

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА КАБАРЕ С УЛУЧШЕННЫМИ ДИСПЕРСИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

© 2019 г. А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков

Донской государственной технической университет, г. Ростов-на-Дону
sukhinov@gmail.com, cheese_05@mail.ru

Работа выполнена при поддержке РФФ (проект № 17-11-01286).

DOI: 10.1134/S0234087919030067

Предложена разностная схема для задачи переноса, построенная как линейная комбинация схемы «кабаре» и схемы с центральными разностями. Проведено исследование устойчивости и дисперсионных свойств схемы. Показано, что построенная схема обладает лучшими дисперсионными свойствами для высокочастотных гармоник при малых числах Куранта по сравнению с известной схемой «кабаре» для уравнения переноса. Проведено сравнение погрешностей данной схемы и двухпараметрической разностной схемы третьего порядка точности на основе численных экспериментов на использовавшихся ранее наборах тестовых задач. Показано, что в норме сеточного пространства L_1 разработанная схема имеет меньшие погрешности, а также использует более компактный шаблон (при расчете i -го узла используются значения узлов $i-1, i, i+1$), и переход на следующий временной слой осуществляется за меньшее число арифметических операций.

Ключевые слова: задача переноса, схема «кабаре», дисперсионные свойства схем, точность решения.

CABARET DIFFERENCE SCHEME WITH IMPROVED DISPERSION PROPERTIES

A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov

Don State Technical University, Rostov-on-Don

Difference scheme for the advection transport equation has been constructed as the linear combination of "cabaret" scheme and the scheme with the central differences. The research of stability and dispersion properties of the scheme is conducted. It is shown that the constructed scheme has the best dispersion properties for high harmonicas in case of small numbers of Courant in comparison with the known scheme of "cabaret" for advection transport equation. Comparison of errors of this scheme and two-parameter difference scheme of the third order of accuracy on the basis of numerical experiments on sets of test tasks used earlier is carried out. It has been showed, that developed scheme has smaller errors in grid space L_1 in comparison of mentioned above scheme. Additionally the developed scheme uses more compact set of nodes (when calculating i -go of knot values of the hubs $i-1, i, i+1$ are used), and requires smaller number of arithmetic operations.

Key words: advection transport problem, "cabaret" scheme, dispersion of schemes, accuracy.

1. Введение

Рассматривается численное решение задачи переноса на основе усовершенствованной схемы «кабаре» [1], разностный оператор которой представляет собой линейную комбинацию разностных операторов схемы с центральными разностями и схемы «кабаре», рассмотренной В.А. Гушиным. Несмотря на неустойчивость схемы с центральными разностями, использование линейной комбинации двух разностных схем позволяет получить устойчивую схему, обладающую лучшей точностью по сравнению со схемой «кабаре». Другой подход для построения схем для уравнения переноса связан с использованием двухпараметрического семейства разностных схем [2, 3]. Данный класс схем характеризуется высоким порядком аппроксимации (лучшей точностью), минимальной схемной диссипацией, дисперсией и монотонностью. Несмотря на различие в используемых подходах при построении разностных схем, в частности, сеточных шаблонов и свойств двух описанных выше схем, результаты расчетов качественно совпадают в областях с большими градиентами исследуемых функций. Целью данной работы является количественно сопоставить схему, полученную как линейную комбинацию схемы «кабаре» и схемы с центральными разностями, с двухпараметрической разностной схемой третьего порядка точности.

2. Построение разностной схемы

Рассмотрим уравнение переноса

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $q(0, x) = q^0(x)$, $q(t, 0) = q(t, L) = 0$, $u = \text{const}$.

Введем равномерную сетку $\omega = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau$,

где $\bar{\omega}_h = \{x_i | x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = L\}$, $\omega_\tau = \{t_j | j = 0, 1, \dots\}$, $\tau = t_{n+1} - t_n = \text{const}$.

Для численного решения поставленной задачи можно использовать следующие конечно-разностные схемы:

– схема, ориентированная «против потока» или, в случае $u > 0$ – «левый уголок» [4]:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0, \quad u \geq 0; \quad (2)$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0, \quad u < 0;$$

– центральная разностная схема:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} = 0; \quad (3)$$

– схема «кабаре» [5]:

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} = 0, \quad u \geq 0; \quad (4)$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_i^n}{h} = 0, \quad u < 0.$$

Для решения задачи конвекции можно использовать схему, полученную в результате линейной комбинации центральной разностной схемы (3) и схемы «кабаре» (4)

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n + 4q_i^n - 5q_{i-1}^n}{4h} = 0, \quad u \geq 0; \quad (5)$$

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{q_{i+1}^n - q_{i+1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{5q_{i+1}^n + 4q_i^n - q_{i-1}^n}{4h} = 0, \quad u \geq 0.$$

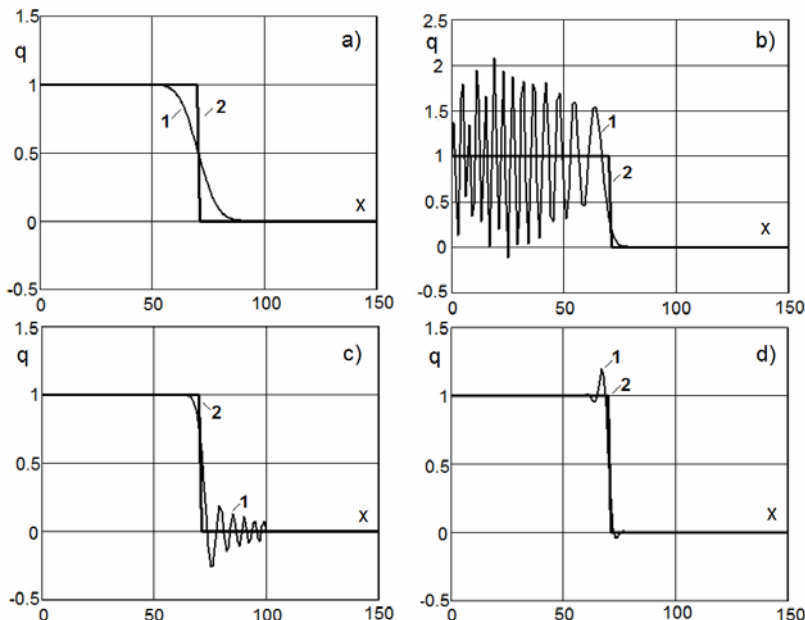


Рис.1. Решения модельной задачи на основе схем (2)–(5): а) левая разностная схема; б) центральная разностная схема; в) схема «кабаре»; д) предложенная разностная схема.

Найдем численные решения на основе схем (2)–(5) модельной задачи с начальными условиями $q^0(x) = h(20 - x)$, где $h(x)$ – функция Хэвисайда. На

рис.1 приведены решения модельной задачи (1 – численное решение, 2 – точное).

Из рис.1 видно, что разностная схема типа «левый уголок» аппроксимирует скачок недостаточно точно, центральная разностная схема неустойчива, решение, полученное на основе схемы «кабаре», имеет осцилляции (энтропийные возмущения) [6]. Предложенная разностная схема дает наиболее точное решение модельной задачи. Левая разностная схема имеет порядок аппроксимации $O(\tau + h)$, центральная разностная схема аппроксимирует непрерывную модель с порядком $O(\tau + h^2)$ [7,8], схема «кабаре» аппроксимирует уравнение переноса с погрешностью $O(\tau^2 + h^2)$.

3. Устойчивость и дисперсионные свойства схемы

Для исследования устойчивости схемы (5) применен метод гармоник. Пусть $q_i^n = \varphi^n \cdot e^{jki}$, где $j = \sqrt{-1}$, тогда уравнение (5) примет вид (случай $u \geq 0$):

$$\frac{\varphi - 1}{\tau} + \frac{\exp(-jk) - \exp(-jk)/\varphi}{2\tau} + u \frac{\exp(jk) + 4 - 5\exp(-jk)}{4h} = 0$$

или

$$\varphi^2 + \left(\left(-\frac{1}{2} + \frac{u\tau}{h} \right) (1 - \cos k) - \frac{1}{2} + j \frac{\sin k}{2} \left(-1 + \frac{3u\tau}{h} \sin k \right) \right) \varphi - \frac{\exp(-jk)}{2} = 0.$$

Решение данного квадратного уравнения относительно φ запишется в виде

$$\varphi_{1,2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{u\tau}{h} \right) (1 - \cos k) + \frac{1}{4} - j \frac{\sin k}{4} \left(-1 + \frac{3u\tau}{h} \right) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{1}{4} - \frac{u\tau}{h} \right) (1 - \cos k) + \frac{1}{4} - j \frac{\sin k}{4} \left(-1 + \frac{3u\tau}{h} \right) \right)^2 + \frac{\exp(-jk)}{2}}.$$

Обозначим $c = u\tau/h$ – число Куранта, тогда

$$\varphi_{1,2} = (1/4 - c)(1 - \cos k) + 1/4 - j(\sin k/4)(3c - 1) \pm \sqrt{\left((1/4 - c)(1 - \cos k) + 1/4 - j(\sin k/4)(3c - 1) \right)^2 + \exp(-jk)/2}.$$

Будем считать, что при расчете φ_1 берется значение корня комплексного числа с неотрицательной вещественной частью (аргумент φ_1 принадлежит полуинтервалу $[-\pi/2, \pi/2)$). Рассмотрим случай $c = 0$. Данный случай соответствует значению $\tau = 0$ или $q_i^n = q_i^{n+1}$; при этом значение функции φ равно 1.

$$\begin{aligned}\varphi_{1,2} &= (2 - \exp(-jk)) / 4 \pm \sqrt{((2 - \exp(-jk)) / 4)^2 + \exp(-jk) / 2} = \\ &= (2 - \exp(-jk)) / 4 \pm (2 + \exp(-jk)) / 4.\end{aligned}$$

Отсюда получаем: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = -\exp(-jk)/2$, следовательно, φ_2 не является решением. Исследование поведения функции $\varphi_1(c, k)$ производилось численно. Исследовались значения функции $|\varphi_1(c, k)| \in [0, 1]$ при $k \in [0, \pi]$ и $c \in [0, 1]$. На рис.2 приведены значения модуля и аргумента функции $\varphi_1(c, k)$ в зависимости от значений параметров k и c .

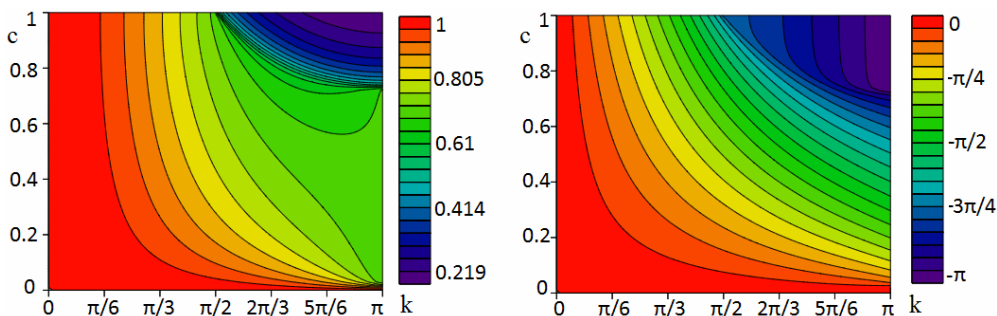


Рис.2. Значения модуля (слева) и аргумента (справа) функции $\varphi_1(c, k)$.

Решение уравнения переноса с начальными условиями: $q(0, x) = \exp(j\omega_n x)$ равно $q(t, x) = \exp(j\omega_n(x - ut))$. Здесь $\omega_n = n\omega = k/h$ – угловая частота, n – номер гармоники, $\omega = 2\pi/L = 2\pi/(hN)$. Таким образом, при решении задачи переноса с начальными условиями, заданными гармонической функцией, переход между временными слоями соответствует умножению на функцию $\phi(c, k) = \exp(-j\omega_n ut) = \exp(-jkc)$ при $k \in [0, \pi]$. Аргумент функции $\phi(c, k)$ запишется в виде: $Arg(\phi(c, k)) = -kc$.

Сопоставление аргументов функций $\phi(c, k)$ и $\varphi_1(c, k)$ приведено на рис.3.

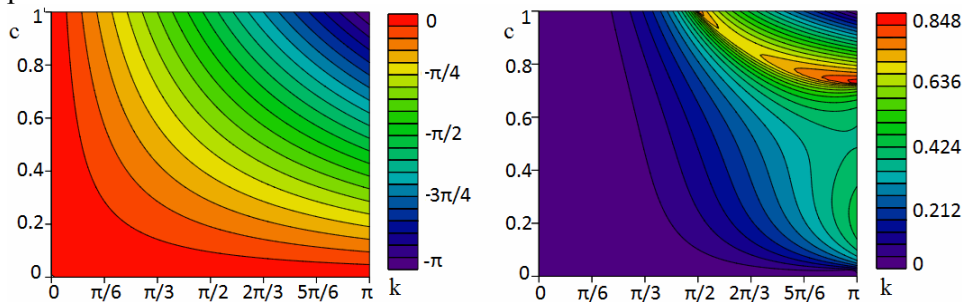


Рис.3. Значения модуля аргумента функции $\phi(c, k)$ (слева) и модуля разности аргументов $\varphi_1(c, k)$ и $\phi(c, k)$ (справа).

На основе рис.2, 3 можно проанализировать ошибки в «фазовых скоростях» [5] для предложенной схемы (5). Из приведенных на рисунках «изображений» фазовых поверхностей видно, что погрешность численных расчетов на основе схемы (5) возникает преимущественно на высоких частотах.

Исследуем зависимость погрешности расчетов при различных гармониках в случай малых чисел Куранта ($c \rightarrow 0$). Параметр k с номером гармоники связан соотношением: $k = 2\pi n / N$. Рассмотрим разность функций $\varphi_1(c, k)$ и $\phi(c, k)$

$$\begin{aligned} \varphi_1(c, k) - \phi(c, k) &= (2 - \exp(-jk)) / 4 - c(1 - \cos k + j3 \sin k/4) - \exp(-jk) + \\ &+ \sqrt{\left((2 - \exp(-jk)) / 4 - c(1 - \cos k + j3 \sin k/4) \right)^2 + \exp(-jk) / 2} \approx \\ &\approx (2 - \exp(-jk)) / 4 - c(1 - \cos k + j3 \sin k/4) + \\ &+ ((2 + \exp(-jk)) / 4) \sqrt{1 - 8 \frac{2 - \exp(-jk)}{(2 + \exp(-jk))^2} c \left(1 - \cos k + j \frac{3 \sin k}{4} \right) - \exp(-jk)} \approx \\ &\approx jck - \frac{4c}{2 + \exp(-jk)} \left(1 - \cos k + j \frac{3 \sin k}{4} \right) = jck + \frac{4 \exp(-jk) - 4 + j \sin k}{2 + \exp(-jk)} c. \end{aligned}$$

Измельчение сетки приводит к линейному росту количества слоев по времени. Из полученного выражения следует, что при малых числах Куранта уменьшение шага по времени не приводит к повышению точности. Погрешность решения модельной задачи для уравнения переноса на основе

схемы (5) пропорциональна функции: $f(k) = \left| jk + \frac{4 \exp(-jk) - 4 + j \sin k}{2 + \exp(-jk)} \right|$,

график которой приведен на рис.4.

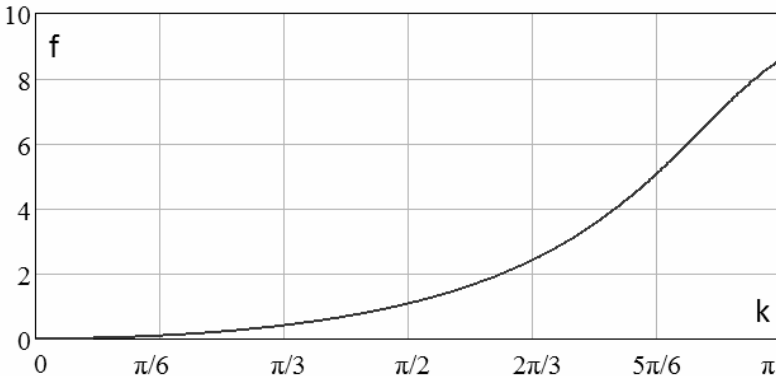


Рис.4. График функции $f(k)$.

4. Дисперсионные свойства схемы «кабаре»

Для исследования устойчивости схемы «кабаре» на основе метода гармоник воспользуемся подстановкой $q_i^n = \varphi^n \cdot \exp(jki)$, тогда уравнение (4) примет вид (случай $u \geq 0$)

$$\frac{\varphi - 1}{2\tau} + \frac{\exp(-jk) - \exp(-jk)/\varphi}{2\tau} + u \frac{1 - \exp(-jk)}{h} = 0$$

или $\varphi^2 - (1 - 2c)(1 - \exp(-jk))\varphi - \exp(-jk) = 0$, $c = u\tau/h$. Решение данного квадратного уравнения относительно φ запишется в виде

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= (1/2 - c)(1 - \exp(-jk)) \pm \sqrt{((1/2 - c)(1 - \exp(-jk)))^2 + \exp(-jk)} = \\ &= \exp(-jk/2) \left(j(1 - 2c)\sin(k/2) \pm \sqrt{1 - ((1 - 2c)\sin(k/2))^2} \right). \end{aligned}$$

Рассмотрим случай $c = 0$.

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \exp(-jk/2) \left(j\sin(k/2) \pm \sqrt{1 - \sin^2(k/2)} \right) = \\ &= \exp(-jk/2) (j\sin(k/2) \pm \cos(k/2)). \end{aligned}$$

В результате получим: $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = -\exp(-jk)$, следовательно, φ_2 не является решением. На рис.5 приведено «изображение» дисперсионной поверхности первого корня характеристического уравнения для схемы «кабаре», а также ее отклонение от точных значений (точное значение дисперсионной поверхности равно $\text{Arg}(\phi(c, k)) = -kc$).

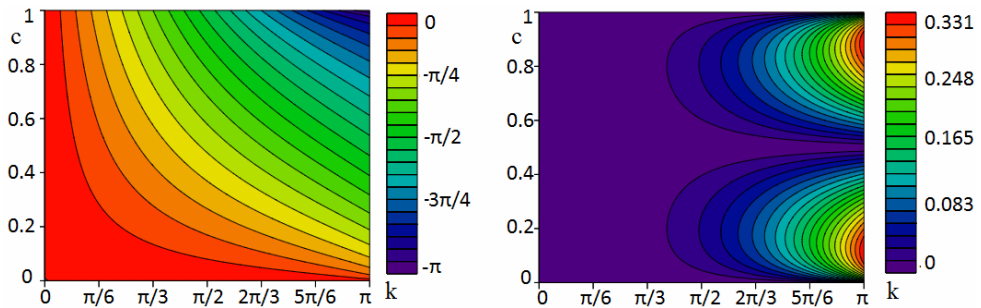


Рис.5. Дисперсионная поверхность характеристического уравнения схемы «кабаре» (слева), отклонение дисперсионной поверхности корня характеристического уравнения схемы «кабаре» от точных значений (справа).

Исследуем зависимость погрешности расчетов для различных гармоник в случае малых чисел Куранта ($c \rightarrow 0$). Рассмотрим разность функций $\varphi_1(c, k)$ и $\phi(c, k)$

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(c, k) - \phi(c, k) &= \exp(-jk/2) \left(j(1-2c)\sin(k/2) + \sqrt{1 - ((1-2c)\sin(k/2))^2} \right) - \\
 &- \exp(-jck) = \\
 &= \exp(-jk/2) \left(j\sin(k/2) - 2jc\sin(k/2) + \sqrt{1 - (1-4c + 4c^2)\sin^2(k/2)} \right) - \\
 &- \exp(-jck) \approx \\
 &\approx \exp(-jk/2) \left(j\sin(k/2) - 2jc\sin(k/2) + \cos(k/2)\sqrt{1 + 4c \cdot \operatorname{tg}^2(k/2)} \right) - \\
 &- \exp(-jck) \approx \\
 &\approx 1 - \exp(-jck) + 2\exp(-jk/2)c\sin(k/2)(\operatorname{tg}(k/2) - j) = jc(k - 2\operatorname{tg}(k/2)).
 \end{aligned}$$

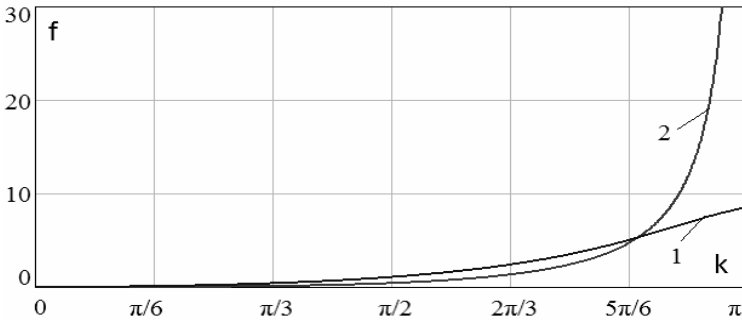


Рис.6. Погрешности решения задачи переноса в случае малых чисел Куранта: 1 – на основе схемы (5); 2 – схема «кабаре».

Погрешность расчетов задачи переноса на основе схемы (4) пропорциональна функции: $f(k) = 2 \cdot \operatorname{tg}(k/2) - k$. Графики оценки погрешностей решения задачи переноса в случае малых чисел Куранта на основе схемы (5) и схемы «кабаре» приведены на рис.6.

5. Схема третьего порядка точности для уравнения переноса

Рассмотрим двухпараметрическое семейство разностных схем

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{\tilde{q}_{i+1/2}^n - \tilde{q}_{i-1/2}^n}{h} = 0, \tag{6}$$

где

$$\tilde{q}_{i+1/2}^n = \alpha \begin{pmatrix} q_{i-1}^n \\ q_{i+2}^n \end{pmatrix} + (1 - \alpha - \beta) \begin{pmatrix} q_i^n \\ q_{i+1}^n \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} q_{i+1}^n \\ q_i^n \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} u \geq 0, \\ u < 0. \end{matrix} \tag{7}$$

Воспользуемся разложением функций q_i^{n+1} и $q_{i\pm k}^n$ в ряд Тейлора в окрестности точки (i, n) :

$$q_i^{n+1} = q_i^n + \tau(q_t)_i^n + \frac{\tau^2}{2}(q_{tt})_i^n + \frac{\tau^3}{3!}(q_{ttt})_i^n + \frac{\tau^4}{4!}(q_{tttt})_i^n + O(\tau^5), \quad (8)$$

$$q_{i\pm k}^n = q_i^n \pm kh(q_x)_i^n + \frac{(kh)^2}{2}(q_{xx})_i^n \pm \frac{(kh)^3}{3!}(q_{xxx})_i^n + \frac{(kh)^4}{4!}(q_{xxxx})_i^n + O(h^5). \quad (9)$$

С учетом уравнения (1) имеем $q_t = -uq_x$, $q_{tt} = u^2 q_{xx}$, $q_{ttt} = -u^3 q_{xxx}$, $q_{tttt} = u^4 q_{xxxx}$.

Подставляя (7) в (6), с учетом (8), (9) получаем

$$q_t + uq_x = \left(|u|h(\alpha - \beta + 1/2) - \tau u^2/2 \right) q_{xx} + \frac{u}{6} \left(\tau^2 u^2 - h^2(1 + 6\alpha) \right) f_{xxx} + \\ + \left(\frac{|u|h^3}{12} (1/2 + 7\alpha - \beta) - \frac{u^4 h^3}{24} \right) f_{xxxx} + O(\tau^4 + h^4)$$

$$\text{или } q_t + uq_x = \frac{ch^2}{2\tau} (2(\alpha - \beta) + 1 - c) q_{xx} + \frac{ch^3}{6\tau} \text{sign}(u)(c^2 - 1 - 6\alpha) f_{xxx} + \\ + \frac{ch^3}{24\tau} (1 + 14\alpha - 2\beta - c^3) f_{xxxx} + O(\tau^4 + h^4).$$

Для получения схемы третьего порядка точности $O(\tau^3 + h^3)$ необходимо, чтобы

$$2(\alpha - \beta) + 1 - c = 0, \quad c^2 - 1 - 6\alpha = 0.$$

Данные равенства выполняются при

$$\alpha = (c^2 - 1)/6, \quad \beta = \alpha + (1 - c)/2$$

$$\text{или } \alpha = (c^2 - 1)/6, \quad \beta = (c - 1)(c - 2)/6. \quad (10)$$

6. Сопоставление результатов расчета на основе предложенной схемы и схемы повышенного порядка точности

Рассмотрим численные решения, полученные на основе предложенной схемы (5) и схемы третьего порядка точности (6), на примере задачи переноса с начальными условиями: $q^0(x) = h(20 - x)$, где $h(x)$ – функция Хэвисайда. Входные параметры: скорость $u=0.5$ м/с, шаг по времени $\tau=0.02$ с, шаг по пространству $h=1$ м, длина интервала по времени T равна 300 с. На рис.7 приведены результаты расчета для модельной задачи (1 – схема «левый угол», 2 – схема повышенного порядка точности, 3 – предложенная разностная схема, 4 – точное решение).

Значение погрешностей в норме L_1 ($\Psi^n = \sum_i \psi_i^n h$, $\psi_i^n = |q_i^n - q(x_i, t^n)|$, $n=T$)

для схемы левый уголок, третьего порядка точности и предложенной разностной схемы составляет 9.673, 2.262, 1.723 соответственно.

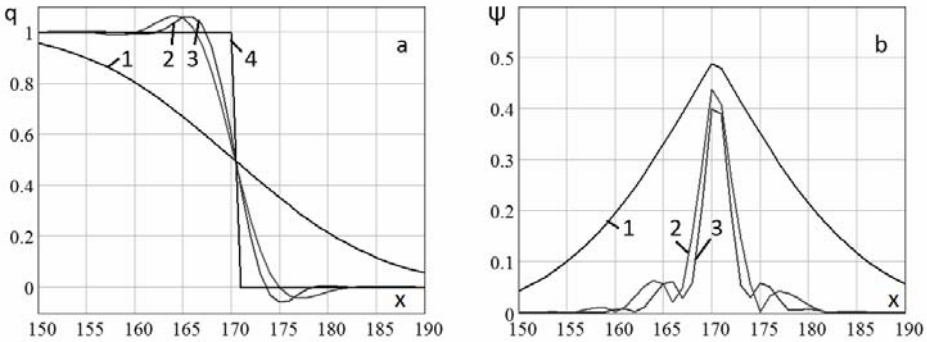


Рис.7. Решения модельной задачи на основе предложенной схемы (5) и схемы третьего порядка точности а) графики полученных значений функций; б) графики погрешностей.

Данный пример демонстрирует поведение решения при скачках функций. Далее рассмотрим поведение численного решения для функции, представляющей собой «тонкий сигнал» и заданной начальными условиями: $q^0(x) = h(20-x) - h(10-x)$. При решении подобного класса задач на точность решения влияет сеточная вязкость [9], при наличии которой происходит существенное падение амплитуды функции и информация об объектах с малыми размерами практически теряется [10]. На рис.8 приведены результаты расчета для модельной задачи (1 – схема «левый уголок», 2 – схема третьего порядка точности, 3 – предложенная разностная схема, 4 – точное решение).

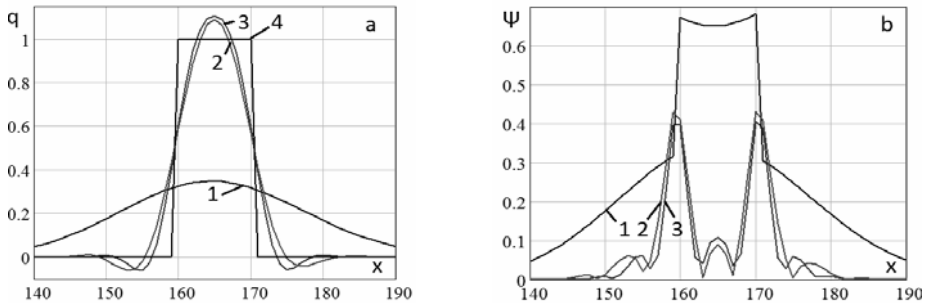


Рис.8. Решения модельной задачи на основе предложенной схемы (5) и схемы третьего порядка точности: а) графики полученных значений функций; б) графики погрешностей.

Значение погрешностей в норме L_1 для схемы «левый уголок», третьего порядка точности и предложенной разностной схемы составляет 14.531,

4.059, 3.434 соответственно. Из рис.8 видно, что решения, полученные на основе схемы (5) и третьего порядка точности, находятся близко друг к другу. На рис.9 показано поведение решений для данных разностных схем при счете на более длительные временные интервалы. Расчетный интервал составлял 800 с. Приведены решения в моменты времени 120, 240, 360, 480, 600 и 720с.

Из рис.9 видно, что при расчете на длительные времена амплитуда функции решения, полученного на основе схемы третьего порядка со временем начинает убывать, а график функции решения, полученного на основе предложенной разностной схемы, начиная с некоторого момента, практически не изменяется со временем.

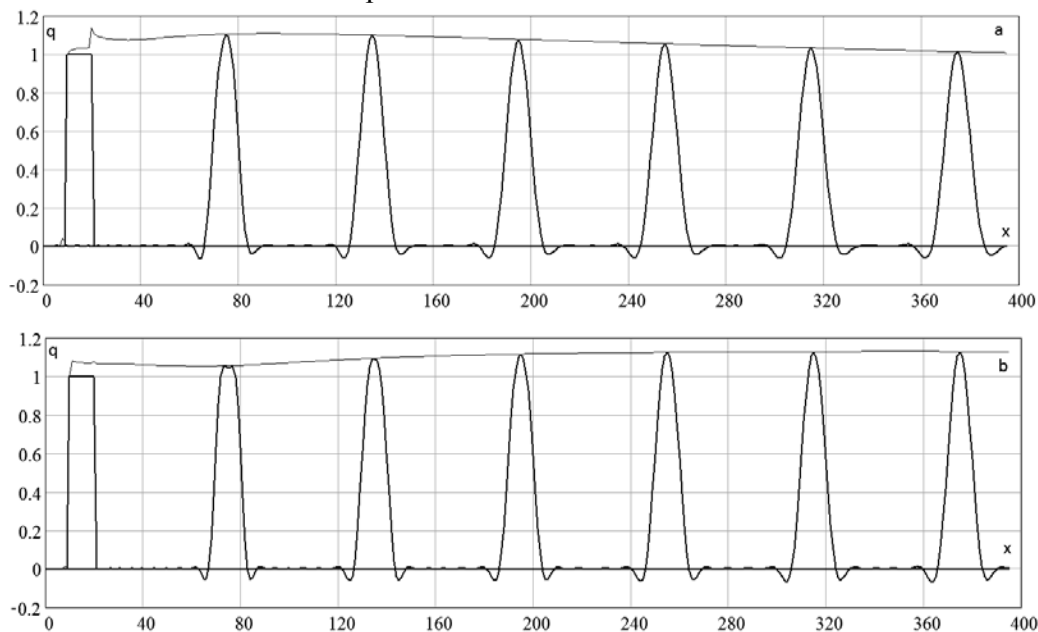


Рис.9. Решения модельной задачи на длительные временные интервалы (а – для схемы третьего порядка точности, б – предложенной разностной схемы).

На рис.10 приведены графики функции погрешности в норме L_1 , зависящей от длины расчетного интервала.

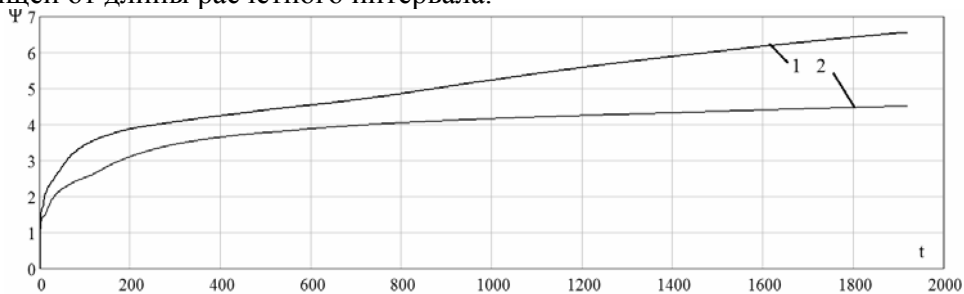


Рис.10. Функции погрешности в норме L_1 , зависящей от длины расчетного интервала (1 – для схемы третьего порядка точности, 2 – для предложенной разностной схемы).

7. Аппроксимация задачи конвекции-диффузии

Рассмотрим нестационарное уравнение конвекции-диффузии [11]

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \tag{11}$$

где $t \in [0, T]$, $x \in [0, L]$, $q(0, x) = q^0(x)$, $q(t, 0) = q(t, L) = 0$, $u = \text{const}$.

Для аппроксимации оператора конвекции будем использовать схему, полученную в результате линейной комбинации центральной разностной схемы (3) и схемы «кабаре» (4)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + u \frac{q_{i+1}^n - q_{i-1}^n}{2h} - \mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2} \right) + \\ & + \frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{2\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_i^n - q_{i-1}^n}{h} - \mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{h^2} = 0 \end{aligned}$$

или

$$\frac{q_i^{n+1} - q_i^n}{\tau} + \frac{q_{i-1}^n - q_{i-1}^{n-1}}{2\tau} + u \frac{q_{i+1}^n + 4q_i^n - 5q_{i-1}^n}{4h} - 3\mu \frac{q_{i+1}^n - 2q_i^n + q_{i-1}^n}{2h^2} = 0. \tag{12}$$

На рис.11 приведены решения модельной задачи с начальными условиями $q^0(x) = h(20 - x)$, где $h(x)$ – функция Хэвисайда.

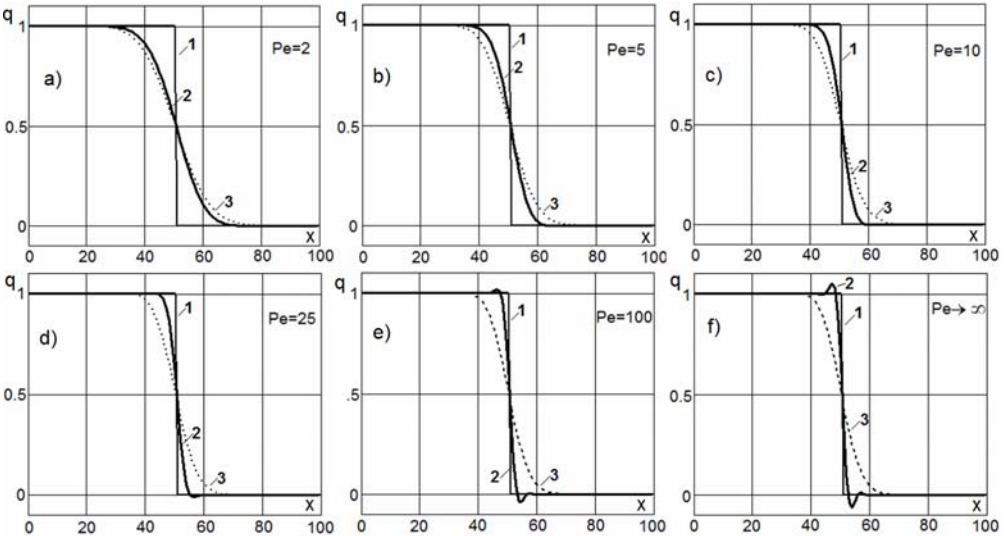


Рис.11. Решения модельной задачи. 1 – точное решение задачи переноса, 2 – численное решение на основе предложенной разностной схемы при различных значениях чисел Пекле, 3 – численной решение задачи переноса на основе «против» потока.

8. Заключение

Для решения задачи конвекции предложена разностная схема, полученная на основе линейной комбинации центральной разностной схемы и схемы «кабаре». Данная схема при близости получаемых решениях и значений погрешностей имеет следующие преимущества по сравнению со схемой третьего порядка точности: использует более компактный шаблон (при расчете i -го узла используются значения узлов $i-1$, i , $i+1$), переход на следующий временной слой осуществляется за меньшее число арифметических операций и обладает меньшей погрешностью в норме L_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.И. Сухинов, Ю.В. Белова, А.Е. Чистяков.* Решение задачи переноса веществ при больших числах Пекле // Выч. методы и программир., 2017, т.18, № 4, с.371-380;
A.I. Sukhinov, Yu.V. Belova, A.E. Chistiakov. Reshenie zadachi perenosa veshchestv pri bolshikh chislakh Pekle // Vych. metody i programmirovaniye, 2017, t.18, №4, s.371-380.
2. *В.А. Гущин.* Об одном семействе квазимонотонных разностных схем второго порядка аппроксимации // Математ. моделирование, 2016, т.28, № 2, с.6-18;
V.A. Gushchin. Family of quasi-monotonic finite-difference schemes of the second-order of approximation // Math. Models and Comp. Simulations, 2016, v.8, № 5, p.487-496.
3. *О.М. Белоцерковский, В.А. Гущин, В.Н. Коньшин.* Метод расщепления для исследования течений стратифицированной жидкости со свободной поверхностью // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987, т.27, № 4, с.594-609;
O.M. Belotserkovskii, V.A. Gushchin, V.N. Kon'shin. The splitting method for investigating flows of a stratified liquid with a free surface // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1987, v.27, № 2, p.181-191.
4. *А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич.* Численные методы решения задач конвекции-диффузии. – М.: Эдиториал УРСС, 1999;
A.A. Samarskiy, P.N. Vabishchevich. Numerical methods for solving convection-diffusion problems. – M.: Editorial URSS, 1999.
5. *В.М. Головизнин, А.А. Самарский.* Разностная аппроксимация конвективного переноса с пространственным расщеплением временной производной // Математ. моделирование, 1998, т.10, №1, с.86-100;
V.M. Goloviznin, A.A. Samarskiy. Raznostnaia approssimatsiia konvektivnogo perenosa s prostranstvennym rasshchepleniem vremennoi proizvodnoi // Matemat. modelirovaniye, 1998, t.10, №1, s.86-100.
6. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин.* Использование разрывного метода Галеркина при решении задач газовой динамики // Математ. моделирование, 2014, т.26, №1, с.17-32;
M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin. Application of the RKDG method for gas dynamics problems // Math. Models and Comp. Simulations, 2014, v.6, № 4, p.397-407.
7. *А.А. Самарский.* О регуляризации разностных схем // ЖВМиМФ, 1967, т.7, № 1, с.62-93;
A.A. Samarskiy. On the regularization of difference schemes // U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys., 1967, v.7, № 1, p.62-93.

8. *А.А. Самарский*. Классы устойчивых схем // ЖВМиМФ, 1967, т.7, № 5, с.1096–1133;
A.A. Samarskii. Classes of stable schemes // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys., 1967, v.7, № 5, p.171–223.
9. *Р.П. Федоренко*. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений // ЖВМиМФ, 1962, т.2, №6, с.1122–1128;
R.P. Fedorenko. The application of difference schemes of high accuracy to the numerical solution of hyperbolic equations // U.S.S.R. Comp. Math. Math. Phys., 1963, v.2, № 6, p.1355–1365.
10. *А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, М.В. Якобовский*. Точность численного решения уравнения диффузии-конвекции на основе разностных схем второго и четвертого порядков погрешности аппроксимации // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Выч. матем. информ., 2016, т.5, № 1, с.47–62.
A.I. Sukhinov, A.E. Chistakov, M.V. Yakobovskii. Accuracy of the Numerical Solution of the Equations of Diffusion-Convection Using the Difference Schemes of Second and Fourth Order Approximation Error // Vestn. YuUrGU. Ser. Vych. Matem. Inform., 2016, v.5, № 1, p.47–62.
11. *А.И. Сухинов, А.Е. Чистяков, А.В. Шишенина, Е.Ф. Тимофеева*. Mathematical model for calculating coastal wave processes // Math. Mod. & Comp. Simul., 2013, v.5, №5, p.122-129.

Поступила в редакцию 09.04.2018

После доработки 09.04.18

Принята к публикации 10.09.18