

## **ОПТИМАЛЬНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА ВНУТРИ ОБЛАСТЕЙ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

© 2019 г. *О.В. Осипов, А.Г. Брусенцев*

Белгородский государственный технологический университет  
им. В.Г. Шухова [ov.osipov@gmail.com](mailto:ov.osipov@gmail.com), [brusentsev@mail.ru](mailto:brusentsev@mail.ru)

Статья подготовлена в рамках программы развития опорного университета на базе БГТУ им. В.Г. Шухова

DOI: 10.1134/S0234087919040014

Рассматриваются алгоритмы оптимального расположения источников тепла с объёмным тепловыделением внутри областей сложной геометрической формы. Найденное распределение обладает минимальной суммарной мощностью и обеспечивает температуру в заданном температурном коридоре. Строятся конечномерные аппроксимации исходной задачи в виде задачи линейного программирования. Приводится метод построения конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности, краткое описание разработанных программных модулей для построения расчётных сеток и решения уравнений. С использованием разработанных программ проведено несколько вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: обратная задача теплопроводности, плотность источников тепла, задача оптимального управления для эллиптических краевых задач, конечномерная аппроксимация, тепловой баланс, симплекс-метод, расчётная сетка.

### **OPTIMAL LOCATION OF HEAT SOURCES INSIDE AREAS OF COMPLEX GEOMETRIC FORMS**

*O.V. Osipov, A.G. Brusentsev*

Shukhov Belgorod State Technological University

The article was prepared within a development program of the Base V.G. Shukhov University on the basis of BSTU

Algorithms for the optimal arrangement of heat sources with volumetric heat release within regions of a complex geometric shape are considered. The distribution found has the minimum total power and provides the temperature in the given temperature corridor. Finite-dimensional approximations of the original problem are constructed in the form of a linear programming problem. A method is given for constructing a finite-difference scheme for solving the heat equation, a brief description of the developed software mod-

ules for constructing grids and solving equations. Several computer experiments have been carried out using the developed programs.

Keywords: inverse heat conduction problem, density of heat sources, optimal control problem for elliptic boundary value problems, finite-dimensional approximation, heat balance, simplex method, computational grid.

## 1. Введение

В работе решается задача нахождения такого распределения источников тепла, которое обеспечивает при минимальной суммарной интенсивности этих источников заданный температурный режим в области, находящейся в условиях стационарного теплового баланса с окружающей средой. Предполагается, что среда внутри области неподвижна, а процесс теплопередачи установлен.

Наиболее распространённый подход при решении оптимизационных задач теплопроводности заключается в использовании принципов оптимального управления (см. [1,2]), практическое использование которых часто встречает значительные трудности. Использовался также метод выбора оптимального варианта размещения источников из множества возможных способов на основе метода ветвей и границ [3]. Подобные методы перебора имеют ограниченную применимость. В работах ряда авторов (см., например, [4-7]) рассматривалась задача отыскания такого распределения источников, которое бы создавало температурное поле, наименее отличающееся от заданного. Однако на практике обычно необходимо экономить тепловую энергию, а не минимизировать отклонение температурного поля. Так в инженерной работе [8] с технической точки зрения рассматривается задача минимизации тепловых потерь через границы при условии поддержания необходимой температуры внутри помещения. Такая постановка задачи более естественна и, по сути, совпадает с нашей. В настоящей работе и решается эта задача минимизации энергозатрат, а предлагаемый подход позволяет использовать линейный целевой функционал и приближенно свести исходную задачу оптимизации обогрева к задаче линейного программирования.

В [9-11] рассматривались такие задачи расчёта оптимального обогрева простых геометрических областей: отрезка, прямоугольника и параллелепипеда. Для решения уравнений теплопроводности при этом использовались конечно-разностные схемы на равномерных прямоугольных сетках. В данной работе представлены алгоритмы численного расчёта оптимального расположения источников тепла внутри трёхмерных областей сложной формы, составленных из простейших многогранников произвольного типа (тетраэдров, октаэдров, призм и других форм), близких к правильным. Существуют различные стандартные форматы для хранения расчётных сеток

(например, разработанных Ansys, Solidworks и др.), позволяющие описывать сложные геометрические объекты. Расчётная сетка области при этом может быть автоматически построена в какой-либо CAD-системе, сохранена, а затем использована в других приложениях. В разработанных алгоритмах использован формат Tetra10 (область разбита на тетраэдры), а исходные сетки для области, имеющей форму теплицы, построены в программе SolidWorks. Изначально такая исходная сетка не содержит информации об имеющихся источниках тепла, т.е. в ней нет элементарных объёмов, повторяющих форму источников. Поэтому требуется специальная процедура включения источника в уже существующую сетку. Данная процедура, описанная ниже, модифицирует расчётную сетку и увеличивает её плотность, разбивая элементарные объёмы. После подготовки расчётной сетки и построения конечно-разностной схемы для решения уравнения теплопроводности решается оптимизационная задача методами, подобными описанным в [9].

## 2. Исходная постановка задачи. Конечномерная аппроксимация

В ограниченной связной области  $D \subset R^3$  требуется построить функцию  $f(\mathbf{x}) \geq 0$ , удовлетворяющую следующим условиям:

$$J\{f\} = \int_{D_f} f dV \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$\chi \Delta u + f = 0, \quad (\chi \partial u / \partial n + \alpha u) \Big|_{\partial D} = 0, \quad (2)$$

$$m(\mathbf{x}) - T_0 \leq u(\mathbf{x}) \leq M(\mathbf{x}) - T_0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in \tilde{D} \subseteq D, \quad (3)$$

$$f(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{при } \mathbf{x} \in D_0, \quad D = D_0 \cup D_f, \quad (4)$$

где  $\chi$  – теплопроводность среды,  $\alpha$  – коэффициент теплопередачи через границу  $\partial D$  во внешнюю среду,  $T_0$  – температура внешней среды,  $m(\mathbf{x})$ ,  $M(\mathbf{x})$  – соответственно нижний и верхний температурные профили. Действительная температура внутри области  $D$  после решения системы (2) определяется как  $T(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}) + T_0$ . Внутри области  $D$  выделено несколько подобластей:  $D_f$  – область расположения источников тепла,  $\tilde{D}$  – область контроля температуры.

Вводя функцию Грина  $G(\mathbf{x}, \xi)$  для решения системы (2) заменим условия (2), (3) следующим:

$$m(\mathbf{x}) - T_0 \leq -\frac{1}{\chi} \int_{\xi \in D} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dV \leq M(\mathbf{x}) - T_0, \quad \mathbf{x} \in \tilde{D}. \quad (5)$$

Построим конечномерную аппроксимацию исходной задачи (1), (4), (5) в виде задачи линейного программирования. Для этого разобьём область  $D_f$  на множество из  $n$  ячеек-источников:  $D_f = \bigcup_{j=1}^n D_j$ , а область контроля  $\tilde{D}$

разделим на  $m$  частей:  $\tilde{D} = \bigcup_{k=1}^m \tilde{D}_k$ .

Определим функции  $e_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) и  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) следующим образом:

$$e_j(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in D_j \\ 0, & \mathbf{x} \notin D_j, \end{cases} \quad t_k(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in \tilde{D}_k \\ 0, & \mathbf{x} \notin \tilde{D}_k. \end{cases}$$

Функцию плотности источников  $f$  будем искать в виде кусочно-постоянной функции  $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n f_j e_j(\mathbf{x})$ . Введём оператор  $Gf = -\frac{1}{\chi} \int_{\xi \in D} G(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dV =$

$= \sum_{j=1}^n f_j G e_j$ . Выполним независимо скалярное умножение (5) на каждую из

функций  $t_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) и, обозначив  $a_k = (m(\mathbf{x}) - T_0, t_k)$ ,  $b_k = (M(\mathbf{x}) - T_0, t_k)$ ,  $g_{kj} = (G e_j, t_k)$ , аппроксимируем исходную задачу (1), (4), (5) в виде

$$a_k \leq \sum_{j=1}^n f_j g_{kj} \leq b_k, \quad (6)$$

$$J_n\{f\} = \sum_{j=1}^n (\text{mes} D_j) f_j \rightarrow \min, \quad f_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Обозначим также  $(J_n)_{\min}$  – минимальное значение целевой функции задачи (6) с  $n$  переменными. Полученную систему (6) можно решить одним из методов линейного программирования, например, симплекс-методом с использованием искусственного базиса. Изменяя параметры подобласти  $D_j$ , можно регулировать наличие источников в определённых частях области  $D$ . Возможно также помещение внутрь  $D$  некоторых фиксированных источников (с заранее заданной мощностью) до оптимизации. Для этого нужно задать необходимым источникам  $f_j$  заданное значение мощности до решения системы (6). В этом случае в симплекс-таблице уменьшится количество столбцов, а в строке целевой функции появится свободный член.

В [9] показано, что последовательность конечномерных задач (6) с различными  $n$  обладает свойством регулярности по функционалу. Последнее означает, что члены последовательности  $(J_n)_{\min}$  с ростом  $n$  (точнее при

$\max(\text{diam}D_j) \rightarrow 0$ ) приближаются к нижней грани функционала (1). Это свойство позволяет при достаточно большом  $n$  считать решение конечномерной задачи (6) приближённым решением исходной задачи (1)-(4).

### 3. Решение уравнения теплопроводности и построение обменной матрицы $g_{kj}$

Самым трудным с вычислительной точки зрения является нахождение элементов обменной матрицы  $g_{kj}$ . В одномерном случае, если известна функция Грина  $G(\mathbf{x}, \xi)$  для решения краевой задачи (2), матрицу  $g_{kj}$  можно строить аналитически. В многомерном случае, тем более для области сложной формы, построить функцию  $G(\mathbf{x}, \xi)$  очень сложно, но функции  $u_j = Ge_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) можно находить приближённо как решения уравнений  $\chi \Delta u_j + e_j = 0$  с использованием конечно-разностных методов. Для построения всей обменной матрицы  $g_{kj}$  необходимо решить  $n$  прямых задач теплопроводности. Каждое решение  $u_j$  представляет собой температурное поле, полученное в результате нагревания области  $D$  единичным источником  $f=e_j$ . После нахождения решения  $u_j$  необходимо вычислить среднее значение функции  $u_j$  в подобластях  $\tilde{D}_k$  ( $k=1, \dots, m$ ), заполнив  $j$ -е столбцы матрицы  $g_{kj}$  значениями  $g_{kj} = (u_j, t_k)$ . Блок-схема построения обменной матрицы в общем случае приведена в [9].

Построим приближённый алгоритм решения уравнения (2), используя метод конечных объёмов. Пусть  $n_E$  – количество ячеек конечно-разностной схемы, а исходная область  $D$  разбита на небольшие объёмы  $D = \bigcup_{i=1}^{n_E} E_i$ , каждый из которых представляет собой выпуклый многогранник с произвольным количеством граней. Функцию  $u(x)$  аппроксимируем в виде кусочно-постоянной функции  $y_i$  ( $i=1, \dots, n_E$ ). Отметим, что объёмы  $E_i$  имеют небольшой размер по сравнению с размерами источников  $D_j$ . При этом объёмы  $D_j$  и  $E_i$  не пересекаются гранями, т.е.  $E_i$  полностью поглощаются некоторыми  $D_j$ .

Запишем для произвольно выбранной ячейки  $E_i$  с центром тяжести в  $O_i$  (рис.1) уравнение теплового баланса (2) в интегральной форме, сразу преобразуя объёмный интеграл в поверхностный в первом слагаемом:

$$\int_{E_i} (\chi \Delta u + f) dV = \int_{\partial E_i} \chi \frac{\partial u}{\partial n} dS + \int_{E_i} f dV = 0. \quad (7)$$

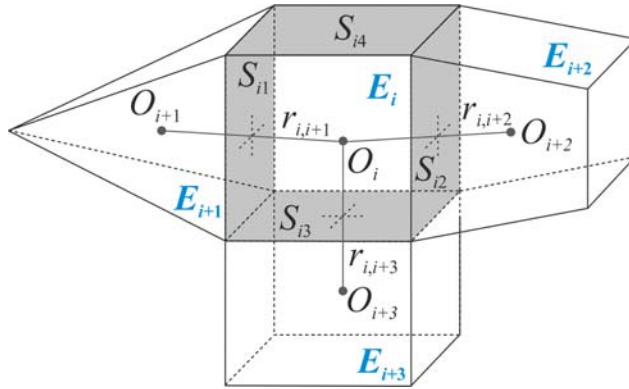


Рис.1. Ячейки расчётной сетки области  $D$ .

Пусть граница ячейки  $E_i$  состоит из  $p$  многоугольников  $S_{il}$  ( $l=1, \dots, p$ ). Запишем первое слагаемое в виде

$$\int_{\partial E_i} \chi \frac{\partial u}{\partial n} dS = \sum_{l=1}^p \int_{\partial E_{il}} \chi \frac{\partial u}{\partial n} dS.$$

Каждый из многоугольников  $S_{il}$  может соприкасаться либо с некоторой соседней ячейкой  $E_{i+l}$ , либо быть элементом границы области  $D$ . В первом случае тепловой поток аппроксимируется разностным оператором градиента [12, с.730]:

$$\chi \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial E_{il}} \approx \chi \frac{y_{i+l} - y_i}{r_{i,i+l}},$$

где  $r_{i,i+l}$  – расстояние между центрами тяжести ячеек  $E_i$  и  $E_{i+l}$ . Поскольку перед построением сетки область разбивается на многогранники, близкие к правильным, то отрезок, соединяющий центры тяжести соседних ячеек, почти ортогонален разделяющей грани (является нормалью). Поэтому такую аппроксимацию можно считать правомерной. Во втором случае, если  $S_{il}$  граничит с внешней средой, то согласно краевому условию (2)

$$\chi \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial E_{il}} \approx -\alpha y_i.$$

Далее аппроксимируем (7) в виде

$$\sum_{l=1}^q (y_{i+l} - y_i) (\chi \text{mes} S_{il} / r_{i,i+l}) - \sum_{l=q+1}^p y_i (\alpha \cdot \text{mes} S_{il}) + b_i = 0, \quad b_i = \int_{E_i} f dV,$$

где  $q$  – количество граней, сообщающихся с другими гранями,  $p-q$  – количество приграничных с внешней средой граней.

Построенные аналогичным образом равенства для каждого элементарного объёма  $E_i$  ( $i=1, \dots, n_E$ ) образуют самосопряжённую систему линейных уравнений относительно неизвестных  $y_i$ , которую удобно решать одним из итерационных методов, например, параллельным методом сопряженных градиентов [13].

#### 4. Структура расчётной сетки области $D$ . Включение источников тепла в расчётную сетку.

Исходная сетка в формате Tetra10 представляет собой совокупность тетраэдров, грани которых в общем случае пересекают поверхность тепловых источников  $D_j$ , что не позволяет построить конечно-разностную схему, т.е. такая сетка ещё не является готовой. Источники  $D_j$  должны либо полностью поглощать некоторые объёмы  $E_i$ , либо не пересекаться с ними. Для этого необходимо выполнить специальную процедуру разбиения исходной сетки и включить в неё источники. Представим исходную сетку в виде совокупности ячеек  $E'_i$  ( $i=1, \dots, n'$ ),  $D = \bigcup_{i=1}^{n'} E'_i$ . Предположим, что некоторый

источник  $D_j$  пересекает объём  $E'_i$ . Объём  $E'_i$  в этом случае нужно разбить на два объёма  $E'_{i1}$  и  $E'_{i2}$  (рис.2).

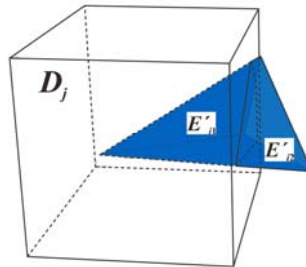


Рис.2. Разбиение элементарного объёма  $E'_i$  на 2 две части.

Так как сетка содержит большое число многогранников, то необходимо данное разбиение выполнить для всех источников  $D_j$  и окружающих их объёмов  $E'_i$ . На рис.3 представлены основные классы и их свойства геометрического ядра wavesolver, предназначенного для построения конечно-разностных схем, создания и изменения расчётных сеток.

Ядро wavesolver использует следующие классы:

1. **Polygon** (многоугольник) представляет собой массив точек (Vertex  $V[]$ ), лежащих на одной плоскости. При разделении многоугольника плоскостью (Plane plane) с помощью функции halve в переменных  $P_1$  и  $P_2$  сохраняются ссылки на полученные многоугольники.  $E_1$  и  $E_2$  хранят ссылки на

соседствующие элементарные объёмы, содержащие текущий многоугольник,  $L$  – на сопряжённый многоугольник, принадлежащий соседнему многограннику. Функция `intersects` проверяет пересечение многоугольников, `getMes` – возвращает площадь текущего многоугольника. Для хранения параметров краевого условия (род, значение коэффициента теплопередачи) на границе, включающей данный многоугольник, предусмотрен класс `BoundsCondition`.

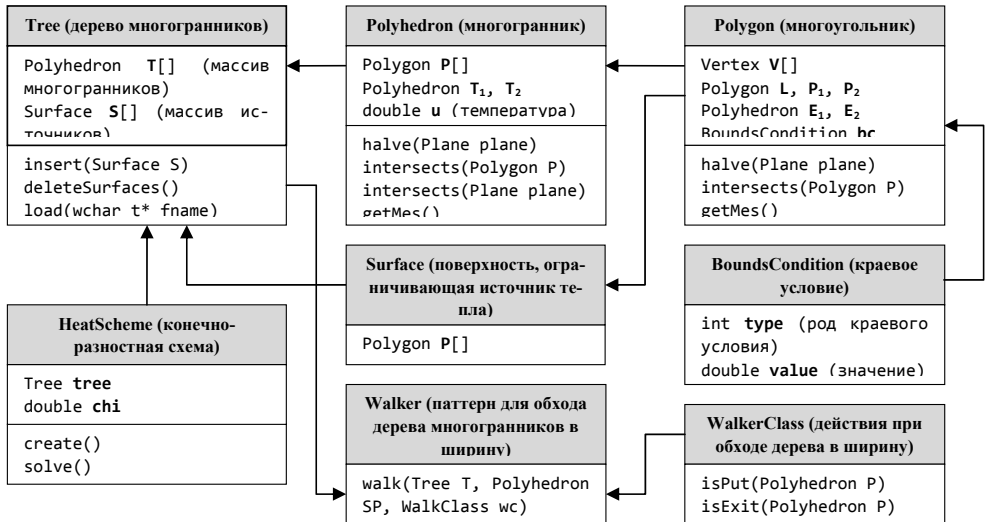


Рис.3. Структурная схема классов геометрического ядра `wavesolver`.

2. **Polyhedron** (выпуклый многогранник) состоит из массива многоугольников (`Polygon P[]`). При разделении многогранника плоскостью с помощью функции `halve(Plane plane)` образуется два дочерних многогранника:  $E_1$  и  $E_2$ . Если нужно разделить многогранник, но он уже был ранее разделён, то рекурсивно разделяются его дочерние объёмы и таким образом формируется дерево многогранников. Функции `intersects` с разными параметрами проверяют пересечение многогранника с многоугольником или плоскостью, `getMes` возвращает объём текущего многогранника.

3. **Surface** (ограничивающая поверхность) описывает любую поверхность, составленную из массива многоугольников (`Polygon P[]`), например, свободную поверхность при моделировании движения жидкости или поверхность твёрдого тела. В работе с помощью объектов данного класса ограничиваются источники тепла.

4. **Tree** (дерево многогранников) представляет собой древовидную структуру, на вершине которой находится массив многогранников (`Polyhedron T[]`). Ветви и листья дерева образуются в результате разбиения многогранников. Полученную структуру можно также рассматривать как граф, по-

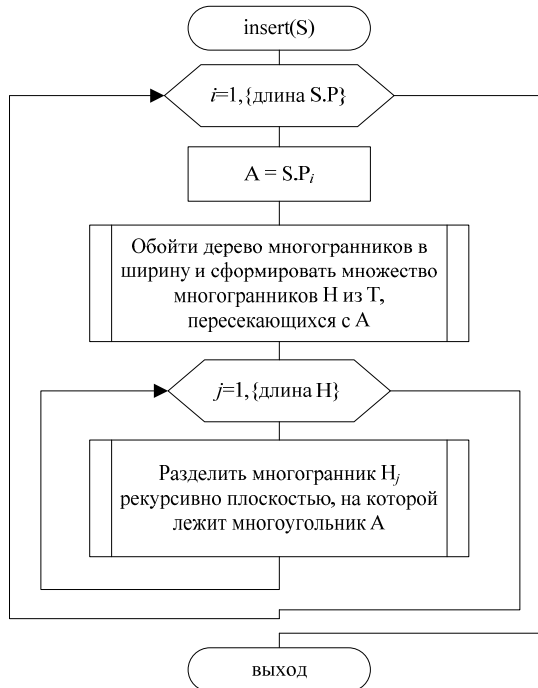


сколько хранится связь каждого многогранника с соседними в полях  $E_1$ ,  $E_2$  класса Polygon. Предусмотрены функции загрузки расчётной сетки `load(wchar_t* fname)`, добавления поверхностей `insert(Surface S)` и их исключения `deleteSurfaces`.

5. **Walker** представляет собой шаблонный класс для обхода графа многогранников в ширину. Данный класс используется для автоматизации операций поиска объектов в дереве, вычисления объёмов источников, нахождения пересечений геометрических объектов и др. Алгоритм начинает обход с вершины  $SP$ , добавляя по мере прохождения в список для обхода соседние с  $SP$  многогранники. Объект `ws` класса `WalkClass` определяет действия, которые необходимо выполнять при обходе.

6. **WalkClass** содержит функции для проверки многогранника  $P$ , который в данный момент обходит алгоритм и определяет, нужно ли помещать многогранник  $P$  в список для обхода (`isPut`), заканчивать обход графа при обходе  $P$  (`isExit`).

7. **HeatScheme** содержит методы для построения конечно-разностной схемы (`create`) и численного решения дифференциального уравнения теплопроводности (`solve`).



**Рис.4.** Блок-схема процедуры добавления источника тепла  $S$  в расчётную сетку.

На блок-схеме (рис.4) описана процедура `insert` для включения одного источника тепла (Surface  $S$ ) в расчётную сетку. Данную процедуру необхо-

димо последовательно выполнить для всех источников  $D_j$  ( $j=1, n$ ). После этого для создания множества  $E_i$  ( $i=1, \dots, n_E$ ) нужно обойти дерево многогранников, начиная с каждой вершины массива  $T$  (Polyhedron  $T[]$  класса  $Tree$ ), спуститься рекурсивно и собрать многогранники-листья.

Рассмотренный алгоритм разбиения похож на метод построения сеток типа восьмеричного дерева и сеток со склотыми ячейками [14]. В нашем случае для разбиения куба на 8 частей нужно вызвать функцию `halve` 3 раза, а для того, чтобы «расколоть» ячейку произвольной плоскостью – один раз. Для простоты программной реализации ячейки области контроля  $\tilde{D}_k$  выбираются среди полученных ячеек  $E_i$ .

## 5. Результаты численных экспериментов

Для расчёта оптимального расположения источников тепла создан программный комплекс с использованием языка  $C++$ , включающий: методы для построения обменной матрицы, решения задачи линейного программирования, решения разрежённых СЛАУ методом сопряжённых градиентов; графическое ядро (на основе OpenGL); геометрическое ядро `wavesolver` для работы с расчётными сетками и построения конечно-разностных схем.

В [9-11] приводились результаты сравнения оптимального и случайного распределения источников для областей простой формы, которые показывают возможность экономии тепловой энергии при использовании предложенных алгоритмов. Также исследована зависимость  $(J_n)_{\min}$  от  $n$  для области в форме параллелепипеда. В данной работе исследуем характер оптимального расположения источников для области, изображённой на рис.5.

*Эксперимент 1.* На рис.5 представлен результат расчёта оптимального распределения источников тепла внутри области размером  $5 \times 3.5 \times 10$  м. Большая часть границы области выполнена из материала с коэффициентом теплопередачи  $\alpha_1 = 4$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), за исключением небольшого окна с  $\alpha_2 = 0.5$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Область заполнена воздухом с коэффициентом теплопроводности  $\chi = 0.0267$  Вт/(м·К). Перед решением задачи оптимизации область была разбита (описанным выше алгоритмом модификации расчётной сетки) на  $n = 544$  ячейки  $D_j$  ( $j=1, \dots, n$ ) таким образом, чтобы они заполнили область  $D$  (рис.5). Область контроля температуры, температура внешней среды и температурный коридор были заданы следующими:

$$\tilde{D} = \{(x - 2.5)^2 + (y - 1)^2 < 2.2^2\} \cup \{z < 1\},$$

$$m(x, y, z) = \begin{cases} 5^\circ\text{C}, & z > 1, \\ 25^\circ\text{C}, & z \leq 1, \end{cases} \quad M(x, y, z) = 80^\circ\text{C}, \quad T_0 = 0^\circ\text{C}.$$

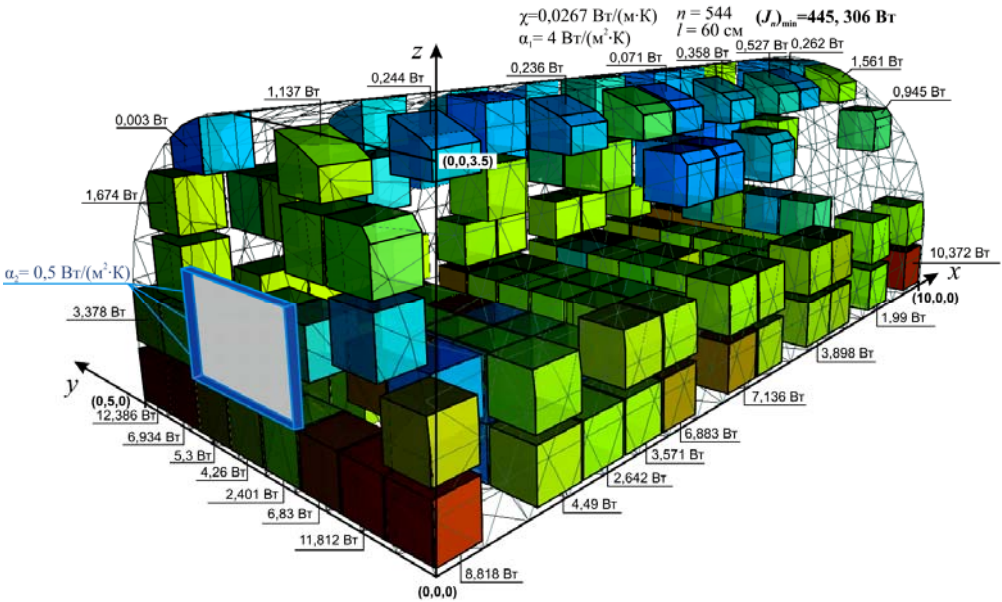


Рис.5. Оптимальное расположение источников тепла при  $D = D_f$ .

На рис.5 оптимальное распределение источников показано в виде объемов различного цвета. Источники красного оттенка являются самыми мощными, зелёного – средней мощности, синего – малой мощности. Некоторые источники имеют нулевую мощность, т.е. отсутствуют, и на рисунке не показаны. Источники располагаются в основном вдоль границы области. Это объясняется тем, что необходимо компенсировать рассеивание тепла через границу, которая имеет сравнительно большой коэффициент теплопередачи, и обеспечить около неё температурный коридор. Самые мощные источники располагаются на углах, так как здесь самое большое рассеивание тепла. По условию эксперимента верхнюю часть области ( $z > 1$ ) нужно нагреть только до температуры  $5^\circ\text{C}$ , поэтому алгоритм располагает в данной части только источники малой мощности. Суммарная мощность источников тепла составляет  $(J_n)_{\min} = 445,306 \text{ Вт}$ . Исходная сетка содержала 6487 тетраэдров. После модификации сетки и добавления источников тепла количество многогранников увеличилось до 67912.

*Эксперимент 2.* Так как на практике целесообразнее размещать источники тепла в определённых для этого местах, уменьшим область размещения источников  $D_f$ , заполнив ими нижний ряд  $\{z < 60 \text{ см}\}$  в количестве  $n = 128$ . Остальные параметры эксперимента оставим такими же, как в предыдущем эксперименте. Оптимальное распределение источников (рис.6) в этом случае имеет суммарную мощность  $(J_n)_{\min} = 6260,245 \text{ Вт}$ . Так как нужно нагреть верхнюю часть области, источники средней мощности алгоритм расположил

в центре. Отметим, что источники, изображённые на рис.6, намного мощнее, чем в предыдущем эксперименте. Объясняется это тем, что только мощные источники могут обеспечить температуру  $t(x,y,z)$  на удалении от источника (в верхней части). Поэтому уменьшение  $D_f$  приводит к увеличению  $(J_n)_{\min}$ .

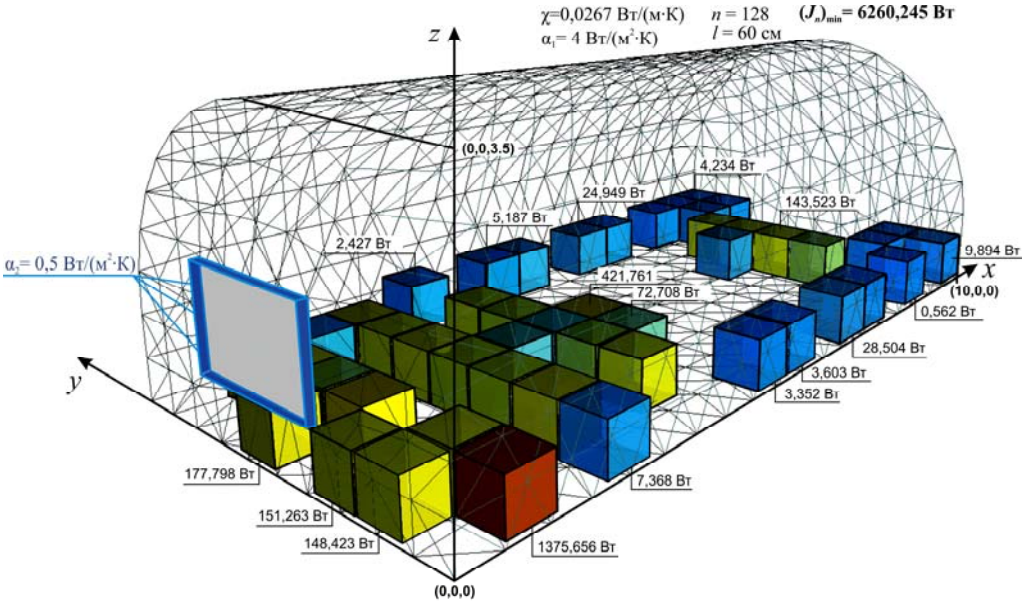


Рис.6. Оптимальное расположение источников тепла при  $D=\{z < 60 \text{ см}\}$ .

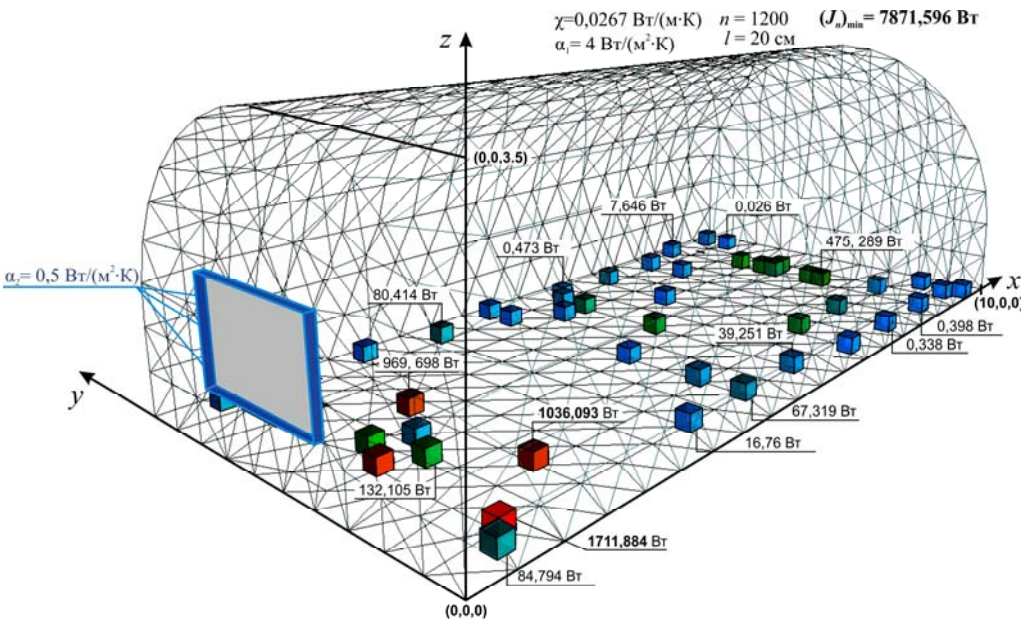


Рис.7. Оптимальное расположение источников тепла при  $D=\{z < 20 \text{ см}\}$ .

*Эксперимент 3.* Увеличим количество источников в нижнем ряду до  $n = 1200$  (рис.7). Значение целевого функционала при этом увеличилось до  $(J_n)_{\min} = 7871.596$  Вт. Это можно объяснить уменьшением области  $D_f$ , от которой сильно зависит возможная экономия тепловой энергии. Размер источников тепла стал меньше, и соответственно уменьшился покрываемый ими объём, т.е. уменьшился объём области  $D_f$ . Средняя мощность источников возросла. Исходная расчётная сетка и модифицированная для данного эксперимента имеет соответственно 6487 и 49277 многогранников.

## 6. Наблюдения и выводы

1. Значение целевого функционала  $(J_n)_{\min}$  уменьшается при увеличении области  $D_f$  или количества источников  $n$  при прочих равных условиях.

2. При некоторых начальных условиях удаётся добиться симметричного расположения источников. Это возможно в случае симметричности расчётной сетки и области  $\tilde{D}$ . Такое наблюдалось в [9,11], где использовались прямоугольные сетки. В данных экспериментах исходная сетка не была строго симметричной. Также на конечный результат оказывают небольшое влияние ошибки округления при выполнении итераций с симплекс-таблицей.

3. Характер оптимального расположения источников и их мощность сильно зависит от выбора  $m(x,y,z)$  и  $\tilde{D}$ . Если  $\tilde{D}$  включает приграничные ячейки сетки, то источники концентрируются ближе к данным ячейкам. Поэтому, если не требуется выдерживать температуру на границе, то приграничные области лучше исключить из области контроля. Чем меньшую температуру нужно выдержать на границе, тем большей экономии тепла можно достичь с использованием предлагаемых алгоритмов.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972, 412 с.;  
*Lions J.-L. Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, Paris, 1968.*
2. Мирская С.Ю., Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления // Техничко-технологические проблемы сервиса, №4(30), 2014, с.75-78;  
*Mirskaja S.Iu., Sidelnikov V.I. Ekonomichnyi obogrev pomeshcheniia kak zadacha optimalnogo upravleniia // Tekhniko-tekhnologicheskie problemy servisa, №4(30), 2014, s.75-78.*
3. Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей // Автоматика и телемеханика, 1999, №6, с.50-58;  
*Akhmetzianov A.V., Kulibanov V.N. Optimalnoe razmeshchenie istochnikov dlia statsionarnykh skaliarnykh polei // Avtomatika i telemekhanika, 1999, №6, s.50-58.*
4. Федоренко Р.П. Приближенное решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978, 497 с.;

- Fedorenko R.P.* Priblizhennoe reshenie zadach optimalnogo upravleniia. – М.: Nauka, 1978, 497 s.
5. *Бутковский А.Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1965, 474 с.;  
*Butkovskii A.G.* Teoriia optimalnogo upravleniia sistemami s raspredelennymi parametrami. – М.: Nauka, 1965, 474 s.
  6. *Табак Д., Куо В.С.* Оптимальное управление и математическое программирование. – М.: Наука, 1975, 280 с.;  
*Tabak D., Kuo V.S.* Optimal control and mathematical programming. – Prentice Hall, 1971.
  7. *Алифанов О.М.* Обратные задачи теплообмена. – М.: Машиностроение, 1988, 280 с.;  
*O.M. Alifanov.* Inverse heat transfer problems – Berlin; New York: Springer-Verlag, 1994.
  8. *Сабденов К.О., Байтасов Т.М.* Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 2015, т.326, №8, с.53-60;  
*Sabdenov K.O., Baitasov T.M.* Optimalnoe (energoeffektivnoe) teplosnabzhenie zdaniia v sisteme tsentralnogo otopleniia // Izvestiia Tomskogo politekhnicheskogo universiteta. Inzhiniring georesursov, 2015, t.326, №8, s.53-60.
  9. *Брусенцев А.Г., Осипов О.В.* Приближенное решение задачи об оптимальном выборе источников тепла // Научные ведомости Белгородского государственного университета, 2012, №5 (124), вып.26, с.60-69;  
*Brusentsev A.G., Osipov O.V.* Priblizhennoe reshenie zadachi ob optimalnom vybore istochnikov tepla // Nauchnye vedomosti Belgorodskogo gosudarstvennogo universiteta, 2012, №5 (124), vyp.26, s.60-69.
  10. *Осипов О.В.* Оптимальное расположение источников тепла в неоднородной среде // Вестник Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова, 2013, №1, с.154-158;  
*Osipov O.V.* Optimalnoe raspolozhenie istochnikov tepla v neodnorodnoi srede // Vestnik Belgorodskogo gosudarstvennogo tekhnologicheskogo universiteta im. V.G. Shukhova, 2013, №1, s.154-158.
  11. *Брусенцев А.Г., Осипов О.В.* Оптимальный выбор источников тепла при наличии конвекции // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. 2013, №26 (169). вып.33, с.64-82.  
*Brusentsev A.G., Osipov O.V.* Optimalnyi izbor istochnikov tepla pri nalichii konveksii // Nauchnye vedomosti BelGU. Matematika. Fizika, 2013, №26 (169). vyp.33, s.64-82.
  12. *Вабищевич П.Н., Самарский А.А.* Разностные схемы для задач конвекции-диффузии на нерегулярных сетках // Журнал вычислительной математики и математической физики, 2000, т.40, №5, с.726-739;  
*Vabishchevich P.N., Samarskii A.A.* Raznostnye skhemy dlia zadach konveksii-diffuzii na nereguliarnykh setkakh // Zhurnal vychislitelnoi matematiki i matematicheskoi fiziki, 2000, t.40, №5, s.726-739.
  13. *Шангареева Г.Р., Мустафина С.А.* Распараллеливание метода сопряженных градиентов с использованием технологии Nvidia CUDA // Научный вестник, 2014, №2 (2), с.154-161;  
*Shangareeva G.R., Mustafina S.A.* Rasparallelvanie metoda sopriazhennykh gradientov s ispolzovaniem tekhnologii Nvidia CUDA // Nauchnyi vestnik, 2014, №2 (2), s.154-161.
  14. *Чернышенко А.Ю.* Построение сеток типа восьмеричное дерево со скелотыми ячейками в неоднородных областях // Выч. методы и программир., 2013, т.14, с.229-245.  
*Chernyshenko A.Iu.* Postroenie setok tipa vosmerichnoe derevo so skolotymi iacheikami v neodnorodnykh oblastiakh // Vychislitelnye metody i programmirovaniye, 2013, t.14, s.229-245.

Поступила в редакцию 27.12.17

–После доработки 21.05.18

Принята к публикации 10.09.18