

## **НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В СОКРАЩАЮЩЕМСЯ ЭЛАСТИЧНОМ СОСУДЕ**

© 2019 г. *А.С. Мозохина, С.И. Мухин*

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
asm@cs.msu.ru, vmmus@cs.msu.ru

DOI: 10.1134/S0234087919030092

Рассматриваются некоторые точные решения уравнений гемодинамики в сокращающемся сосуде в квазиодномерном приближении применительно к задачам, возникающим при описании течения лимфы. Приведены решения для линеаризованной задачи в случае принудительных малых сокращений просвета сосуда. Получено и исследовано аналитическое решение нелинейной системы при зависимости сечения сосуда только от времени. Точные решения воспроизведены в численном расчёте.

Ключевые слова: уравнения гемодинамики, квазиодномерный подход, сокращения, аналитические решения.

### **SOME EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF LIQUID FLOW IN THE CONTRACTING OR EXPANDING VESSEL**

*A.S. Mozokhina, S.I. Mukhin*

Lomonosov Moscow State University

Some exact analytical solutions of the quasi-onedimensional hemodynamic equations in the contracting or expanding vessel are considered in the article. Such equations appear in the modeling of lymph flow in the lymphatic system. Solutions of the linearised problem in the case of periodical changing of the vessel lumen with small amplitude are presented. Also the solution of the not linear problem is obtained in the case when cross-section area depends only on time. Analytical solutions are reproduced numerically.

Key words: hemodynamic equations, quasi-onedimensional approach, contractions, analytical solutions.

### **1. Введение**

Задачи, которые рассматриваются в данной работе, возникают при математическом моделировании течения лимфы. Описание течения лимфы в лимфатических сосудах – сложная задача не только с математической, но и с физиологической точки зрения, и ее удовлетворительное решение на дан-

ный момент не получено. Общее описание лимфотока включает в себя два принципиальных элемента: построение топологической схемы лимфатической системы и собственно расчёт течения лимфы по этой системе. Для описания гидродинамики течения в первом приближении достаточным представляется квазиодномерный подход, хорошо зарекомендовавший себя при моделировании течения крови в сердечно-сосудистой системе.

Движение лимфы в лимфатической системе с гидродинамической точки зрения представляет собой течение несжимаемой жидкости в сложной разветвленной незамкнутой сети разнородных эластичных сосудов с различными специфическими свойствами. Принято считать [1, 2], что лимфа в системе движется за счёт градиента давления и за счёт активных или пассивных сокращений сосудов, имеющих клапаны. В общей модели течения лимфы оба этих процесса должны быть учтены. В квазиодномерном подходе перепад давления может задаваться как входное условие задачи, что позволяет исследовать его влияние на лимфоток, в том числе с учётом гравитационного воздействия. Создание же моделей сокращения сосудов с клапанами в рамках квазиодномерного описания требует проработки как в математическом, так и в алгоритмическом плане.

Учет активных и пассивных сокращений естественно осуществлять введением принудительного изменения параметров сечения как функции некоторых величин в уравнение состояния. Такой подход широко используется в моделях течения лимфы по сокращающемуся сосуду как в нульмерных [3-5], так и в одномерных [6] и многомерных [7] постановках. В [6, 7] сокращения моделируются синусоидальной функцией, включаемой в уравнение, связывающее давление и площадь поперечного сечения, а результаты сравниваются либо с физиологическим экспериментом, либо с результатами расчётов по другим моделям, в частности, с расчётами Reddy [3], чья модель уже стала классической в области моделирования течения лимфы.

Интерес представляет ряд работ, в которых безотносительно к лимфотоку рассматривается течение жидкости в цилиндрической трубке с сокращающимися стенками, исследуемое, в том числе, и аналитическими методами. Например, после перехода к новым неизвестным – функции Стокса и завихрённости – система уравнений Навье-Стокса сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, которое затем либо решается численно [8, 9], либо анализируется асимптотически, и результаты анализа сравниваются с численным решением [10, 11]. Указанные работы получают в качестве результата зависимость решения от числа Рейнольдса и от амплитуды сокращений, которая подробно исследуется, в частности, в [9]. Качествен-

ный анализ полученной в результате преобразований уравнений Навье-Стокса системы проведён в [12].

В квазиодномерном приближении течения в пульсирующем сосуде исследованы Регирером в [13], где приведено асимптотическое решение. Отдельно следует отметить работу [14], где в квазиодномерном приближении получена система уравнений для описания распространения перистальтической волны по сосуду с учётом синоптической передачи импульса сокращений и её асимптотическое исследование.

Лимфатическая система (и, соответственно, ее модель) состоит из сотен сосудов, эти сосуды образуют сеть сложной топологии. Течение в такой системе очень чувствительно к параметрам сети, и даже малые локальные изменения свойств сосудов могут привести к достаточно радикальной перестройке общей картины лимфотока. В связи с этим, прежде чем исследовать влияние сокращений лимфатических сосудов на течение лимфы во всей системе, полезно выяснить, какие локальные течения возникают в отдельных сокращающихся сосудах.

Для численного исследования течения лимфы авторы применяют хорошо зарекомендовавшую себя разностную схему, используемую для описания течения крови в кровеносной системе в квазиодномерном приближении [15]. Свойства этой разностной схемы подробно исследованы, например, в [16, 17]. Реализации этой разностной схемы для расчета на одном сосуде и на произвольной сети описаны в [15]. В [18] проведено сравнение ряда аналитических решений уравнений гемодинамики, в том числе и линейризованных, с решением данной схемы. Однако для течений под действием активных сокращений сосуда такого анализа не проводилось. В связи с этим в настоящей работе приводятся решения линейризованной системы гемодинамики, порожденные активными сокращениями сосуда, и проводится их сравнение с численным решением по аналогии с [18].

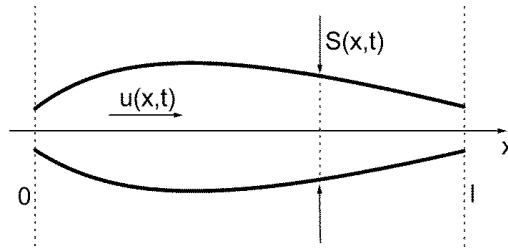
Наиболее интересным, разумеется, представляется течение, возникающее в результате активных сокращений в полной нелинейной задаче. Для этой задачи получено аналитическое решение в случае, когда площадь поперечного сечения при сокращениях зависит только от времени. Это решение представляет самостоятельный интерес и также используется как тестовое.

## 2. Постановка задачи

Пусть жидкость является несжимаемой, продольная составляющая её скорости много больше поперечной, течение осуществляется по симметричному цилиндрическому сосуду и является осесимметричным (рис.1). В этом случае течение может быть описано квазиодномерными уравнениями гемодинамики [19]:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -8\pi\nu \frac{u}{S}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ S = S(p), \quad \frac{dS}{dp} > 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $x$  – пространственная координата,  $t$  – время,  $u(x,t)$  – скорость жидкости,  $p(x,t)$  – давление,  $S(x,t)$  – площадь поперечного сечения сосуда,  $\rho = \text{const}$  – плотность,  $\nu = \text{const}$  – коэффициент кинематической вязкости лимфы,  $l$  – длина сосуда. Третье уравнение системы выражает зависимость площади поперечного сечения сосуда от давления (уравнение состояния). Добавление в это уравнение дополнительных зависимостей позволяет учитывать активные и пассивные сокращения лимфатических сосудов.



**Рис.1.** Течение в сосуде в квазиодномерном приближении. Координатная прямая направлена вдоль оси сосуда, сосуд симметричен относительно продольной оси.

Для численного решения системы (1) будем использовать конечно-разностную схему [15]. В безындексной форме [20] она имеет вид

$$\begin{aligned} S_t + (Su)_x^{(\sigma_1)} &= 0, \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x^{(\sigma_2)} + \frac{1}{\rho} p_x^{(\sigma_3)} &= -8\pi\nu \left(\frac{u}{S}\right)^{(\sigma_4)}, \\ S &= S(p). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} y &= y(x_j, t_n), \quad \hat{y} = y(x_j, t_{n+1}), \quad y^{(\sigma_i)} = (1 - \sigma_i)y + \sigma_i \hat{y}, \\ \hat{y}_x &= \frac{y(x_{j+1}, t_{n+1}) - y(x_{j-1}, t_{n+1})}{2h}, \end{aligned}$$

$\sigma_i \in [0, 1]$ ,  $i=1, 2, 3, 4$  – весовые множители,  $x_j = jh$ ,  $t_n = \tau h$ ,  $h$ ,  $\tau$  – шаги по пространству и времени соответственно.

Для первой тестовой задачи рассмотрим однородную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial uS}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ S = S(p). \end{cases} \quad (3)$$

Как показано в [18], решение нелинейной системы (3) хорошо приближается решением линеаризованной системы при введении определённых ограничений на параметры задачи. В случае описания течения лимфы такие ограничения на малых временах являются оправданными.

### 3. Линеаризованные задачи

**3.1.** Рассмотрим задачу о течении жидкости на положительной полуоси с сокращениями по некоторому закону в граничной точке. Такая постановка часто встречается при исследовании влияния сокращений на течение, например, в [8, 21].

Пусть система (3) рассматривается на множестве  $x > 0$ ,  $t > 0$ . В начальный момент времени жидкость покоится, а давление равно некоторой постоянной величине:

$$u(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = \bar{p}, \quad 0 \leq x < +\infty. \quad (4)$$

На левой границе скорость равна нулю:

$$u(0, t) \equiv 0, \quad t \geq 0, \quad (5)$$

там же задан закон вынужденных сокращений:

$$S(0, t) = \mu(t), \quad t \geq 0, \quad (6)$$

и потребуем, чтобы  $\mu(0) = S(\bar{p})$ .

Будем искать приближённое решение задачи (3)–(6) в виде малых отклонений функций  $p(x, t)$ ,  $u(x, t)$  от постоянных значений [22, 20]:

$$p(x, t) = \bar{p} + \tilde{p}(x, t), \quad u(x, t) = \tilde{u}(x, t), \quad (7)$$

причём  $\tilde{p}(x, t) \ll \bar{p}$ ,  $\tilde{u}(x, t) \ll \bar{c}$ ,  $\bar{c}^2 = \frac{\bar{S}}{\rho S'(\bar{p})}$ ,  $\bar{S} = S(\bar{p})$ . (8)

Подставляя выражения (7) в уравнения (3), в начальные условия (4) и в граничные условия (5), (6) и отбросив все члены второго порядка малости, получим однородную линейную задачу относительно  $\tilde{p}(x,t)$  и  $\tilde{u}(x,t)$  с однородными начальными условиями:

$$\begin{cases} \tilde{p}_t + \rho \bar{c}^2 \tilde{u}_x = 0, \\ \tilde{u}_t + \frac{1}{\rho} \tilde{p}_x = 0, \end{cases} \quad 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (9)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}(x,0) = 0, \\ \tilde{p}(x,0) = 0, \end{cases} \quad 0 \leq x < +\infty, \quad \begin{cases} \tilde{u}(0,t) = 0, \\ \tilde{S}(0,t) = \mu(t) - \bar{S}, \end{cases} \quad t \geq 0,$$

где  $\bar{c}^2 = \bar{S}' / [\rho S'(\bar{p})]$ . Решение этой задачи находится методом продолжений [22, 23].

Если площадь поперечного сечения  $S$  линейно зависит от давления  $p$ ,

$$S(p) = S_0 + \theta(p - p_0), \quad dS/dp = \theta, \quad \theta = \text{const}, \quad (10)$$

а функция  $\mu(t)$  имеет вид

$$\mu(t) = \bar{S} + \theta A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} at\right), \quad t \geq 0, \quad (11)$$

где  $A$  – амплитуда сокращений на границе,  $\lambda$  – длина волны,  $a$  – параметр сокращений, то решение задачи (9) имеет вид

$$\tilde{p}(x,t) = \begin{cases} 0, & \bar{c}t - x < 0, \\ A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} a \left(t - \frac{x}{\bar{c}}\right)\right), & \bar{c}t - x > 0, \end{cases}$$

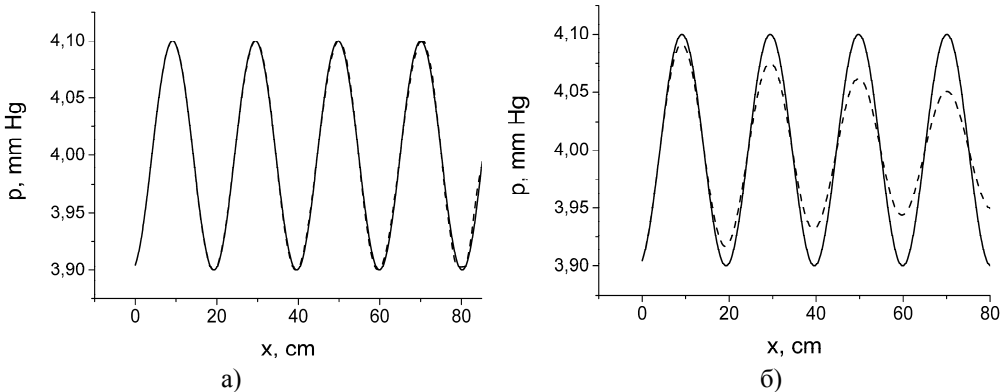
$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 0, & \bar{c}t - x < 0, \\ \frac{A}{\rho \bar{c}} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} a \left(t - \frac{x}{\bar{c}}\right)\right), & \bar{c}t - x > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Сравним полученное решение с численным решением задачи (3)–(6), (10), (11) для случая малых по амплитуде возмущений.

Расчет будем проводить на отрезке длины  $l$ , достаточно протяжённом по пространству. На левой границе  $x=0$  задано  $S(0,t)=\mu(t)$  (11),  $A=0.1$  мм рт.ст.,  $\lambda=0.1$  см,  $a=1$  см/с. Сравнение решений корректно при  $t < t_{\text{крил}}$ , где  $t_{\text{крил}} = l/\bar{c}$ , т.е. пока возмущение не дойдёт до правой границы расчётного отрезка. Остальные параметры расчета приведены в табл.1, для данных значений скорость звука  $\bar{c} \approx 203$  см/с, а  $t_{\text{крил}} \approx 0.49$  с.

Таблица 1.

Длина сосуда $l$	100 см
Минимальная площадь поперечного сечения сосуда $S_0$	$0.0081 \text{ см}^2$
Параметр $\theta$	$0.0003 \text{ см}^2/\text{мм рт.ст.}$
Давление $\bar{p}$	4 мм рт.ст.
Скорость $u(x,0)$	0 см/с
Шаг сетки по пространству $h$	0.1 см
Шаг сетки по времени $\tau$	0.001 с



**Рис.2.** Сплошная линия – аналитическое решение линеаризованной задачи, пунктирная линия – численное решение нелинейной задачи на момент времени 0.42 с. а) численное решение с весами  $\sigma_i = 0.5, i = 1,2,3,4$ ; б) численное решение с весами  $\sigma_i = 1, i = 1,2,3,4$ .

На рис.2 приведены результаты расчёта на момент времени 0.42 с, рис.2а соответствует весовым множителям  $\sigma_i = 0.5, i = 1,2,3,4$ , рис.2б –  $\sigma_i = 1, i = 1,2,3,4$ . Видно, что в обоих случаях численное решение (сплошная линия) соответствует аналитическому (пунктирная линия) по частоте и длине волны, что свидетельствует о правильном воспроизведении колебательного режима. При  $\sigma_i = 0.5, i = 1,2,3,4$  (рис.2а) схема имеет второй порядок аппроксимации, в первом приближении бездиссипативна [16], и численное решение с высокой точностью воспроизводит аналитическое. При  $\sigma_i = 1, i = 1,2,3,4$  (рис.2б) амплитуда численного решения убывает со временем по сравнению с амплитудой аналитического решения линеаризованной задачи. Уменьшение амплитуды связано с воздействием схемной диссипации, которая приводит к затуханию гармоник, и соответствует известным теоретическим и расчетным результатам для гиперболических систем [20, 15, 17, 18].

Приведенные расчеты показывают, что разностная схема (2) с рассматриваемыми граничными условиями правильно передает точное решение, а ее свойства по-прежнему описываются дифференциальным приближением [16, 17].

**3.2.** Рассмотрим задачу о течении в сосуде, сокращающемся в каждой точке. Причём рассмотрим данную задачу на всей действительной оси, чтобы избежать влияния граничных условий на решение.

Пусть уравнение состояния в системе (3) имеет вид

$$S = S(p, x, t) = S_0 + \theta(p - p_0) + \theta\eta(x, t). \quad (13)$$

Здесь первые два слагаемых выражают зависимость площади поперечного сечения от давления, а третье слагаемое описывает вынужденные сокращения стенок сосуда.

Рассмотрим систему (3), (13) на множестве  $-\infty < x < +\infty$ ,  $t > 0$  со следующими начальными условиями:

$$u(x, 0) = 0, \quad p(x, 0) = \bar{p}, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (14)$$

Действуя по аналогии с предыдущей задачей, при выполнении соотношений (7), условий (8) и условия на амплитуду вынужденных сокращений

$$|\eta(x, t)| \ll \bar{p}, \quad \forall x, t: -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \quad (15)$$

получим неоднородную линейную задачу с однородными начальными условиями:

$$\begin{cases} \tilde{p}_t + \rho \bar{c}^2 \tilde{u}_x = -\eta_t, \\ \tilde{u}_t + \frac{1}{\rho} \tilde{p}_x = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} \tilde{u}(x, 0) = 0, \\ \tilde{p}(x, 0) = 0, \\ -\infty < x < \infty, \quad t = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Решение этой задачи имеет вид [22]

$$\begin{aligned} \tilde{p}(x, t) &= -\frac{1}{2} \int_0^t (\eta_t(x - \bar{c}(t - \tau), \tau) + \eta_t(x + \bar{c}(t - \tau), \tau)) d\tau, \\ \tilde{u}(x, t) &= -\frac{1}{2\rho\bar{c}} \int_0^t (\eta_t(x - \bar{c}(t - \tau), \tau) - \eta_t(x + \bar{c}(t - \tau), \tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (17)$$

и для вынужденных сокращений с амплитудой  $A$ , длиной волны  $\lambda$  и скоростью распространения волны  $a$

$$\eta(x, t) = -A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - at)\right), \quad \eta_t(x, t) = -Aa \frac{2\pi}{\lambda} \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x - at)\right), \quad (18)$$

решение (17) принимает вид



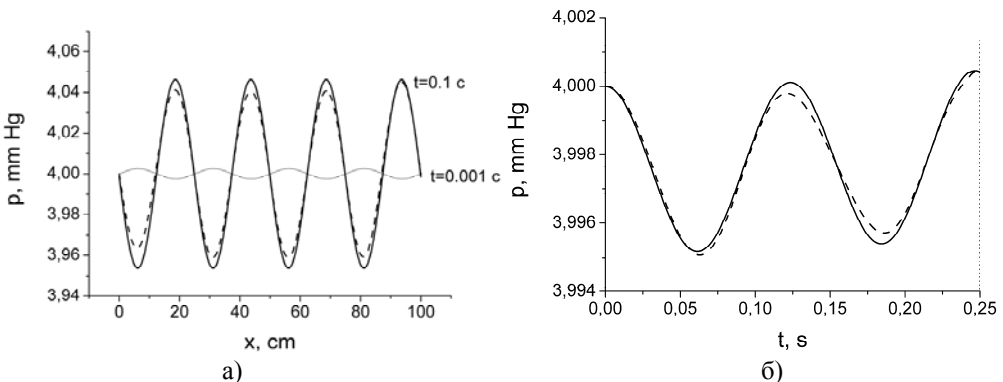
$$\tilde{p}(x, t) = -\frac{Aa}{2} \left[ \frac{\cos((2\pi/\lambda)(x-at)) - \cos((2\pi/\lambda)(x-\bar{c}t))}{\bar{c}-a} - \frac{\cos((2\pi/\lambda)(x-at)) - \cos((2\pi/\lambda)(x+\bar{c}t))}{\bar{c}+a} \right], \quad (19)$$

$$\tilde{u}(x, t) = -\frac{Aa}{2\rho\bar{c}} \left[ \frac{\cos((2\pi/\lambda)(x-at)) - \cos((2\pi/\lambda)(x-\bar{c}t))}{\bar{c}-a} + \frac{\cos((2\pi/\lambda)(x-at)) - \cos((2\pi/\lambda)(x+\bar{c}t))}{\bar{c}+a} \right], \quad (20)$$

где

$$\bar{c}^2 = \frac{\bar{S}}{\rho\theta}, \quad \bar{S} = S_0 + \theta(\bar{p} - p_0). \quad (21)$$

Снова сравним численное решение исходной задачи (3), (13), (14), (18), полученное с помощью конечно-разностной схемы (2),  $\sigma_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , для случая малых по амплитуде возмущений с точным решением линеаризованной задачи. Функция  $\eta(x, t)$  задана в соответствии с (21),  $A = 0.1$  мм рт.ст.,  $\lambda = 25$  см,  $a = 10$  см/с. На концах отрезка задано давление 4 мм рт.ст. Остальные параметры те же, что и в предыдущем расчете (табл.1). Поскольку численное решение ищется на конечном отрезке по пространству, сравнение численного решения с аналитическим возможно на ограниченном отрезке времени  $t < t_{cрыт}$ . При выбранных значениях параметров  $t_{cрыт} \approx 0,25$  с.



**Рис.3.** Результаты численного решения нелинейной задачи с малыми сокращениями в каждой точке и аналитическое решение линеаризованной задачи (сплошная линия): а) развёртка по пространству для времён 0.001 с и 0.1 с; б) развёртка по времени при  $t < 0.25$  с.

На рис.3а приведены графики давления для численного и аналитического решений рассматриваемой задачи в моменты времени  $t = 0.001$  с и

$t = 0.1$  с, рис.3б содержит график зависимости давления от времени для численного и аналитического решений при  $t < 0.25$  с. Результаты расчёта показывают, что численное решение хорошо согласуется с аналитическим решением.

Таким образом, схема (2) правильно передает в численном решении качественные и количественные характеристики и в случае пространственно распределенных сокращений.

#### 4. Нелинейный случай

**4.1.** Рассмотрим теперь неоднородную нелинейную задачу (1) с постоянным коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$  на конечном отрезке  $0 \leq x \leq l$ . Будем полагать, что уравнение состояния задано и имеет вид

$$S = S(t), \quad (22)$$

т.е. в каждый момент времени сосуд имеет постоянное по  $x$  сечение. Обозначим

$$u(0, t) = u_0(t), \quad p(0, t) = p_0(t). \quad (23)$$

Уравнение сохранения массы преобразуется к виду

$$\frac{dS}{dt} + S \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (24)$$

Интегрируя это уравнение, получим выражение для скорости  $u(x, t)$  в зависимости от функции  $S(t)$ :

$$u(x, t) = -\frac{S'(t)}{S(t)} x + u_0(t). \quad (25)$$

Уравнение движения запишем в виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + 8\pi\nu \frac{u}{S} \right]. \quad (26)$$

Подставим в правую часть (26) найденную функцию  $u(x, t)$ , проинтегрируем уравнение по  $x$  и получим выражение для  $p(x, t)$ . В результате решение системы (1), (22), (23) будет иметь вид

$$\begin{cases} u(x, t) = U(t)x + u_0(t), \\ p(x, t) = P_A(t) \frac{x^2}{2} + P_B(t)x + p_0(t), \\ 0 < x < l, \quad t > 0, \end{cases} \quad (27)$$

где

$$U(t) = -\frac{S'(t)}{S(t)}, \quad P_A(t) = -\rho \left[ U'(t) + U^2(t) - k \frac{U(t)}{S(t)} \right], \quad (28)$$

$$P_B(t) = -\rho \left[ u_0'(t) + u_0(t)U(t) - k \frac{u_0(t)}{S(t)} \right], \quad k = -8\pi\nu.$$

Для завершения решения необходимо дополнить эти формулы граничными условиями, с помощью которых находятся пока не определенные функции  $u_0(t)$  и  $p_0(t)$ .

Рассмотрим некоторые варианты задания граничных условий.

Пусть на обеих границах задано давление

$$p(0,t) = p_0(t), \quad p(l,t) = p_1(t), \quad t > 0. \quad (29)$$

Подставим выражение для давления из (27) во второе условие (29) и получим обыкновенное дифференциальное уравнение для скорости на левой границе  $u_0(t)$

$$u_0'(t) + a(t)u_0(t) + b(t) = 0, \quad (30)$$

где

$$a(t) = U(t) - \frac{k}{S(t)}, \quad b(t) = \frac{l}{2} \left( U'(t) + U^2(t) - k \frac{U(t)}{S(t)} \right) - \frac{p_0(t) - p_1(t)}{\rho l}, \quad (31)$$

и из этого уравнения находим  $u_0(t)$ .

Формулы (27), (28) и полученная из (30) функция  $u_0(t)$  определяют решение задачи (1), (22), (29).

Рассмотрим частный случай граничных условий, соответствующих равенству давлений на границах отрезка

$$p(0,t) = p(l,t) = p_0(t), \quad t > 0. \quad (32)$$

В этом случае при постоянном коэффициенте кинематической вязкости  $\nu$  решение будет обладать свойством симметрии:

$$u(0,t) = -u(l,t), \quad t > 0. \quad (33)$$

Подстановка функции скорости из (27) в равенство (33) даёт явное выражение для скорости жидкости на левой границе

$$u_0(t) = -\frac{U(t)l}{2}. \quad (34)$$

Такая функция  $u_0(t)$  обращает (30) в тождество, т.е. свойство симметрии

(33) позволяет избежать прямого решения уравнения (30). Формулы (27), (28), (34) определяют решение задачи (1), (22), (32).

Полученные решения достаточно громоздки, и для произвольных функций  $S(t)$  анализ этих решений представляет собой весьма трудоемкую задачу.

Рассмотрим характер решения для простого, но вполне содержательного случая.

Если сокращения (22) задаются синусоидальной функцией, то при малых значениях параметров и на малых временах такая функция может быть приближена линейной

$$S = S_0 + at, \quad (35)$$

где  $a$  – скорость изменения сечения со временем, и представление о характерных течениях в этом случае можно получить, анализируя решение системы с простейшим уравнением состояния (35). Заметим, что размерность параметра  $a$  совпадает с размерностью коэффициента кинематической вязкости.

Рассмотрим задачу (1), (35), (32). Решение этой задачи определяется формулами (27), (28), (34), которые с учётом (35) преобразуются к простому виду

$$\begin{cases} u(x, t) = \frac{a}{S_0 + at} \left( \frac{l}{2} - x \right), \\ p(x, t) = -\frac{\rho a}{2(S_0 + at)^2} (2a + k)x^2 + \frac{\rho a}{2(S_0 + at)^2} (2a + k)lx + p_0(t). \end{cases} \quad (36)$$

Решение (36), как и в общем случае (27), имеет линейный по  $x$  профиль скорости и параболический по  $x$  профиль давления. Давление достигает экстремального значения в точке  $x = l/2$ , и это значение определяется выражением

$$p_{cрт} = p_0(t) + \frac{\rho a(a - 4\pi\nu)l^2}{4S(t)^2}. \quad (37)$$

В зависимости от значения параметра  $a$ , который определяет знак коэффициента  $(2a+k) = 2(a-4\pi\nu)$ , возможны различные типы решений.

А. Пусть  $a < 0$ . В этом случае коэффициент  $(2a+k)$  отрицателен, график давления представляет собой параболу с ветвями вниз. Площадь поперечного сечения убывает с течением времени, т.е. сосуд сжимается. При этом давление растёт к середине отрезка, скорость направлена от его середины, максимальное давление достигается на середине отрезка и определяется в соответствии с (37).

Пусть  $a > 0$ , что соответствует расширяющемуся сосуду. В этом случае возможны два варианта течения в зависимости от величины  $a$ .

В. При  $0 < a < 4\pi v$  коэффициент  $(2a+k) < 0$ . Площадь поперечного сечения сосуда увеличивается с течением времени, давление в середине отрезка достигает минимального значения (37), скорость направлена от границ отрезка к его середине.

С. Третий вариант течения возникает при  $a > 4\pi v$ , когда  $(2a+k) > 0$ , что соответствует «быстрому» увеличению площади поперечного сечения сосуда. График функции давления представляет собой параболу с ветвями, направленными вниз, максимального значения (37) давление достигает в середине отрезка. В рассматриваемом случае давление в середине со временем увеличивается, а скорость по-прежнему направлена от границ отрезка к его середине – против градиента давления. Это решение представляется достаточно интересным, поскольку его физическая интерпретация не очевидна. Тем не менее оно не является спецификой квазиодномерного подхода. Например, в работе [11], в которой рассматривается течение в двумерной пульсирующей трубке, описана похожая ситуация, однако авторы этой работы сочли ее нефизической.

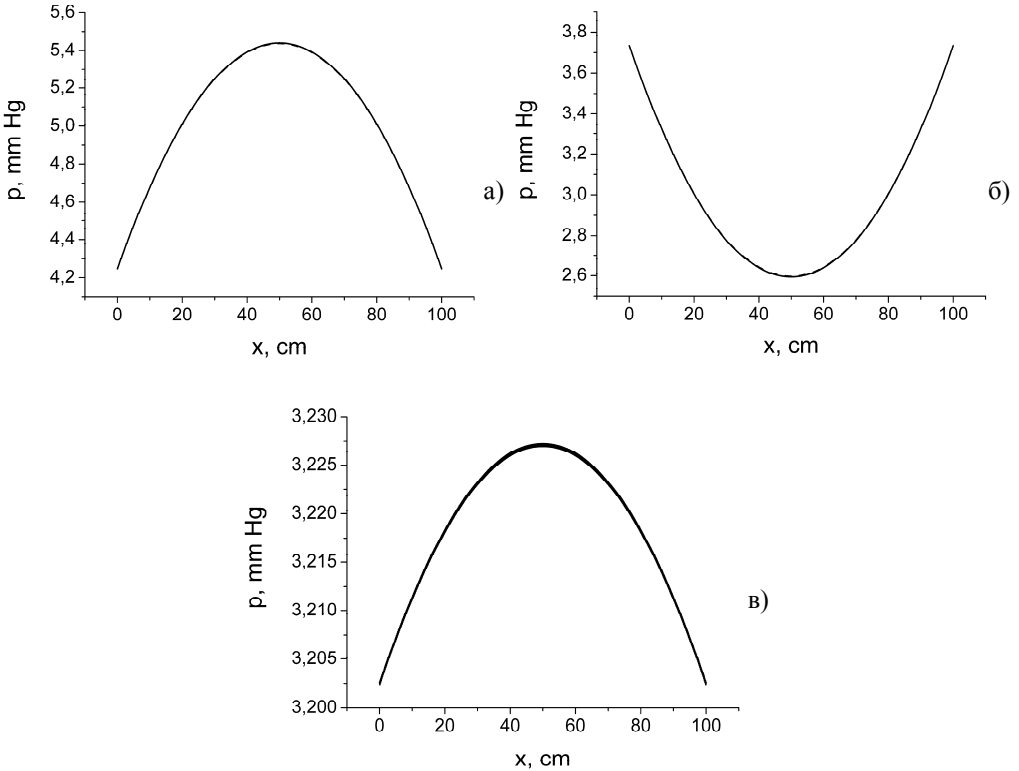
Как следует из рассмотренного примера, даже для простейшего закона изменения сечения возможно (по крайней мере, формально) возникновение нетривиальных течений.

Проведем сравнение точного аналитического и численного решений во всех трех случаях. Расчётная область представляет собой три смежных отрезка на одной прямой. На граничных отрезках уравнение состояния имеет вид (10), на центральном отрезке уравнение состояния имеет вид (35). На границах расчётной области задано постоянное давление. Численное решение получим по той же, что и в предыдущих расчетах, разностной схеме,  $\sigma_i = 1$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Параметры сосудов приведены в табл. 1. Результаты расчёта и соответствующие аналитические решения для вариантов А и В показаны на рис.4а, 4б. Численное решение на центральном отрезке полностью совпадает с аналитическим и качественно, и количественно, максимум модуля разности между значениями давления, полученными аналитически и численно, и относительная погрешность приведены в табл.2.

Точное и численное решения для варианта С получены для сосудов большего сечения (скорость изменения просвета достаточно велика) и представлены на рис.4в. Они также совпадают.

Таблица 2

	вариант А	вариант В	вариант С
$\max \left( \left  p_{analyt} - p_{numeric} \right  \right)$ (мм рт.ст.)	0.003	0.003	0.0003
$\max \left( \left  \frac{p_{analyt} - p_{numeric}}{p_{analyt}} \right  \right) * 100$ (%)	0.05	0.11	0.009



**Рис.4.** Результаты численного решения (сплошная линия) нелинейной задачи о сокращениях и сравнение их с аналитическим решением (пунктирная линия). а) Вариант А:  $a = -10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$  ( $a < 0$ ), развёртка по пространству при  $t = 1 \text{ с}$ ; б) Вариант В:  $a = 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}$  ( $0 < a < 4\pi\nu$ ), развёртка по пространству при  $t = 1 \text{ с}$ ; в) Вариант С:  $a = 0.6 \text{ см}^2/\text{с}$  ( $a > 4\pi\nu$ ),  $S = 2 \text{ см}^2$ , развёртка по пространству при  $t = 0.2 \text{ с}$ .

**4.2.** Интересным представляется точное решение рассматриваемой задачи для течения с переменной вязкостью. Такая постановка задачи в дальнейшем может быть использована для моделирования течения в лимфатических сосудах с частыми клапанами, рассматриваемых как активно сокращающиеся сосуды с преимущественным направлением тока жидкости.

Рассмотрим следующую неоднородную нелинейную систему:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} + S \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -8\pi\nu(u) \frac{u}{S}, \\ S = S(t), \\ 0 < x < l, \quad t > 0. \end{cases} \quad (38)$$

Такая постановка совпадает с рассмотренной ранее задачей (1), (22), (23), только теперь коэффициент кинематической вязкости  $\nu$  зависит от скорости  $u(x,t)$ . Решение задачи (38), (23) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x,t) = u_0(t) - \frac{S'}{S} x, \\ p(x,t) = p_0(t) + \rho \left[ \frac{1}{2} \frac{S''}{S} - \left( \frac{S'}{S} \right)^2 \right] x^2 + \rho \left[ u_0(t) \frac{S'}{S} - u_0'(t) \right] x + \\ \quad + 8\pi\rho \frac{S'}{S^2} Ix - 8\pi\rho \frac{u_0(t)}{S} I - 8\pi\rho \frac{S'}{S^2} \int_0^x I(\xi,t) d\xi, \end{array} \right. \quad (39)$$

где

$$I = I(x,t) = \int_0^x \nu(u(\xi,t)) d\xi. \quad (40)$$

В данном случае решение также имеет линейный по  $x$  профиль скорости. Функция давления содержит параболическую составляющую (как и ранее) и часть, определяемую интегралом (40), порожденным переменной вязкостью. Представленное решение является многопараметрическим и существенно зависит от вида функции  $\nu(u)$ , однако доступно для аналитического и численного исследования [24].

### Заключение

В работе получены некоторые точные решения линеаризованных и нелинейных уравнений гемодинамики, описывающих течения жидкости в сосуде при вынужденных сокращениях в квазиодномерном приближении. Эти решения позволяют получить представление о характере возникающих течений. Кроме того, точные решения использованы в качестве тестовых и показано, что применяемый авторами вычислительный алгоритм хорошо их воспроизводит. Представленные результаты могут использоваться для создания простой модели сокращений лимфатических сосудов в рамках квазиодномерного приближения.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э.И. Борзяк, В.Я. Бочаров, М.Р. Сапин. Анатомия человека. – М.: Медицина, 1993, 560с.; E.I. Borziak, V.Ia. Bocharov, M.R. Sapin. Anatomiiia cheloveka. – М.: Meditsina, 1993, 560 s.
2. В.М. Петренко. Лимфатическая система. Анатомия и развитие. – Спб.: ДЕАН, 2010, 112с.; V.M. Petrenko. Limfaticheskaia sistema. Anatomiiia i razvitie. – Spb.: DEAN, 2010, 112 s.
3. N.P. Reddy, T.A. Krouskop, P.H.Jr. Newell. Biomechanics of a lymphatic vessel // Blood vessels, 1975, v.12, №5, p.261-278.

4. C.M. Quick, A.M. Venugopal, A.A. Gashev, D.C. Zawieja, R.H. Stewart. Intrinsic pump-conduit behavior of lymphangions // Am. J. Physiol. Regul. Integr. Comp. Physiol., 2007, v.292, №4, p.R1510-R1518.
5. C.D. Bertram, C. Macaskill, J.E.Jr. Moore. Simulation of a chain of collapsible contracting lymphangions with progressive valve closure // J. Biomech. Eng., 2011, v.133, №1, p.011008.
6. A.J. Macdonald, K.P. Arkill, G.R. Tabor, N.G. McHale, C.P. Winlove. Modeling flow in collecting lymphatic vessels: one-dimensional flow through a series of contractile elements // Am. J. Physiol. Heart. Circ. Physiol., 2008, v.295, №1, p.305-313.
7. E. Rahbar, J.E.Jr. Moore. A model of a radially expanding and contracting lymphangion // J. Biomech., 2011, v.44, №6, p.1001-1007.
8. S. Uchida, H. Aoki. Unsteady flows in a semi-infinite contracting or expanding pipe // J. Fluid Mech., 1977, v.82, p.371-387.
9. M.G. Blyth, P. Hall, D.T. Papageorgiou. Chaotic flows in pulsating cylindrical tubes: a class of exact Navier-Stokes solutions // J. Fluid Mech., 2003, v.481, p.187-213.
10. F.M. Skalak, C.Y. Wang. On the unsteady squeezing of a viscous fluid from a tube // J. Austral. Math. Soc., 1979, v.21, p.65-74.
11. O.D. Makinde. Collapsible tube flow: a mathematical model // Rom. Journ. Phys, 2005, p.493-506.
12. Д.В. Князев, И.Ю. Колпаков. Точные решения задачи о течении вязкой жидкости в цилиндрической области с меняющимся радиусом // Нелинейная динамика, 2015, т.11, №1, с.89-97;  
D.V. Kniazev, I.Yu. Kolpakov. Tochnye resheniia zadachi o techenii вязкой жидкости в тсилндрической области с меняющимся радиусом // Nelineinaiia dinamika, 2015, t.11, №1, s.89-97.
13. С.А. Регирер. Квазидномерная теория перистальтических течений // Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, №5, с.89-97;  
S.A. Regirer. Kvazidnomernaiia teoriia peristalticheskikh techenii // Izv. AN SSSR, MZHG, 1984, №5, s.89-97.
14. О.А. Дудченко. Перистальтический транспорт в биологических системах: базовые модели и явные асимптотические решения. – М.: МФТИ, 2012, автореферат диссерт. ... канд. физ.-мат. наук;  
O.A. Dudchenko. Peristalticheskii transport v biologicheskikh sistemakh: bazovye modeli i iavnye asimptoticheskie resheniia. – М.: MFTI, 2012, avtoreferat dissert. ... kand. fiz.-mat. nauk.
15. М.В. Абакумов, Н.Б. Есикова, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский. Разностная схема решения задач гемодинамики на графе. – М.: Диалог-МГУ, 1998, препринт, 16 с.;  
M.V. Abakumov, N.B. Esikova, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii. Raznosnnaia schema resheniia zadach gemodinamiki na grafe. – М.: Dialog-MGU, 1998, preprint, 16s.
16. М.В. Абакумов, И.В. Ашметков, Н.Б. Есикова, В.Б. Кошелев, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, В.Ф. Тишкин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы // Математ. моделир., 2000, т.12, №2, с.106-117;  
M.V. Abakumov, I.V. Ashmetkov, N.B. Esikova, V.B. Koshelev, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii, A.B. Khrulenko. Metodika matematicheskogo modelirovaniia serdechno-sosudistoi sistemy // Matemat. modelir., 2000, t.12, №2, s.106-117.
17. И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко. Численное



- исследование свойств разностной схемы для уравнений гемодинамики. – М.: Диалог-МГУ, 1999, препринт, 14 с.
- I.V. Ashmetkov, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, A.P. Favorskii, A.B. Khrulenko.* Chislennoe issledovanie svoistv raznostnoi skhemy dlia uravnenii gemodinamiki. – М.: Dialog MGU, 1999, preprint, 14 s.
18. *И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко.* Анализ и сравнение некоторых аналитических и численных решений задач гемодинамики // Дифференциальные уравнения, 2000, т.36, №7, с.919-924;  
*I.V. Ashmetkov, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, A.P. Favorskii, A.B. Khrulenko.* Analysis and comparison of some analytic and numerical solutions of hemodynamic problems // Differential Equations. 2000, v.36, №7, p.1021-1026.
19. *M.V. Abakumov, K.V. Gavriluk, N.B. Esikova, A.V. Lukshin, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, V.F. Tishkin, A.P. Favorskii.* Mathematical model of the hemodynamics of the cardio-vascular system // Differential Equations, 1997, v.33, №7, p.895-901;
20. *А.А. Самарский, Ю.П. Попов.* Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992, 424 с.;  
*A.A. Samarskii, Yu.P. Popov.* Raznostnye metody resheniia zagach gazovoi dinamiki. – М.: Nauka, 1992, 424 s.
21. *E.C. Dauenhauer, J. Majdalani.* Unsteady Flows in Semi-Infinite Expanding Channels with Wall Injection // 30th Fluid Dynamics Conference, Fluid Dynamics and Co-located Conferences, 1999.
22. *И.В. Ашметков, С.И. Мухин, Н.В. Соснин, А.П. Фаворский, А.Б. Хруленко.* Частные решения уравнений гемодинамики. – М.: Диалог-МГУ, 1999, препринт, 43 с.;  
*I.V. Ashmetkov, S.I. Mukhin, N.V. Sosnin, A.P. Favorskii, A.B. Khrulenko.* Chastnye resheniia uravnenii gemodinamiki. – М.: Dialog-MGU, 1999, preprint, 43 s.
23. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 1999, 798 с.  
*A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii.* Uravneniia matematicheskoi fiziki. – М.: Izd-vo MGU, 1999, 798 s.
24. *А.С. Мозохина, С.И. Мухин.* О квазиодномерном течении жидкости с анизотропной вязкостью в сокращающемся сосуде // Дифференциальные уравнения, 2018, т.54, №7, с.956–962;  
*A.S. Mozokhina, S.I. Mukhin.* Quasi-one-dimensional flow of a fluid with anisotropic viscosity in a pulsating vessel // Differential Equations, 2018, v.54, №7, p.938–944.

Поступила в редакцию 20.06.2017

После доработки 29.05.2018

Принята к публикации 18.06.2018