)},$$

где нижний индекс λ означает дифференцирование по аффинному параметру. Выберем параметризацию вдоль геодезической посредством введения собственного времени частицы: $\tau \propto \lambda$ (согласно общему определению $ds^2 = g_{ab} x^a x^b = c^2 d\tau^2$, $(x^a)|_{a=1,4} = (X, \theta, \varphi, T)$), приведем существенные компоненты гессиана $\text{Hess}(L)_\tau = \partial^2 L / \partial x_\tau^a \partial x_\tau^b$:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial X_\tau \partial X_\tau} = -m^2 \Phi^2(X, T) (X_\tau)^2 L^{-3} + m\Phi(X, T) L^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial T_\tau \partial T_\tau} = -m^2 \Phi^2(X, T)(T_\tau)^2 L^{-3} - m\Phi(X, T)L^{-1},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x_\tau^b \partial x_\tau^b} \Big|_{b=2,3} = -m^2 r^4 \Psi_{b,1} L^{-3} + m r^2 \Psi_{b,2} L^{-1} \equiv f_{bb}(X, T; x_\tau^b) \Big|_{b=2,3},$$

$$\Psi_{2,1} = \theta_\tau^2, \quad \Psi_{2,2} = 1; \quad \Psi_{3,1} = \sin^4 \theta \cdot \varphi_\tau^2, \quad \Psi_{3,2} = \sin^2 \theta; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x_\tau^a \partial x_\tau^b} \Big|_{a \neq b} = 0.$$

В сопутствующей системе отсчета детерминант гессиана $\det \text{Hess}(L)$ определяется произведением его диагональных компонент, так что особенности динамики (при квазирадиальном движении, $\Omega_\tau \equiv 0$) частицы определяются возможностью обращения в нуль сомножителей (X_τ, f_{bb}, L) в правой части.

Если полагать $\lambda = T$ (или произвольной допустимой функцией переменной $\lambda = \lambda(T)$), то лагранжиан становится неавтономным, и уравнения Эйлера–Лагранжа принимают следующий вид:

$$2 \text{Hess}(L)_T \cdot \frac{d^2 x^j}{dT^2} = \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial x_T^i} x_T^j - \frac{\partial^2 L}{\partial T \partial x_T^i}, \quad \text{Hess}(L)_T \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial x_T^i \partial x_T^j}.$$

Левая часть выражения с ускорением заведомо не сингулярна только при $i = j$ (внедиагональные компоненты гессиана равны нулю). Однако, в соответствии с вышеизложенным, сомножитель при ускорении (при квазирадиальном движении) все же имеет особенности при $X_T = 0$ (при этом имеем сложную зависимость между $r, dr/dt, t$, приведенную в п.2) и $X_T = \pm 1 (= \pm T_T)$: динамика частицы при этом вырождается.

В наиболее общем случае необходимо выявить связь параметра λ /длины интервала s и времени T путем решения системы уравнений характеристик: при описании эволюции многочастичной системы существенна величина $ds_j/dT = c/V_j^4, V^4$ – "временная" компонента 4-скорости j -й частицы.

Переход к гамильтонову виду описания динамики может быть произведен формальным путем определения канонического псевдоимпульса и преобразования Лежандра для функции Гамильтона $H(\{x^a\}, \{P_a\})$ ("нестационарной", т.к. она зависит от $x^4 = T$):

$$P_a = \frac{\partial L_K}{\partial x_\tau^a}, \quad H(\{x^a\}, \{P_a\}) = P_a x_\tau^a(\{P_a\}) - L_K(\{x^a\}, x_\tau^a(\{P_a\})). \quad (6)$$

При данном преобразовании возникает новый тип особенности динамики, связанный с переходом к описанию на кокасательном расслоении над крускаловским многообразием, характер которой очевиден из следующего явного представления псевдоскорости через псевдоимпульс: $X_\tau = \pm P_1 \sqrt{(P_1^2 - m\Phi)\Phi(\Phi T_\tau^2 - r^2[\theta_\tau^2 + \sin^2\theta \cdot \varphi_\tau^2])}(m\Phi^2 - P_1^2\Phi)^{-1}$ (следующего из первой формулы (6)); аналогичные представления справедливы также для $a = 2, 4$. Канонические уравнения Гамильтона в исследуемом случае формально принимают следующий вид:

$$X_\tau = \frac{\partial H}{\partial P_1} = \frac{\pm P_1 \sqrt{r^2[\theta_\tau^2(P_a) + \sin^2\theta \cdot \varphi_\tau^2(P_a)] - \Phi T_\tau^2(P_a)}}{m\Phi^2 - P_1^2\Phi},$$

$$(P_1)_\tau = -\frac{\partial H}{\partial X} = (2(m\Phi - P_1^2)^{3/2} \sqrt{\Phi} \sqrt{-\Phi T_\tau^2(P_a) + r^2\Omega_\tau^2(P_a)})^{-1} \times$$

$$\times (m(-\Phi_X P_1^2 \Omega_\tau^2(P_a) r^2(X, T) + 2\Phi_X P_1^2 \Phi T_\tau^2(P_a) -$$

$$- m\Phi_X \Phi^2 T_\tau^2 - 2\Phi \Omega_\tau^2 r r_X P_1^2 + 2\Omega_\tau^2 r r_X m\Phi^2)),$$

и аналогично для $a = 2, 3, 4$.

Для расчетов эти уравнения целесообразно представить в 3-мерной форме (для пространственных компонент импульсов см. п.4).

Представляет интерес рассмотрение возможности в крускаловской системе координат рассмотреть "обращение" динамики $X_T \rightarrow -X_T$ при наличии внешней силы F_{ext} (дополнительное слагаемое в правой части (6)), действующей на частицу. В этом случае уравнение Эйлера–Лагранжа и уравнения Гамильтона допускают движения, в частности, из квадранта II в квадрант I (т.е. "из-под горизонта событий", не переходя в "белую дыру") без возникновения каких-либо парадоксальных проблем в динамике (в отличие от случая метрики Гильберта, в которой на горизонте происходит переход к нестационарной форме, и "радиальное" движение в подгоризонтной области физически возможно только "в направлении истинной сингулярности"). Интерпретация движения такого рода в гильбертовских координатах, очевидно, противоречит самой концепции "черной дыры".

4. Многочастичная динамика в метрике Крускала

Ситуация определенно усложняется, если мы переходим от одной частицы к системе N частиц. В этом случае необходимо учитывать, что движение каждой частицы происходит в своем собственном времени $\tau_{A=1, \dots, N}$,

причем реализация синхронизации собственных времен в общем случае не представляется возможной [11-13]. Поэтому для описания эволюции N -частичной системы необходимо либо решать мультивременную систему уравнений динамики (иначе: соответствующий набор кинетических уравнений для многовременных функций распределения), либо ограничиться выделенным "одновременным" описанием (например, по времени наблюдателя в ЛСО). Безусловно, последний подход требует специальной верификации, однако его можно принять в качестве априори возможного (т.е. в некотором смысле существенно огрубляя ситуацию с неизбежной потерей учета ряда нелинейных эффектов), опираясь на использование гидродинамического (одновременного по своей сути) приближения для релятивистских систем типа Экарта или Ландау–Лифшица [11]. При этом, помимо прочего, необходимо учитывать возможность возникновения особенностей в преобразованиях Лежандра, являющихся переходным этапом к гамильтонову описанию.

Рассмотрим движение системы N частиц массами m_A во внешнем гравитационном поле. Их динамику следует описывать исходя из принципа Гамильтона: $\delta \int_{t_1}^{t_2} L^{[N]} d\lambda = 0$, $L^{[N]} = \sum_A m_A (ds/d\lambda)_A$ – лагранжева плотность кинетического потенциала (лагранжиан) действия для N -частичной системы (ds_A – локальный элемент общерелятивистского интервала для A -й частицы).

Лагранжиан многочастичной системы для исследуемого в настоящей работе случая может быть записан в следующем виде:

$$\begin{aligned} L^{[N]}_K &= -\sum_A m_A c (g_{\alpha\beta}(x_A)^\alpha (x_A)_\lambda^\alpha)^{1/2} = \\ &= -\sum_A m_A c^2 (g_{00} + g_{ij} c^{-2} (x_A)_\lambda^i (x_A)_\lambda^j)^{1/2}, \end{aligned} \tag{7}$$

$$(x_A)_\lambda^k \equiv \frac{dx_A^k}{d\lambda} = v_A^k |_{\lambda=T}, \quad \alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3; \quad i, j, k, \dots = 1, 2, 3.$$

Определим 3-импульсы стандартным образом:

$$(P_A)_i = \frac{\partial L_K^{[N]}}{\partial (x_A)_T^i} = -\tilde{m}_A g_{ii} v_A^i, \quad \tilde{m}_A = m_A (g_{00} + g_{jj} c^{-2} (x_A)_T^j (x_A)_T^j)^{-1/2},$$

$$g_{00} = -\Phi(X, T), \quad g_{11} = \Phi(X, T), \quad g_{22} = r^2(X, T), \quad g_{33} = r^2(X, T) \sin^2 \theta.$$

Мы обращаемся к разделенному "пространственно–временному" описанию, поскольку компоненты 4-импульса любой частицы не являются неза-

висимыми: движение частицы m происходит на фазовой поверхности "массового гиперboloида" [14], что эквивалентно ограничению $g^{\alpha\beta}P_\alpha P_\beta = m^2 c^2$.

Обратимся к отысканию зависимости $v_A^i = v_A^i(\{P_k\})$. Из вышеприведенного определения 3-импульса имеем:

$$v_A^i((P_1)_A, (P_2)_A, (P_3)_A) = \pm \frac{(P_i)_A c}{g_{ii}} (-\Phi^2(X, T) r^4(X, T) \sin^2 \theta)^{1/2} \times \\ \times (-(P_3)_A^2 \Phi r^2 - (P_1)_A^2 r^4 \sin^2 \theta - (P_2)_A^2 \Phi r^2 \sin^2 \theta + m_A^4 c^2 \Phi r^4 \sin^2 \theta)^{-1/2}.$$

Введем посредством преобразования Лежандра функцию Гамильтона системы:

$$H^{[N]}_K \equiv \sum_A (H_A)_K = \sum_A (P_A)_i v_A^i - L^{[N]}_K, \\ (H_A)_K = \\ = \frac{-((P_3)_A^2 \Phi r^2 + (P_1)_A^2 r^4 \sin^2 \theta + (P_2)_A^2 \Phi r^2 \sin^2 \theta - m_A^3 c^2 \Phi r^4 \sin^2 \theta) c \sqrt{-\Phi}}{\sqrt{-(P_3)_A^2 \Phi r^2 - (P_1)_A^2 r^4 \sin^2 \theta - (P_2)_A^2 \Phi r^2 \sin^2 \theta + m_A^4 c^2 \Phi r^4 \sin^2 \theta} \sqrt{\Phi r^4 \sin^2 \theta}}.$$

Таким образом, выписывая канонические уравнения для парциальной гамильтоновой функции $(H_A)_K$ и вводя парциальную функцию распределения $f_A(x^i, P_i, T)$ (полная функция распределения $f(x^i, P_i, T) = \sum_A f_A(x^i, P_i, T)$,

$$\left. \frac{d}{dT} (x^i)_A = \frac{\partial (H_A)_K}{\partial (P_i)_A}, \quad \frac{d}{dT} (P_i)_A = -\frac{\partial (H_A)_K}{\partial (x^i)_A} \right\},$$

мы формируем скобку Пуассона $[(H_A)_K, f_A] \equiv (\partial (H_A)_K / \partial (P_i)_A) (\partial f_A / \partial (x^i)_A) - (\partial f_A / \partial (P_i)_A) (\partial (H_A)_K / \partial (x^i)_A)$. Формально ввести уравнение Лиувилля для переноса частиц в метрике Крускала можно, приравняв отрицательное изменение функции распределения по "временной" координате введенному коммутатору: $\partial f_A / \partial T + [(H_A)_K, f_A] = 0$.

Однако при этом встает ранее упомянутый вопрос о правомерности использования "одновременного" приближения в описании эволюции много-частичной системы. Простейшим способом снять этот вопрос является переход к постгалилеевскому уровню описания динамики (в нем правомерно использование "единого" для всей системы времени). Компоненты фундаментального метрического тензора в этом случае примут следующий вид:

$$g_{00} = 1 + \frac{2U}{c^2}, \quad g_{ij} |_{i,j=1,2,3} = -\delta_{ij} \left(1 - \frac{2U}{c^2} \right) |_{i,j=1,2,3}, \quad g_{0j} |_{j>0} = -4c^{-2} U_{[j]} |_{j>0},$$

где $U(x) = -\gamma \sum_A m_A / |x - x_A|$ (x_A – радиус-вектор A -й частицы), величина $U_{[\mu]}$ удовлетворяет уравнению $\Delta U_{[j]} = 4\pi\gamma\rho v_j$, v_j – пространственные компоненты 4-скорости массивных частиц, ρ – их плотность. Подстановка компонент метрического тензора в данной форме в выражение (7) для L_K дает его 1-е постньютоновское приближение (мы сразу заменяем величины v_A^2 и x , x_A через их значения в крускаловской системе координат):

$$L_K^{(1pN.)} = \frac{1}{2} \sum_A (m_A (v(X, T, \theta, \varphi))_A)^2 + \sum_B \frac{\gamma m_A m_B}{|x_A(X, T, \theta, \varphi) - x_B(X, T, \theta, \varphi)|}.$$

Построение соответствующей динамики (сопряженных к крускаловским координатам импульсов, функции Гамильтона, скобок Пуассона) не представляет теперь принципиальных трудностей.

5. Заключение

Введение в рассмотрение метрики Крускала является классическим примером создания "дополненной реальности", физическая обоснованность которой, по-видимому, не может быть установлена в сколь-нибудь обозримом будущем. Построение "многомировых интерпретаций" реального пространства–времени на основе различных дифференциально–геометрических моделей следует рассматривать только как методические упражнения. Подтверждение существования теоретически возможных концепций и объектов невозможно. Однако помимо экспериментальной проверки умпостроений о структуре пространства–времени существует еще один подход, на который следует обратить внимание. Сущность этого подхода – исследование не только геометрических/топологических свойств получаемого решения некоторой астрофизической или космологической задачи, но также и анализ динамических свойств соответствующих систем, приводящий к выявлению нефизической структуры предложенной модели: свойства системы и ее эволюция в фазовом пространстве тесно связаны и поэтому рассмотрение ее динамики может в ряде случаев без дорогостоящих экспериментов дать ответ о реализуемости в действительности данной модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kruskal M.D.* Maximal extension of Schwarzschild metric // *Phys. Rev.*, 1960, v.119, p.1743.

2. *Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A.* Gravitation. – San Francisco: W.H. Freeman & Comp., 1973.
3. *Abrams L.S.* Black holes: the legacy of Hilbert's error // *Can. J. Phys.*, 1989, v.67, p.919,
4. *Crothers S.J.* Gravitation on a spherical symmetric metric manifold // *Progr. in Physics*. 2007, v.2, p.68.
5. *Hilbert D.* Gravitationsfeld eines Massenpunktes // *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl.*, 1917, v.53, (submitted 23 Dec. 1916).
6. *Schwarzschild K.* Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Phys. Math. Klasse, 1916, p.189-196.
7. *Власов А.А.* Статистические функции распределения. – М.: Наука, 1966.
Vlasov A.A. Statistical distribution functions. – М.: Nauka, 1966.
8. *Wald R.M.* General relativity. Chicago and London: The University of Chicago Press. 1984.
9. *McVittie G.C.* General relativity and cosmology. – London: Chapman and Hall Ltd. 1956.
10. *Ryder L.* Introduction to general relativity. – N.Y.: Cambridge University Press. 2009.
11. *De Groot S.R., van Leeuwen W.A., van Weert Ch.G.* Relativistic kinetic theory: principles and applications. Amsterdam – New York: Elsevier North–Holland, 1980.
12. *Gaida R.P., Tretyak V.I.* Single–time form of the Fokker–type relativistic dynamics // *Acta Phys. Polon., Ser. B*. 1980, v.11(7), p.509-522.
13. *Четчин В.М., Дьяченко В.Ф., Гинзбург С.Л., Орлов Ю.Н., Фимин Н.Н.* Моделирование динамики бесстолкновительной ультрарелятивистской электрон–протонной плазмы в самосогласованном электромагнитном поле // *ЖВМиМФ*, 2016, т.56, №9, с.1635–1644; *V.M. Chechetkin, S.L. Ginzburg, V.F. Dyachenko, YU.N. Orlov, N.N. Fimin.* Simulation of collisionless ultrarelativistic electron–proton plasma dynamics in a self-consistent electromagnetic field // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2016, v.56, no.9, p.1611–1619.
14. *Choquet–Bruhat Y.* General relativity and Einstein's equations. Oxford – New York: Oxford University Press, 2009.

Поступила в редакцию 14.03.2018

После доработки 14.03.2018

Принята к публикации 10.09.2018