

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ F СЛОЯ ЗЕМНОЙ ИОНОСФЕРЫ. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ АМБИПОЛЯРНОЙ ДИФФУЗИИ**

© 2019 г. *Д.В. Кулямин*<sup>1,2</sup>, *П.А. Останин*<sup>3</sup>, *В.П. Дымников*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Институт вычислительной математики им. Г.И. Марчука РАН (ИВМ РАН)

<sup>2</sup> Институт прикладной геофизики им. Е.К. Федорова (ИПГ)

<sup>3</sup> Московский физико-технический институт (МФТИ ГУ)

kulyamind@mail.ru

Работа выполнена в ИВМ РАН при поддержке РФФИ, грант 17-17-01305.

DOI: 10.1134/S023408791904004X

Излагается постановка задачи и методы решения системы уравнений глобальной динамической модели F слоя Земной ионосферы (высоты 100 – 500 км), являющейся вычислительным блоком совместной модели термосферы – ионосферы. В основе модели лежит система уравнений формирования и динамики ионосферы в сферической геомагнитной системе координат в приближении тонкого сферического слоя. Исследованы особенности сформулированной системы уравнений и предложены методы ее решения, в основу которых положен метод расщепления по физическим процессам. В данной работе представлены результаты исследования одного этапа метода расщепления – решения уравнений, описывающих амбиполярную диффузию ионов вдоль магнитных силовых линий и «оседание» ионов в поле силы тяжести, а также плазмохимические преобразования. На основе заданного аналитического решения, качественно правильно описывающего реальное распределение ионов, исследована точность предложенных алгоритмов. Приведены результаты численных экспериментов по изучению чувствительности решения задачи к возмущениям потока ионов на верхней границе сферического слоя.

Ключевые слова: ионосфера, численное моделирование, амбиполярная диффузия, метод расщепления.

### **MODELLING OF EARTH'S IONOSPHERE F LAYER. SOLUTION OF THE AMBIPOLAR DIFFUSION EQUATIONS**

*D.V. Kulyamin*<sup>1,2</sup>, *P.A. Ostanin*<sup>3</sup>, *V.P. Dymnikov*<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the RAS (INM RAS)

<sup>2</sup> Fedorov Institute of Applied Geophysics (IPG)

<sup>3</sup> Moscow Institute of Physics and Technology (MIPT SU)

The paper presents the problem formulation and methods of numerical solution for the global dynamical model of Earth's ionosphere F layer (altitude 100-500 km), which is a

computational unit of the coupled thermosphere-ionosphere model. The model is based on a set of equations of global ionospheric formation and dynamics in a spherical geomagnetic coordinate system in the approximation of a thin spherical layer. The features of the formulated equations are investigated and methods for its solution are proposed based on the splitting method. In this paper we present the results of the first stage of the splitting method – solution of equations describing the ambipolar diffusion along magnetic field lines and gravitational settling of ions as well as plasma chemical transformations. Based on the prescribed analytical solution, which qualitatively describes the real ionospheric electrons distribution, the accuracy of the proposed algorithms is investigated. We also presents the results of numerical study for the sensitivity of solution to perturbations of the ion flow at the upper boundary.

Key words: ionosphere, numerical modelling, ambipolar diffusion, splitting method.

## **1. Введение**

Наблюдаемый в последнее десятилетие в мировом научном сообществе переход от климатических моделей к моделям Земной системы подразумевает включение в современные модели климата и общей циркуляции атмосферы новых областей околоземного пространства, в том числе верхних слоев атмосферы (до высот порядка 500 км, когда еще уравнения гидродинамики можно считать пригодными), и моделей ионосферы. В рамках этого направления разработка такой модели Земной системы, включающей термосферу и ионосферу, представляет собой сложную междисциплинарную проблему. Появление таких моделей является важным шагом не только для моделирования климата, но и для целого ряда самостоятельных задач, поскольку проблема описания и прогноза ионосферы важна не столько с точки зрения ее взаимодействия с нейтральной атмосферой и возможным влиянием на климатические характеристики атмосферы, но и в связи с прикладным значением этой среды.

Точная информация о состоянии системы термосфера-ионосфера требуется для решения ряда задач космической отрасли, межконтинентальной и спутниковой радиокommunikации, а также радиолокации, поскольку оно частично определяет характеристики движения низкоорбитальных спутников, а также условия для распространения радиосигналов, обеспечивающих работу систем дальней радиосвязи, радиолокации, а также навигационных систем глобального спутникового позиционирования (GPS и российская ГЛОНАСС). Таким образом, исследование и прогноз глобального состояния ионосферы в практическом смысле наиболее важны для развития технологий высокоточной навигации, повышения надежности и достоверности работы систем связи и других прикладных задач.

Проблема описания характеристик Земной ионосферы и термосферы

традиционно решается на основе обработки имеющихся экспериментальных аэрономических, динамических, радиофизических и других типов данных с построением эмпирических моделей. Созданные таким образом эмпирические модели верхней атмосферы в своей основе являются климатологией глобального состояния в определенных условиях и по большей части не учитывают изменчивость среды, вызванную как внешними, так и внутренними факторами (такими как нелинейные волновые процессы в термосфере и ионосфере и т.п.). В то же время эти модели широко применяются для решения важных прикладных задач. Примерами таких справочных моделей являются: модели ионосферы IRI, SIMP и др. [1,2]. На сегодняшний день общее количество и уровень развития численных моделей верхней атмосферы ниже по сравнению с моделями прогноза погоды и климата для нижних слоев атмосферы.

Наиболее развитые модели ионосферы, применяемые в том числе для прогностических целей, разрабатываются в основном в крупных центрах и консорциумах различных институтов. К таковым можно отнести следующие современные совместные модели термосферы и ионосферы: американские модели NCAR TIEGCM, TIEM-GCM [3]; английские модели UCL STIP-CMAT [4]; отечественные модели UAM [5], GCM-TIP [6]. К аналогичным более комплексным моделям можно отнести развиваемые в последние годы модели всей атмосферы (для высот от 0 до 500 км и более), в основном создаваемые для решения проблем учета взаимодействия нижних и верхних слоев: модели WACCM [7] в различных версиях (включает TIEGCM [3]), IDEA и WAM (включает STIP и др.) [8]. Разработки таких комплексных моделей, включающих разные слои атмосферы, даже в ведущих мировых центрах находятся фактически на начальных этапах.

Известно, что проблемы описания процессов формирования нижних слоев ионосферы (D, E слои, высоты 60-130 км) и верхних слоев (F слой, высоты 130-600 км) существенно различаются: в нижних слоях ионосферы при низкой концентрации ионов собственной динамикой ионов можно пренебречь (ионы переносятся нейтральным ветром, при этом ключевыми процессами являются ионизация и химические взаимодействия), однако процессы, связанные с ионизацией нейтральной атмосферы в этих областях, являются сложными. В верхних слоях ионосферы ситуация другая: концентрация ионов относительно высока, так что ключевыми становятся динамические свойства плазмы и ее взаимодействие с магнитными и электрическими полями, а учет процессов динамического взаимодействия ионов с нейтральной атмосферой является непременным условием правильной по-

становки задачи, в то же время описание процессов ионизации нейтральной атмосферы много проще, чем в нижних слоях. Поскольку динамические свойства плазмы, перенос ионов и электронов, а также роль электромагнитных сил в верхних слоях ионосферы важны, то, следовательно, важно и описание магнитного поля Земли.

Целью настоящей работы является описание создаваемой в ИВМ РАН динамической модели F слоя ионосферы. Основное содержание работы включает формулирование полной системы уравнений модели и описание метода ее решения. Данная работа проводится в рамках решения общей задачи создания глобальной динамической совместной модели термосферы-ионосферы ИВМ РАН (для высот 90-500 км) на основе представленной модели ионосферы с включением ее в качестве согласованного вычислительного блока в созданную ранее модель общей циркуляции термосферы [9]. Перспективной целью разработок моделей верхней атмосферы ИВМ РАН является создание модели Земной системы, включающей согласованное описание всех ключевых слоев атмосферы (для высот 0-500 км). В основе данной модели предполагается соединение в области нижней термосферы разработанных совместных моделей нижней атмосферы и ионосферы (до высот 90-130 км) [10] и разрабатываемой в настоящее время модели термосферы-ионосферы Земли (высотная область 100-500 км).

Одной из ключевых задач применения данной модели является прогноз глобального состояния Земной ионосферы. Для решения данной задачи предполагается создание специализированной для Земной ионосферы системы усвоения данных наблюдений на основе данной модели с использованием разработанной в ИВМ РАН методологии [11]. Поскольку предлагаемая методология разработана с учетом использования метода расщепления, при разработке модели ионосферы, представленной в данной работе, этот метод предполагается основным.

Коротко остановимся на содержании работы. В следующем разделе работы представлена постановка задачи моделирования F слоя ионосферы, сформулированы и выведены основные уравнения модели. В третьем разделе описан метод решения уравнений амбиполярной диффузии как основной части сформулированных уравнений. В четвертом разделе работы проведены результаты верификации точности разработанных методов реализации модели на основе моделирования заданного тестового аналитического решения. Отдельно рассмотрена роль краевого условия в формировании структуры и ключевых характеристик решения. В заключении статьи формулируются и обсуждаются основные результаты работы.

## 2. Модель F слоя ионосферы

**2.1. Постановка задачи.** Основным уравнением модели является уравнение неразрывности для концентрации свободных зарядов

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(n_i \mathbf{u}_i) = \frac{\delta n_i}{\delta t} = R_i. \quad (1)$$

В данном уравнении  $n_i$  – концентрация ионов, равная концентрации электронов  $n_e$  в силу приближения квазинейтральности ионосферной плазмы,  $\mathbf{u}_i$  – вектор скорости переноса ионов. В правой части учитываются столкновительные члены, химические источники (главным образом ионизация солнечным излучением) и стоки.

Представленная в работе модель ионосферы основывается на следующих приближениях:

1) рассматривается только F слой ионосферы Земли как зона максимального по величине содержания электронов и ионов в атмосфере, а также как ключевая область практического интереса (вследствие определения им максимальной критической частоты отражения радиосигналов по концентрации электронов на пике F слоя, а также наиболее значительной доли содержания полного общего интегрального количества электронов (ПЭС), важной характеристики для навигационных систем);

2) в силу фотохимического преобладания ионизации атомарного кислорода O и рекомбинации его иона O<sup>+</sup> с главными компонентами состава термосферы на этих высотах используется одноионная формулировка модели;

3) предполагается локальная квазинейтральность плазмы ( $n_i = n_e$ ) и совместное движение электронов и ионов;

4) предполагается преобладание в динамических процессах ионосферной плазмы амбиполярной диффузии вдоль силовых линий магнитного поля Земли;

5) в направлении, перпендикулярном силовым линиям, предполагается преобладание электромагнитного поперечного дрейфа, а также приближения формы магнитного поля Земли – описанное выше дипольное приближение.

При указанных выше предположениях общий суммарный баланс сил, действующих на ионосферную плазму в диффузионном приближении, можно выразить следующим образом:

$$\nabla(p_i + p_e) - en_i (\mathbf{E} + [\mathbf{u}_i \times \mathbf{B}]) - n_i \mathbf{g} = n_i m_i \nu_{in} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_i). \quad (2)$$

Здесь  $p_e = n_e k T_e$ ,  $p_i = n_i k T_i$  – парциальные давления электронного и ионного газов соответственно, полученные из уравнения состояния для прибли-

жений идеального газа, а  $T_e$ ,  $T_i$  – соответствующие температуры для каждой компоненты плазмы,  $\nu_{in}$  – частота ион-нейтральных столкновений,  $\mathbf{u}$  – скорость движения нейтралов,  $\mathbf{E}$  – внешние электрические поля,  $\mathbf{B}$  – магнитное поле Земли,  $e$  – заряд электрона,  $m_i$  – масса иона,  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения.

Выделив направление, совпадающее с магнитным полем Земли, и плоскость, перпендикулярную этому направлению, спроецировав данное векторное уравнение (2) на данные геометрические направления, можно получить выражение для параллельной  $u_{i\parallel}$  и перпендикулярной  $u_{i\perp}$  составляющих скорости движения ионов.

В параллельном магнитному полю Земли направлении, используя приведенный выше баланс (1), получаем «классическое» уравнение амбиполярной диффузии вдоль магнитных линий:

$$\begin{aligned} \nabla_{\parallel}(p_i + p_e) - n_i m_i g_{\parallel} &= n_i m_i \nu_{in} (u - u_i)_{\parallel} \Rightarrow \\ u_{i\parallel} &= u_{\parallel} - \frac{1}{m_i \nu_{in}} \left( \frac{1}{n_i} \nabla_{\parallel}(p_i + p_e) - m_i g_{\parallel} \right) \Rightarrow \\ u_{i\parallel} &= u_{\parallel} - \frac{k(T_i + T_e)}{m_i \nu_{in}} \left( \frac{1}{n_i} \nabla_{\parallel}(n_i) + \frac{1}{(T_i + T_e)} \nabla_{\parallel}(T_i + T_e) - \frac{m_i}{k(T_i + T_e)} g_{\parallel} \right), \\ D &= \frac{k(T_i + T_e)}{m_i \nu_{in}}, \quad H = \frac{k(T_i + T_e)}{m_i g}, \quad T_p = \frac{1}{2}(T_i + T_e). \end{aligned}$$

где  $D$  и  $H$  – коэффициент амбиполярной диффузии и масштаб высоты для ионосферной плазмы соответственно.

В поперечном направлении можно использовать баланс силы Лоренца и столкновительного члена (аналогичный применяемому нами в модели термосферы для описания ион-нейтрального взаимодействия), однако эмпирические оценки для высот F слоя ионосферы показывают, что доминирующей составляющей в поперечном направлении является электромагнитный дрейф, так что нетрудно получить  $u_{i\perp} = B^{-2} [\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$ .

Полученное с учетом всех приближений уравнение неразрывности для электронной концентрации в F слое ионосферы имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} &= -\operatorname{div}(n_i \bar{u}_{\parallel}) - \operatorname{div} \left( n_i \frac{1}{B^2} [\bar{E}' \times \bar{B}]_{\perp} \right) + \\ &+ \operatorname{div} \left( D \left( \nabla_{\parallel}(n_i) + n_i \frac{1}{T_p} \nabla_{\parallel} T_p - \frac{n_i m_i}{2kT_p} \bar{g}_{\parallel} \right) \right) + [P - k_i n_i]. \end{aligned} \quad (3)$$

В этом уравнении в правой части член  $P$  – скорость ионизации солнечным излучением нейтральных составляющих термосферы (в данной модели атомарного кислорода O до иона O+),  $k_i$  – суммарная скорость рекомбинации при столкновениях с нейтралами (в данном случае учитываются столкновения только с ключевыми компонентами термосферы – молекулярным кислородом и азотом).

Для решения этой системы разумным представляется использование криволинейной системы координат, связанных с направлениями магнитного поля Земли (так называемых «магнитных трубок»), что сделано в ряде существующих в мире моделей [4-6]. Этот метод позволяет решать фактически одномерные уравнения в параллельном трубкам направлении и отдельно рассчитывать поперечное смещение трубок. Однако при реализации данного подхода возникает ряд трудностей, связанных с правильным расчетом коэффициентов Ламэ, с расчетом ключевых внешних для ионосферы параметров (в частности, распределения всех характеристик нейтральной термосферы), с расчетом температур ионов и электронов, которые главным образом привязаны к вертикальному направлению. Эти сложности накладывают существенные ограничения при разработке совместных моделей для системы термосфера-ионосфера, поскольку модели термосферы традиционно разрабатываются в географической системе координат с вертикальным направлением вдоль силы тяжести.

Поэтому в данной работе в качестве базовой системы координат для модели ионосферы взята система сферических координат в приближении тонкого сферического слоя, согласованная с постановкой модели циркуляции термосферы ИВМ РАН. Выбор данной системы обусловлен как задачей включения модели ионосферы в единую совместную с термосферой модель, так и перспективной целью разработки полной модели нейтральной атмосферы и ионосферы (от 0 до 500 км).

Получим полное уравнение неразрывности с учетом трехмерного переноса плазмы при указанных выше приближениях из общего уравнения (2) в данной системе координат, которое будет использовано в конечном варианте модели. С использованием введенных выше выражений для вектора магнитного поля Земли в описанных приближениях можно получить следующее трехмерное уравнение неразрывности для ионов:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = EYZ(n_i) + DTr(n_i) + Tr(n_i) + [P - k_i n_i], \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}
EYZ(n_i) &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \cos^2 I \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos \varphi \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \frac{\partial n_i}{\partial z} \right] - \\
&- \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \sin I \cos I \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos \varphi \right] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin I \cos I \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \right], \\
DTr(n_i) &= \frac{1}{a \cos \varphi} \times \\
&\times \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{a} D \cos^2 I \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} - D \sin I \cos I \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) \right) n_i \cos \varphi \right] + \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( -\frac{1}{a} D \sin I \cos I \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} + D \sin^2 I \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) \right) n_i \right], \\
Tr(n_i) &= \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \frac{1}{B} (E_y \sin I + E_z \cos I) n_i \right] - \\
&- \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{B} E_x \sin I + u_y \cos^2 I - u_z \sin I \cos I \right) n_i \cos \varphi \right] - \\
&- \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( \frac{1}{B} E_x \cos I - u_y \sin I \cos I + u_z \sin^2 I \right) n_i \right].
\end{aligned}$$

**2.2. Особенности системы уравнений модели ионосферы.** Постановка (4) диффузионных уравнений модели F слоя ионосферы содержит ряд особенностей, которые важно учитывать при численной реализации.

1. Поскольку основное уравнение модели фактически является представлением баланса массы для заряженных частиц, для искомого распределения должны выполняться соответствующие интегральные балансные соотношения.

2. С физической точки зрения данные уравнения содержат описание процесса амбиполярной диффузии вдоль силовых линий магнитного поля Земли в проекции на координатные направления, таким образом, задача имеет геометрические особенности, связанные с выделенным направлением движения (вдоль линии).

3. Для рассматриваемой высотной области характерные значения коэффициента диффузии, а также скоростей ионизации и некоторых параметров, связанных с плотностью воздуха в атмосфере, экспоненциально меняются с высотой на 6 порядков (это нетрудно получить по эмпирическим оценкам [2,9]), что нужно учитывать при построении методов решения в интересующей нас области.



4. Характерные времена плазмохимических процессов (скорости ионизации и рекомбинации в правой части уравнения (4)) малы (порядка секунд).

5. Решение рассматриваемой системы уравнений в силу физического смысла концентрации газовой составляющей неотрицательно.

Следствием особенностей 3 и 4 является то, что рассматриваемая задача обладает существенной жесткостью.

### 3. Метод численной реализации модели

Как отмечено выше, в основу метода решения системы (4) положен метод расщепления по физическим процессам: амбиполярной диффузии и адвективного переноса. Преимущество этого метода заключается не только в возможности построения эффективных алгоритмов, но и в возможности эффективного исследования вклада каждого физического процесса в формирование отклика динамики ионосферы на внешние воздействия.

В предлагаемом нами алгоритме на первом этапе расщепления рассматривается процесс амбиполярной диффузии с включением плазмохимических преобразований. На втором этапе решается задача, описывающая трехмерный адвективный перенос ионов, вызванный электромагнитным дрейфом и нейтральным ветром. Такое расщепление позволяет рассматривать задачу первого этапа как самостоятельную задачу первого приближения в проблеме описания динамики ионосферы.

Соответствующее системе (4) уравнение амбиполярной диффузии с включением плазмохимии имеет вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = EYZ(n_i) + DTr(n_i) + [P - k_i n_i]. \quad (5)$$

Рассматриваемая нами область высот от 100 км до 500 км формально включает высоты формирования E слоя, однако эти процессы рассматриваются в отдельной модели, а в данной работе нижняя граница взята на достаточном удалении от максимума F слоя во избежание возможных ложных эффектов. В качестве краевых условий для системы (5) принимаем условие Дирихле на нижней границе:  $n_i = P / k_i$  при  $z = 100$  км, а на верхней границе ставится условие третьего рода вида

$$D \left( \left( \frac{\partial n_i}{\partial z} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} n_i + \frac{1}{H} n_i \right) \sin^2 I - \left( \frac{1}{a} \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n_i \right) \cos I \sin I \right) = Fz(\varphi). \quad (6)$$

На полюсах ставится условие ограниченности производных по широте

$(\partial n_i / \partial \varphi) \cos \varphi \rightarrow 0$  при  $\varphi \rightarrow \pm \pi/2$ . Это условие не является обременительным, поскольку эффективные коэффициенты диффузии также стремятся к нулю при  $\varphi \rightarrow \pm \pi/2$ .

Детальное описание числовых параметров модели, а также результаты первой версии в квазиодномерной постановке, учитывающей только диффузию и перенос в вертикальном направлении без учёта смешанной производной, приведены в [12].

**3.1. Пространственная аппроксимация.** Разностная аппроксимация системы (5) реализуется на девятиточечном шаблоне (рис.1, индексы  $i, j$  соответствуют высоте и широте). При построении разностной аппроксимации мы должны иметь в виду, что в двумерной задаче (5) диффузия идет вдоль магнитных силовых линий, т.е. симметричная матрица эффективных коэффициентов диффузии (которую несложно выписать при рассмотрении

оператора  $EYZ(n_i)$ )  $S = \begin{pmatrix} K_1^2 & K_1 K_2 \\ K_1 K_2 & K_2^2 \end{pmatrix}$  вырождена в каждой точке  $(z, \varphi)$ ,

где  $K_1 = \sqrt{D} \cos I$ ,  $K_2 = \sqrt{D} \sin I$ . Если в уравнении (5) члены  $DTr(n_i)$ ,  $P$ ,  $k_i n_i$  и краевые условия положить равными нулю, то при умножении уравнения (5) скалярно на  $n_i$  и интегрировании по всей области будет справедливо соотношение:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \iint_{\varphi, z} (n_i)^2 \cos \varphi d\varphi dz}{\partial t} = - \iint_{\varphi, z} \left( K_1 \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + K_2 \frac{\partial n_i}{\partial z} \right)^2 \cos \varphi d\varphi dz \leq 0. \quad (7)$$

Построить разностную схему для диффузионных операторов со смешанными производными со вторым порядком точности, имеющую конечномерный аналог соотношения (7), по-видимому, невозможно. Мы построим аппроксимацию этих операторов со вторым порядком точности, для которых конечномерный аналог соотношения (7) будет иметь место при условии независимости коэффициентов эффективной диффузии от пространственных переменных

Искомая аппроксимация строится следующим образом: двумерный оператор Лапласа аппроксимируется интегро-интерполяционным методом со вторым порядком точности на пятиточечном шаблоне; аппроксимация смешанных производных в точке  $(i, j)$  строится как полусумма аппроксимаций смешанной производной второго порядка точности в точках с дроб-

ными индексами (в качестве примера возьмем смешанную производную  $\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \frac{\partial n}{\partial z} \right)$  со знакопеременной функцией  $a(y)$ , где  $y$  соответствует широте). Аппроксимации смешанной производной в точках с дробными индексами с точностью до множителя шагов сетки имеют вид

$$\text{для точки } (i+1/2, j-1/2): a_j n_{i+1,j} - a_j n_{i,j} - a_{j-1} n_{i+1,j-1} + a_{j-1} n_{i,j-1}, \quad (8)$$

$$\text{для точки } (i+1/2, j+1/2): a_{j+1} n_{i+1,j+1} - a_{j+1} n_{i,j+1} - a_j n_{i+1,j} + a_j n_{i,j}, \quad (9)$$

$$\text{для точки } (i-1/2, j-1/2): a_j n_{i,j} - a_j n_{i-1,j} - a_{j-1} n_{i,j-1} + a_{j-1} n_{i-1,j-1}, \quad (10)$$

$$\text{для точки } (i-1/2, j+1/2): a_{j+1} n_{i,j+1} - a_{j+1} n_{i-1,j+1} - a_j n_{i,j} + a_j n_{i-1,j}. \quad (11)$$

При положительных  $a_j$  используется полусумма аппроксимаций (8) и (11), при отрицательных – полусумма аппроксимаций (9) и (10) (для иллюстрации на схеме рис.1 выделены ячейки с центрами  $(i-1/2, j+1/2)$ ,  $(i+1/2, j-1/2)$ ).

Нетрудно показать, что при постоянных эффективных коэффициентах диффузии и подходящих краевых условиях будет иметь место конечномерный аналог соотношения (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sum_{i,j} (n_{i,j})^2}{\partial t} = & - \sum_{i,j} \left( K_1 \frac{(n_{i,j} - n_{i-1,j})}{\Delta z} + K_2 \frac{(n_{i,j} - n_{i,j-1})}{a \Delta \phi} \right)^2 - \\ & - \sum_{i,j} \left( K_1 \frac{(n_{i+1,j} - n_{i,j})}{\Delta z} + K_2 \frac{(n_{i,j+1} - n_{i,j})}{a \Delta \phi} \right)^2. \end{aligned}$$

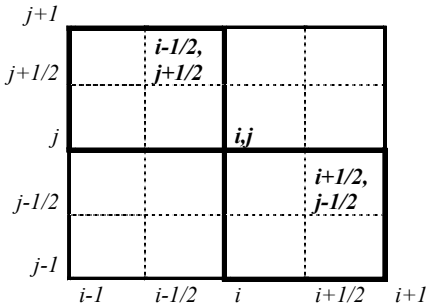
В случае постоянных коэффициентов для такого рода схем можно показать абсолютную устойчивость при положительной определенности их матрицы [13]. Эта аппроксимация имеет и еще одно преимущество: она удовлетворяет необходимому условию основной теоремы химической кинетики [14].

Рассмотренный выше метод применен и для аппроксимации производной  $\partial n / \partial \phi$  в верхнем краевом условии в точке  $(N+1/2, j)$ , согласованной с аппроксимацией уравнения (5) во всей области. При этом в случае положительного знака  $\sin I$  аппроксимация имеет вид

$$\frac{1}{2} \left( \frac{n_{N+1,j+1} - n_{N+1,j}}{\Delta \phi} + \frac{n_{N,j} - n_{N,j-1}}{\Delta \phi} \right),$$

а в случае отрицательных значений  $\sin I$  используется полусумма:

$$\frac{1}{2} \left( \frac{n_{N+1,j} - n_{N+1,j-1}}{\Delta\varphi} + \frac{n_{N,j+1} - n_{N,j}}{\Delta\varphi} \right).$$



**Рис.1.** Схематический шаблон пространственной разностной аппроксимации для членов смешанной производной в рассматриваемой модели.

Для аппроксимации оператора  $DTr(n_i)$ , описывающего процесс «оседания», были использованы дивергентные схемы как первого порядка точности (направленные разности), так и второго (центральные разности). Мы не использовали алгоритм свертки, предложенный в [15], поскольку условия «хорошей» аппроксимации метода свертки и схемы направленных разностей совпадают ( $\tilde{u}h / (2D) \ll 1$ , где  $\tilde{u}$  – масштаб скорости конвективных движений, то есть счетная вязкость много меньше физической вязкости).

**3.2. Аппроксимация по времени.** В настоящей работе мы исследовали два метода решения полученной эволюционной дифференциально-разностной задачи. Вследствие сформулированных особенностей задачи (5), в первом методе была использована неявная схема первого порядка – схема естественного фильтра, которая позволяет выбрать шаг по времени, согласованный с шагами по времени в задаче моделирования термосферы (2 – 4 мин) [9]. Для решения системы алгебраических уравнений использовался стабилизированный метод бисопряженных градиентов [16], который давал хорошую точность при умеренном числе итераций (см. раздел 4).

В качестве второго метода исследовался метод расщепления исходной системы уравнений на две подсистемы. Мы исследовали этот метод, имея в виду его применение в задаче четырехмерного усвоения данных [11]. Очевидно, что при наличии смешанных производных мы не можем расщепить исходный дифференциальный оператор по геометрическим переменным – в данном случае расщепление уместнее проводить для дифференциально-разностной задачи, применяя алгоритм, предложенный и исследованный в [13] для задач теории упругости, позволяющий решать задачи на дробных шагах с помощью одномерных прогонок.

На языке метода слабой аппроксимации использованный в работе алгоритм расщепления имел следующий вид. На первом шаге решалась задача диффузии в проекции на вертикальную ось  $z$ , включающая смешанные производные и члены, описывающие плазмохимические преобразования:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin^2 I \left( \frac{\partial n_i}{\partial z} + \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) n_i \right) - \frac{1}{a} D \sin I \cos I \left( \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} + \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} n_i \right) \right] - \\ & - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \sin I \cos I \frac{\partial n_i}{\partial z} \cos \varphi \right] - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial z} \left[ D \sin I \cos I \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \right] + [P - k_i n_i]. \end{aligned}$$

На втором шаге решалась задача диффузии вдоль координаты магнитной широты:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_i}{\partial t} = & \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ D \cos^2 I \frac{\partial n_i}{\partial \varphi} \cos \varphi \right] + \\ & + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \left( \frac{1}{a} D \cos^2 I \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial \varphi} - D \sin I \cos I \left( \frac{1}{T_p} \frac{\partial T_p}{\partial z} + \frac{1}{H} \right) \right) n_i \cos \varphi \right]. \end{aligned}$$

Такое расщепление позволяет естественным образом расщепить краевые условия. Обе задачи решаются одномерными прогонами вдоль соответствующих направлений. При формировании прогонок на первом шаге расщепления частично использовались идеи, предложенные в [13] (алгоритм типа метода Зейделя при расчете значений функций в узлах, не входящих в направление прогонки).

Коротко остановимся на проблеме неотрицательности решения. Вообще говоря, матрицы, которые необходимо обращать на каждом шаге по времени, не удовлетворяют определению M-матрицы: при выбранных пространственных шагах и значениях параметров задачи нарушение происходит в малой окрестности экватора. Для случая возникновения отрицательных значений компонент решения в алгоритме предусмотрено применение простого монотонизатора.

## 4. Результаты численных экспериментов

**4.1. Тестирование методов численной реализации модели ионосферы на основе аналитического решения.** Для исследования точности используемых разностных схем рассмотрим модельное решение, на качественном уровне отражающее поведение реальной ионосферы при решении исходной задачи. Форсинг для рассматриваемой модели был рассчитан для получения данного решения. Рассмотрим случай фиксированного дневного

распределения электронной концентрации в F слое, близкого к наблюдаемому в невозмущенной ионосфере. Вблизи нижней границы имеет место резкий рост содержания электронов с высотой до максимума F слоя, выше него наблюдается экспоненциальное падение, связанное с преобладанием диффузии. Кроме того, в широтном направлении наблюдается примерный максимум распределения электронной концентрации в экваториальной области. С учётом указанных особенностей было выбрано модельное решение вида

$$n_{\text{mod}}(z, \varphi) = A \exp[-B(z - C)] \cdot (z - C) \cdot \cos^2(\varphi / 2),$$

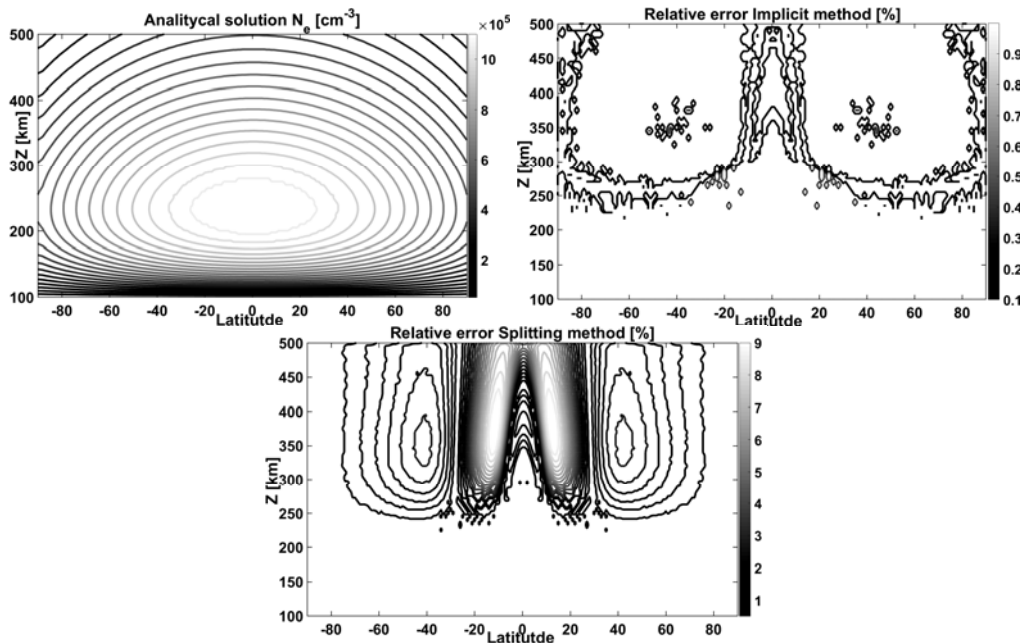
где положительные константы  $A$ ,  $B$  и  $C$  в тестовых расчетах были выбраны равными  $3 \cdot 10^6 \text{ см}^{-3} \cdot \text{км}^{-1}$ ,  $1/133 \text{ км}^{-1}$  и  $100 \text{ км}$  соответственно. После выбора модельного решения прямой подстановкой в уравнение была вычислена соответствующая функция фотоионизации  $P(z, \varphi)$  и соответствующий поток  $Fz(\varphi)$  в верхнем граничном условии.

Численные эксперименты по сходимости к стационарному решению показали высокую точность результатов расчета с помощью обоих используемых нами методов. На рис.2 приведены вид пространственного распределения заданного аналитического решения и распределение ошибок по результатам численных экспериментов на сетке с шагом  $h = 5 \text{ км}$  по высоте и шагом  $\Delta\varphi = 1^\circ$  по широте. Видно, что максимальная численная ошибка обоих методов наблюдается в области приэкваториальных широт в верхних слоях ионосферы, а также в области полюсов, структуры распределения ошибки близки для обоих методов.

**Таблица 1.** Сравнение точности итерационного метода и метода расщепления при реализации модели ионосферы с заданным аналитическим решением.

Относительная ошибка (С-норма)	Итерационный метод	Метод расщепления
	Число итераций	Шаг по времени (сек)
1%	2	1
7.5%	1	18
10%		30
15%		60

В табл.1 приведены некоторые результаты сравнительного анализа точности расчета стационарного решения при различных параметрах задачи. Для неявной схемы точность регулировалась выбором порядка невязки и числа итераций, шаг по времени при этом брался равным  $100 \text{ с}$  (точность стационарного решения не зависит от него для данного метода). Точность решения методом расщепления регулируется выбором шага по времени. Расчет проводился с произвольных начальных условий на 2 суток.



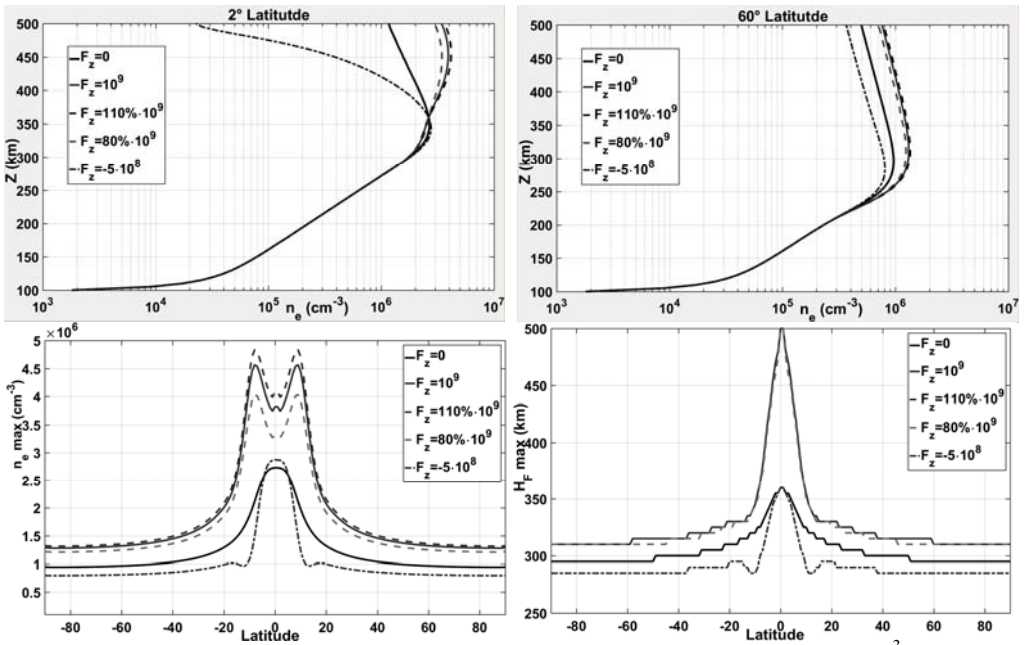
**Рис.2.** Широтно-высотные распределения значений электронной концентрации [ $\text{cm}^{-3}$ ] в заданном тестовом аналитическом решении (слева сверху) и отклонения от данного решения по данным численных реализаций модели ионосферы итерационным методом (справа сверху) и методом расщепления (внизу). Пространственное разрешение модели в обоих случаях составляло 5 км по высоте,  $1^\circ$  по широте, шаг по времени 30 сек.

Итерационный метод показал более высокую точность для данной постановки задачи, при этом высокая точность достигается при использовании нескольких итераций. Для метода расщепления ошибка аппроксимации при сравнимых шагах по времени больше, для достижения той же точности, что и в неявной схеме, необходимо выбирать шаг по времени порядка 1 сек. При этом точность в 10%, которая считается приемлемой в задачах моделирования F слоя [1,2], достигается при шагах по времени порядка 30 сек.

**4.2. Чувствительность модельного решения к потоку на верхней границе.** Для изучения роли верхнего краевого условия и получения количественных оценок проведены отдельные численные эксперименты при постановке модели с реалистичной правой частью. Используя числовые оценки параметров модели вблизи верхней границы [12], можно показать что влияние потока на верхней границе на формирование профиля электронной концентрации определяется соотношением слагаемых  $\partial n_i / \partial z$ ,  $n_i / H$ ,  $Fz(\varphi) / (D \sin^2 I)$ . Таким образом, отрицательный градиент вертикального профиля концентрации определяется заданным характерным масштабом

диффузионного «оседания», а абсолютное значение на верхней границе определяется величиной потока.

В данной работе чувствительность к его возмущениям рассматривалась с базовым значением потока, использованным в известных моделях ионосферы  $Fz(\varphi) = \pm 10^9 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$  [3]. Величина потока варьировалась в интервале этих значений, а для оценок относительной чувствительности характерные величины потока из этого диапазона возмущались на 10-20%. Отдельно исследовалась чувствительность величины и положения максимума концентрации в F слое, поскольку эти два параметра ионосферы являются ключевыми для прикладных радиофизических задач. На рис.3 представлены высотные профили электронной концентрации, а также величины и положения максимума на разных широтах по данным соответствующих экспериментов.



**Рис.3.** Высотные распределения значений электронной концентрации [см<sup>-3</sup>] при различных значениях потока на верхней границе на экваторе (слева сверху) и 60° (справа сверху) магнитной широты, а также широтные распределения значений максимума концентрации в F слое (слева внизу) и его высоты [км] (справа внизу) по данным численной реализации модели ионосферы итерационным методом.

Модель показывает, что зависимость поведения решения от величины потока на границе существенна в задаваемом диапазоне, однако относительная чувствительность незначительна, экспоненциальный характер падения концентрации с высотой и его величина практически сохраняется, однако при этом изменяется значение концентраций вплоть до максимума. Относительная чувствительность максимальна для приэкваториальных широт (ве-



личина максимума F слоя на широтах  $\sim 15^\circ$  – меняется на  $\sim 6\%$  при изменении потока на 10%), чувствительность положения максимума низкая при малых возмущениях во всех областях, за исключением приэкваториальных широт, его высота меняется примерно на 10-30 км при изменении потока в 2 раза.

## 5. Заключение

В настоящей работе мы исследовали методы решения системы уравнений, описывающих динамику F слоя Земной ионосферы в приближении амбиполярной диффузии. Коротко сформулируем основные результаты работы.

- В ИВМ РАН создана первая версия двумерной динамической модели F слоя ионосферы (100-500 км) на основе решения уравнений динамики плазмы в приближении амбиполярной диффузии в сферических геомагнитных координатах, сформулированы основные уравнения модели и предложен алгоритм поэтапной реализации на основе метода расщепления по физическим процессам.

- Разработаны и реализованы два метода численного интегрирования модели, проведено сравнение точности разработанных методов на основе аналитического решения.

- С помощью численных экспериментов с созданной моделью проведены количественные оценки чувствительности решения к возмущениям потока через границу. Уравнения динамики ионосферы в сферической геомагнитной системе координат имеют трудность при формулировании количественных параметров верхнего краевого условия. Результаты численных экспериментов по изучению чувствительности решения сформулированной задачи к возмущениям верхнего граничного условия дают основание надеяться, что эту проблему можно решить на основе системы четырехмерного усвоения данных об интегральной концентрации электронов в F слое.

В дальнейшем предполагается изложить метод решения системы уравнений переноса ионов нейтральным ветром и уравнений электромагнитного дрейфа, а также результаты численных экспериментов с совместной моделью амбиполярной диффузии и переноса ионов в Земной ионосфере. Следующей задачей станет объединение разработанной модели ионосферы с моделью общей циркуляции термосферы в единую совместную модель верхней атмосферы (для высот 90-500 км).

В заключение еще раз отметим, что модель динамики ионов в F слое и модель термосферы являются составной частью разрабатываемой в ИВМ РАН модели Земной системы (предполагаемый охват высот от 0 до 500 км), в которой в настоящее время уже реализованы алгоритмы расчета формирования ионосферы в D и E слоях (на высотах 60-120 км).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Solar Terrestrial Energy Program (STEP): Handbook of Ionospheric Models / Ed. Schunk, R.W. – Logan, UT, USA: Center for Atmospheric and Space Sciences, 1996, 295 p.
2. *R.W. Schunk, A. Nagy.* Ionospheres: Physics, Plasma Physics, and Chemistry - Cambridge University Press, 2009, 586 p.
3. *A.D. Richmond, E.C. Ridley, R.G. Roble.* A Thermosphere/Ionosphere General Circulation Model with coupled electrodynamics // *Geophys. Res. Lett.*, 1992, v.19, № 6, p.601-604.
4. *T.J. Fuller-Rowell, M.V. Codrescu, B.G. Fejer, W. Borer, F. Marcos, D.N. Anderson.* Dynamics of the low-latitude thermosphere: Quiet and disturbed conditions // *J. Atmos. Terr. Phys.*, 1997, v.59, №13, p.1533-1540.
5. *A.A. Namgaladze, O.V. Martynenko, M.A. Volkov, A.N. Namgaladze, R.Yu. Yurik.* Highlatitude version of the global numerical model of the Earth's upper atmosphere // *Proceedings of the MSTU*, 1998, v.1, №2, p.23-84.
6. *F.S. Bessarab, Yu.N. Korenko, V.V. Klimenko, M.V. Klimenko, Y. Zhang.* E-region ionospheric storm on May 1–3, 2010: GSM TIP model representation and suggestions for IRI improvement // *Advances in Space Research*, 2015, v.55, №8, p.2124-2130.
7. *S.E. McDonald, F. Sassi, A.J. Mannucci.* SAMI3/SD-WACCM-X simulations of ionospheric variability during Northern winter 2009 // *Space Weather*, 2015, v.13, №9 p.568–584.
8. *H. Wang, R.A. Akmaev, T.-W. Fang, T.J. Fuller-Rowell, F. Wu, N. Maruyama, M.D. Iredell.* First forecast of a sudden stratospheric warming with a coupled whole-atmosphere/ionosphere model IDEA // *J. Geophys. Res. Space Physics*, 2014, v.119, №3, p. 2079–2089.
9. *D.V. Kulyamin, V.P. Dymnikov.* A three-dimensional model of general thermospheric circulation // *Rus. J. of Num. Analys. and Math. Model.*, 2014, v.28, №4, p.353-380.
10. *D.V. Kulyamin, V.P. Dymnikov.* Numerical modelling of coupled neutral atmospheric general circulation and ionosphere D region // *Rus. J. of Num. Analys. and Math. Model.*, 2016, v.31, №3, p.159-171.
11. *В.И. Агошков.* Методы разделения области в задачах гидротермодинамики океанов и морей. – М.: ИВМ РАН, 2017, 187 с.;  
*V.I. Agoshkov.* Metody razdelenia oblasti v zadachakh gidrotermodinamiki okeanov i morey – М.: INM RAS, 2017, 187 p.
12. *P.A. Ostanin, D.V. Kulyamin, V.P. Dymnikov.* Numerical modelling of the Earth's ionosphere F region // *IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science*, 2017, v.96, №1, p.012011(1)–012011(11).
13. *Е.Л. Кузнецова, В.Ф. Формален.* Экономичный полностью неявный метод численного решения параболических уравнений, содержащих смешанные производные // *Вычислительные технологии*, 2010, т.15, №5, с.72-80;  
*E.L. Kuznetsova, V.F. Formalen.* Ekonomichny polnostiu neiyvny metod chislenogo reshenia parabolicheskikh uravnenii, sodержashchykh smeshannye proizvodnye // *Vychislitelnye tekhnologii*, 2010, v.15, №5, p. 72-80.
14. *Y. Takeuchi, N. Adachi, H. Tokumafu.* The stability of generalized Volterra equations // *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, v.62, №3, p.453-473.
15. *С.А. Ишанов, С.В. Клевцур, К.С. Латышев.* Алгоритм "α-β" итераций в задачах моделирования ионосферной плазмы // *Матем. моделирование*, 2009, т.21, №1, с.33-45;  
*S.A. Ishanov, S.V. Klevtzur, K.S. Latyshev.* Algoritm "α-β" iteratsii v zadachakh modelirovaniia ionosfernoi plazmy // *Matem. modelirovanie*, 2009, t.21, №1, s.33-45.
16. *Henk A. van der Vorst.* Iterative Krylov Methods for Large Linear System. – Cambridge University Press, 2003, 221 p.

Поступила в редакцию 01.10.2018

После доработки 01.10.2018

Принята к публикации 19.11.2018