

## СКВОЗНОЙ МЕТОД РАСЧЕТА УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ГЕТЕРОГЕННОЙ СИСТЕМЫ НА ФИКСИРОВАННЫХ ЭЙЛЕРОВЫХ СЕТКАХ

© 2019 г. Ч. Чжан<sup>1</sup>, И.С. Меньшов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

<sup>2</sup> Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
zhang-c@mail.ru; menshov@kiam.ru

DOI: 10.1134/S0234087919040075

Рассматривается новый численный метод для решения уравнений переноса многокомпонентной гетерогенной системы на фиксированных эйлеровых сетках. Система состоит из произвольного числа компонент. Любые две компоненты разделены границей (интерфейсом). Каждая компонента характеризуется характеристической функцией – объемной долей, которая переносится в заданном поле скорости и определяет мгновенное распределение компоненты в пространстве. Особенность данной системы состоит в том, что при её решении требуется выполнение двух условий. Во-первых, объемная доля каждого компонента должна быть в интервале  $[0,1]$  и, во-вторых, любая частичная сумма объемных долей не должна превышать единицы. Для обеспечения этих условий мы вводим специальные характеристические функции вместо объемных долей и предлагаем решать относительно них уравнения переноса. Доказывается, что при таком подходе гарантировано выполнение указанных выше условий. При этом метод совместим с различными TVD схемами (MINMOD, Van Leer, Van Albada, Superbee) и способами разрешения межфазной границы (Limited downwind, THINC, Anti-diffusion, Artificial compression). Метод верифицируется на расчетах ряда тестовых задач с использованием всех упомянутых выше схем. Численные результаты показывают точность и надежность предложенного метода.

Ключевые слова: эйлеровая сетка, перенос, многокомпонентное течение, метод разрешения межфазной границы.

### CONTINUOUS METHOD FOR CALCULATING THE TRANSPORT EQUATIONS FOR A MULTICOMPONENT HETEROGENEOUS SYSTEM ON FIXED EULER GRIDS

*Ch. Zhang<sup>1</sup>, I.S. Menshov<sup>1,2</sup>*

<sup>1</sup> Lomonosov Moscow State University

<sup>2</sup> Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

A new numerical method for solving the transport equations of a multicomponent heterogeneous system on fixed Eulerian grids is considered. The system consists of an arbi-

trary number of components. Any two components are separated by a boundary (interface). Each component is characterized by a characteristic function – the volume fraction, which is transported in a given velocity field and determines the instantaneous distribution of the component in space. The feature of this system is that it requires two conditions to be satisfied. First, the volume fraction of each component should be in the interval  $[0,1]$ , and, secondly, any partial sum of volume fractions should not exceed unity. To ensure these conditions, we introduce special characteristic functions instead of volume fractions and propose to solve the transport equations with respect to them. We prove that this approach ensures the fulfillment of the above conditions. The method is compatible with various TVD schemes (MINMOD, Van Leer, Van Albada, Superbee) and interface-sharpening methods (Limited downwind, THINC, Anti-diffusion, Artificial compression). The method is verified in the calculation of a number of test problems, using all the above schemes. Numerical results show the accuracy and reliability of the proposed method.

Key words: eulerian grid, transport, multicomponent flow, interface-sharpening method.

## **Введение**

Течение многоматериальных сред встречается в различных приложениях и прикладных задачах. Например, это – подводный взрыв, истечение нефтепродуктов или природного газа из подводного трубопровода, задачи высокоскоростного удара, динамические процессы в гетерогенных неоднородных средах и многое другое. В многоматериальном течении присутствуют разные материалы, которые разделены межфазными границами (интерфейсами), имеют различные физико-механические свойства и описываются разными уравнениями состояния. Прямое моделирование таких неоднородных течений включает расчет параметров течения во внутренних однородных подобластях и положения межфазных границ на каждый момент времени. При сильных пространственных изменениях межфазных границ подобласти однородного материала и сетки, связанные с ними, также могут претерпевать сильные деформации, при которых точность расчета падает настолько, что может привести к нефизичным результатам. Например, такая ситуация возникает при моделировании неустойчивости Рихтмайера–Мешкова, развивающейся на межфазной границе двух материалов при прохождении ударной волны.

Чтобы обойти трудности прямого численного моделирования, связанные с деформацией межфазной границы, существует альтернативный подход, который называется в литературе методом диффузной границы. Суть этого подхода состоит в том, что среда из разных материалов рассматривается как некоторая однородная эффективная среда, свойства которой зависят от характеристических функций, определяющих пространственное рас-

пределение составляющих компонент. Как правило, в качестве такой функции используется объемная доля компонента. Межфазная граница в этом случае представляется зоной, где значение объемной доли меняется от нуля до единицы.

Таким образом, методы расчета многоматериальных течений можно разделить на две группы: методы прямого отслеживания межфазной границы [1-5] и методы диффузной межфазной границы [6-9]. В методах первой группы межфазная граница выделяется специальным образом, и ее положение на каждом временном шаге рассчитывается. В методах второго типа проводится сквозной расчет области без выделения границы. При этом межфазная граница определяется подобластью, где объемная доля больше нуля и меньше единицы. Точность моделирования при втором подходе напрямую зависит от размера зоны межфазной границы. Поэтому важнейшей задачей является разработка вычислительных технологий, помогающих максимально уменьшить размер зоны размазывания межфазной границы. На сегодняшний день разработаны несколько таких методик. К ним относятся: метод LD (Limited Downwind) [10,11], метод THINC [12], метод AntiD (Anti-diffusion) [13,14], метод ACM (Artificial Compression Method) [15, 16]. Эти методы были изначально разработаны для случая двух компонент. Прямое обобщение их на случай с  $N$  ( $N \geq 3$ ) компонент не проходит из-за появления дополнительного ограничения на значения объемных долей – условия совместности, а именно: не только объемная доля каждого компонента должна находиться в диапазоне  $[0, 1]$ , но и любая частичная сумма объемных долей должна быть меньше единицы. Оценки показывают, что даже схема MUSCL не гарантирует выполнения этого условия при простом переносе трех и более компонент.

Выполнение условия совместности зависит от численного метода для решения уравнений переноса объемных долей компонент. Поэтому в настоящей работе рассматриваются только уравнения переноса в заданном поле скорости. Разработанные методы потом легко переносятся на полную систему уравнений Эйлера.

Чтобы обеспечить выполнение условия совместности для объемных долей в случае  $N \geq 3$ , S. Jaouen [10] модифицировал численный поток в методе LD [11]. При этом была предложена сложная рекурсивная процедура, которая работает исключительно со схемой LD.

В данной статье мы предлагаем новый подход, который в отличие от [10] не привязан к конкретному численному методу решения уравнения переноса. Он совместим с любым из вышеупомянутых методов разрешения

межфазной границы. Его суть состоит в следующем. Мы предлагаем вместо объемных долей в уравнении переноса использовать специальные характеристические функции, являющиеся нелинейными комбинациями объемных долей, которые автоматически обеспечивали бы выполнение условия совместности при условии, что базовая схема решения уравнения является TVD.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается перенос в поле скорости  $\mathbf{u}$  гетерогенной системы из  $N$  компонент, характеризующейся объемными долями компонент  $z_i$ :

$$\partial_t z_i + \mathbf{u} \cdot \nabla z_i = 0, \quad i \in \Omega = \{1, 2, 3, \dots, N\}. \quad (1)$$

В силу нормировки

$$\sum_{i=1}^N z_i = 1, \quad (2)$$

только  $(N-1)$  неизвестных независимы, и, соответственно, только  $(N-1)$  уравнение переноса надо решать. Не вошедшая в систему компонента будет просто определяться из (2). Не ограничивая общности, будем рассматривать следующую систему:

$$\partial_t z_i + \mathbf{u} \cdot \nabla z_i = 0, \quad i \in \{2, 3, \dots, N\}. \quad (3)$$

Условия совместности объемных долей представляются следующими неравенствами:

$$z_i \in [0, 1], \quad (4)$$

и

$$\sum_j z_j \leq 1, \quad j \in \Lambda \subset \Omega. \quad (5)$$

Если в начальный момент времени заданы начальные данные, удовлетворяющие неравенствам (4) и (5), решение на последующих временных слоях должны также удовлетворять этим неравенствам. Стандартная противотоковая схема первого порядка обеспечивает выполнение условий совместности. Однако при этом из-за большой численной вязкости происходит сильное «размазывание» разрывов объемных долей, из-за которого трудно четко выделить межфазную границу. Схемы более высокого порядка, такие как схема Ван Лиира MUSCL с MINMOD ограничителем производных, основанные на нелинейной интерполяции, существенно уменьшают зону размазывания, но при этом не гарантируют выполнения условий

совместности. Причина заключается в том, что интерполированные значения объемных долей могут нарушать условия (4) и (5). Поясним суть проблемы следующим примером.

На рис.1 приведен пример MINMOD интерполяции для системы из трех компонент. Интерполяция выполняется для значений объемных долей на границе  $i+1/2$  между двумя ячейками  $i$  и  $i+1$ . Хотя значения объемных долей в ячейках удовлетворяют условиям (4) и (5), интерполированные значения на границе  $i+1/2$  условие (5) нарушают. Такая же проблема возникает при использовании других методов разрешения межфазной границы.

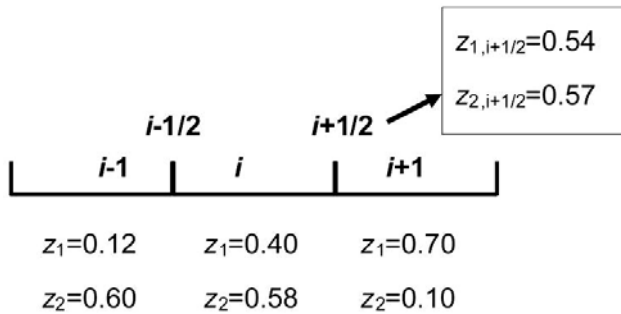


Рис.1. Пример интерполяции MINMOD для системы с тремя компонентами.

В схеме первого порядка условия совместности не будут нарушаться, так как объемные доли на границе равняются усредненным объемным долям либо левой ячейки, либо правой ячейки. Следовательно, на границе условия автоматически выполняются.

## 2. Новые характеристические функции

Для того чтобы выполнить условия совместности при решении уравнения (1) методом повышенного порядка точности, мы предлагаем ввести специальные характеристические функции и решать относительно них уравнения переноса:

$$\partial_i f_i + \mathbf{u} \cdot \nabla f_i = 0, \quad i \in \{2, 3, \dots, N\}, \quad (6)$$

где

$$f_i = f_i(z_{i-1}, z_i, \dots, z_N) = \sum_{k=i}^N z_k / \sum_{k=i-1}^N z_k. \quad (7)$$

В частном случае  $N=3$  характеристические функции имеют следующий вид:

$$f_2 = \frac{z_2 + z_3}{z_1 + z_2 + z_3} = z_2 + z_3, \quad f_3 = \frac{z_3}{z_2 + z_3}.$$

**Лемма 1.** Система уравнений (3) и система уравнений (6) эквивалентны, если

$$z_i \neq 0, \quad i \in \{2, 3, \dots, N\}.$$

**Доказательство.** Перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\begin{aligned} \partial_i f_i(z_2, z_3, \dots, z_N) + \mathbf{u} \cdot \nabla f_i(z_2, z_3, \dots, z_N) = \\ = \sum_{i=2}^N \frac{\partial f_i(z_2, z_3, \dots, z_N)}{\partial z_k} (\partial_i z_k + \mathbf{u} \cdot \nabla z_k) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

После несложных вычислений найдем якобиан

$$J = \begin{vmatrix} \partial f_2 / \partial z_2 & \partial f_2 / \partial z_3 & \cdots & \partial f_2 / \partial z_N \\ \partial f_3 / \partial z_2 & \partial f_3 / \partial z_3 & \cdots & \partial f_3 / \partial z_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial f_N / \partial z_2 & \partial f_N / \partial z_3 & \cdots & \partial f_N / \partial z_N \end{vmatrix} = \frac{1}{\prod_{i=2}^{N-1} \left( \sum_{k=i}^N z_k \right)}. \quad (9)$$

Так как  $z_i \neq 0, i \in \{2, 3, \dots, N\}$ , якобиан не равен нулю. Это значит, что система уравнений (3) и система уравнений (6) эквивалентны. ■

Если одна компонента отсутствует в расчетной ячейке, и ее объемная доля равна нулю, якобиан и характеристические функции приобретают сингулярность. Чтобы избежать такого вырождения, вводится малое значение  $\eta$  (например,  $\eta=10^{-6}$ ), которое ограничивает компоненты от полного вырождения. Таким образом, в рассматриваемой модели отсутствие компоненты означает фактически наличие ее, но в пренебрежимо малом количестве. Полное вырождение компоненты не допускается.

Так как система уравнений (3) и система уравнений (6) эквивалентны, их точные решения совпадают. Поэтому при сходимости численной схемы численные решения будут близки, и в пределе совпадать.

**Лемма 2.** Пусть имеются значения объемных долей, удовлетворяющие условиям совместности (4) и (5), и интерполяционная схема, сохраняющая монотонность при подсеточной реконструкции. Тогда применение такой схемы к значениям характеристических функций (7) определяет интерполированные значения объемных долей, также удовлетворяющие условиям совместности (4) и (5).

**Доказательство.** Так как усредненные значения объемных долей удовлетворяют условиям (4) и (5), то для усредненных значений характеристических функций имеем

$$f_{i,j} \in [0, 1], \quad (10)$$

где  $i$  – индекс компонента,  $j$  – индекс ячейки.

Если используется схема интерполяции, сохраняющая монотонность, то новый экстремум не создается, т.е.

$$f_i^{\text{cf}} \in [0,1], \quad (11)$$

где верхний индекс «cf» обозначает интерполированные значения. Интерполированные значения характеристических функций и объемных долей связаны соотношением

$$f_i^{\text{cf}} = \sum_{k=i}^N z_k^{\text{cf}} / \sum_{k=i-1}^N z_k^{\text{cf}} \in [0,1], \quad i \in \{2,3,\dots,N\}, \quad (12)$$

откуда сразу получаем, что

$$0 \leq z_N^{\text{cf}} \leq \sum_{k=N-1}^N z_k^{\text{cf}} \leq \dots \leq \sum_{k=3}^N z_k^{\text{cf}} \leq \sum_{k=2}^N z_k^{\text{cf}} \leq 1. \quad (13)$$

Неравенство (13) обеспечивает выполнение условий (4) и (5). ■

Таким образом, решив систему уравнений (6), можно найти численные решения системы (3), удовлетворяющие требованиям (4) и (5). Для этого надо выразить объемные доли через значения характеристических функций. Решение (7) дает простые формулы для этого преобразования:

$$z_i = \prod_{k=2}^i f_k - \prod_{k=2}^{i+1} f_k, \quad i < N, \quad z_N = \prod_{k=2}^N f_k. \quad (14)$$

Если используется схема TVD для решения уравнения переноса в характеристических функциях, то их полные вариации будут убывать во времени, т.е.

$$[\text{TV}(f_i)]^{n+1} \leq [\text{TV}(f_i)]^n, \quad (15)$$

где полная вариация определяется по следующей формуле:

$$\text{TV}(f_i) = \sum_j |f_{i,j+1} - f_{i,j}|. \quad (16)$$

Однако, не очевидно, что TVD характеристических функций гарантирует также TVD свойство объемных долей. Монотонность характеристических функций не обязана гарантировать монотонность объемных долей. Тем не менее, можно доказать, что полная вариация объемной доли при этом остается ограниченной. Для этого нам нужно сначала доказать следующую лемму.

**Лемма 3.** Полная вариация произведения двух характеристических функций ограничена следующим неравенством:

$$\text{TV}(f_m f_l) \leq \text{TV}(f_m) + \text{TV}(f_l). \quad (17)$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \text{TV}(f_l f_m) &= \sum_j |(f_l f_m)_{j+1} - (f_l f_m)_j| = \\ &= \sum_j |(f_l)_{j+1} [(f_m)_{j+1} - (f_m)_j] + (f_m)_j [(f_l)_{j+1} - (f_l)_j]| \leq \\ &\leq \sum_j |(f_l)_{j+1} [(f_m)_{j+1} - (f_m)_j]| + \sum_j |(f_m)_j [(f_l)_{j+1} - (f_l)_j]|. \end{aligned} \quad (18)$$

Так как  $0 \leq (f_l)_{j+1}, (f_m)_j \leq 1$ , получим, что

$$\begin{aligned} \text{TV}(f_l f_m) &\leq \sum_j |(f_l)_{j+1} [(f_m)_{j+1} - (f_m)_j]| + \sum_j |(f_m)_j [(f_l)_{j+1} - (f_l)_j]| \leq \\ &\leq \sum_j |(f_m)_{j+1} - (f_m)_j| + \sum_j |(f_l)_{j+1} - (f_l)_j| = \text{TV}(f_l) + \text{TV}(f_m). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (19)$$

**Лемма 4.** Полная вариация объемной доли  $z_i$  ограничена следующими неравенствами:

$$\text{TV}(z_i) \leq C_i, \quad C_i^{n+1} \leq C_i^n. \quad (20)$$

*Доказательство.* Используя уравнение (14) и лемму 3, получим

$$\text{TV}(z_i) = \sum_{k=2}^i \text{TV}(f_k) + \sum_{k=2}^{i+1} \text{TV}(f_k) = C_i, \quad i < N \quad (21)$$

$$\text{и } \text{TV}(z_N) = \text{TV}\left(\prod_{k=2}^N f_k\right) = \sum_{k=2}^N \text{TV}(f_k) = C_N. \quad (22)$$

Из неравенства (15) следует, что  $C_i^{n+1} \leq C_i^n$ ,  $i \in \{2, 3, \dots, N\}$ .  $\blacksquare$

Лемма 4 означает, что, хотя полная вариация объемной доли не убывает, она, тем не менее, ограничена верхним пределом, убывающим во времени.

**Замечание.** Характеристические функции (7) не является единственным выбором. Следующие комбинации тоже гарантируют выполнение условий совместности (4) и (5):

$$f_i = f_i(z_{i-1}, z_i, \dots, z_N) = \sum_{k=i}^N \Psi(z_k) / \sum_{k=i-1}^N \Psi(z_k), \quad (23)$$

$$f_i = f_i(z_{i-1}, z_i, \dots, z_N) = \Psi\left(\sum_{k=i}^N z_k / \sum_{k=i-1}^N z_k\right), \quad (24)$$

где монотонная функция  $\Psi(x) \in [0, 1]$ ,  $x \in [0, 1]$ . Например,  $\Psi(x) = x^\beta$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^+$ .



### 3. Дискретизация

Явная схема и метод конечного объема используются для дискретизации системы уравнений (3) и (6):

$$q^{n+1} = q^n - u\lambda(q_{j+1/2}^n - q_{j-1/2}^n), \quad (25)$$

где  $\lambda = \Delta t / \Delta x$ ,  $\Delta t$  и  $\Delta x$  – шаг по времени и шаг по пространству, соответственно,  $u$  – скорость, верхние индексы  $n$ ,  $n+1$  обозначают соответствующий номер шага по времени. Ниже индекс  $n$  опускается для простоты.

Мы анализируем два подхода, когда в качестве неизвестной величины берется  $q = z_i$  и  $q = f_i$  соответственно. В обоих случаях характеристические функции (7) используются для подсеточной интерполяции, чтобы удовлетворять условиям совместности (4) и (5). Противопотоковая схема используется для вычисления численного потока, т.е.

$$q_{j+1/2} = \frac{u + |u|}{2} q_{j+1/2,L} + \frac{u - |u|}{2} q_{j+1/2,R}, \quad (26)$$

где  $q_{j+1/2,L}$ ,  $q_{j+1/2,R}$  – интерполированные значения  $q$  с левой и правой стороны границы между ячейками  $j$  и  $j+1$ .

В следующем разделе мы сравниваем предложенный метод с методом S. Jaouen [10], разработанным на основе схемы LD [11]. Последняя фактически эквивалентна схеме Ultrabee для линейного уравнения переноса. Для того чтобы удовлетворить условиям совместности, в [10] предлагается достаточно громоздкая модификация численного потока LD. Рассматриваются уравнения переноса для  $q=z_i$ , и численный поток определяется следующим образом:

$$z_{i,j+1/2} = \begin{cases} d_{i,j+1/2}, & z_{i,j+1/2} < d_{i,j+1/2}, \\ z_{i,j+1}, & d_{i,j+1/2} \leq z_{i,j+1/2} \leq D_{i,j+1/2}, \\ D_{i,j+1/2}, & z_{i,j+1/2} > D_{i,j+1/2}. \end{cases} \quad (27)$$

$$m_{i,j+1/2} = \min(z_{i,j}, z_{i,j+1}), \quad M_{i,j+1/2} = \max(z_{i,j}, z_{i,j+1}),$$

$$b_{i,j+1/2} = \frac{z_{i,j} - M_{i,j-1/2}}{u\lambda} + M_{i,j-1/2}, \quad B_{i,j+1/2} = \frac{z_{i,j} - m_{i,j-1/2}}{u\lambda} + m_{i,j-1/2}, \quad (28)$$

$$a_{i,j+1/2} = \max(b_{i,j+1/2}, m_{i,j+1/2}), \quad A_{i,j+1/2} = \min(B_{i,j+1/2}, M_{i,j+1/2}),$$

$$d_{1,j+1/2} = \max\left(a_{1,j+1/2}, 1 - \sum_{l=2}^N A_{l,j+1/2}\right), \quad D_{1,j+1/2} = \min\left(A_{1,j+1/2}, 1 - \sum_{l=2}^N a_{l,j+1/2}\right),$$

$$d_{i,j+1/2} = \max\left(a_{i,j+1/2}, 1 - \sum_{l=1}^{i-1} z_{l,j+1/2} - \sum_{l=i+1}^N A_{l,j+1/2}\right), \quad i \in \{2, 3, \dots, N-1\},$$

$$D_{i,j+1/2} = \min \left( A_{i,j+1/2}, 1 - \sum_{l=1}^{i-1} z_{l,j+1/2} - \sum_{l=i+1}^N a_{l,j+1/2} \right), \quad i \in \{2, 3, \dots, N-1\}.$$

Очевидно, что метод [10] намного сложнее предложенного в настоящей работе подхода на основе характеристических функций. Кроме того, он жестко привязан к схеме LD. Наш метод не предполагает какой-то специальной схемы разрешения межфазной границы. Он совместим с любым из указанных выше методов нелинейной интерполяции без внесения в них каких-либо модификаций.

#### 4. Численные тесты

В этом разделе предложенный метод характеристических функций тестируется на некоторых одномерных и двумерных задачах переноса. Рассматриваются и сравниваются классические TVD схемы второго порядка, такие как MUSCL с ограничителями производных MINMOD, Van Albada, Superbee, а также специальные алгоритмы разрешения межфазной границы, в том числе LD, AntiD, THINC, ACM. По умолчанию во всех расчетах число Куранта равнялось 0.2.

**4.1. Адвекция трехкомпонентной системы.** Расчетная область представляет собой интервал  $[0, 1]$ . Начальные распределения компонент имеют следующий вид:

$$z_1(x) = \frac{X_{[0.4, 0.6]}(x)}{2}, \quad z_2(x) = |x - 1/2|, \quad z_3(x) = 1 - z_1(x) - z_2(x), \quad (29)$$

где функция  $X_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I. \end{cases}$

Периодические граничные условия применяются на левой и правой границах. Скорость адвекции  $u=1$ . В этом примере мы не рассматриваем схемы AntiD, THINC и ACM, которые разработаны специально для разрешения межфазной границы, где происходит резкий переход  $z_+ \rightarrow 0$ ,  $z_- \rightarrow 1$  или  $z_+ \rightarrow 1$ ,  $z_- \rightarrow 0$ .

На рис.2 показано начальное распределение объемных долей каждой компоненты и решение системы уравнений (3) по противопотоковой схеме первого порядка. Видно, что происходит сильное искажение начальных распределений из-за чрезмерной численной вязкости.

Схемы второго порядка уменьшают численную вязкость. Но если они применяются к уравнению переноса для объемных долей, оператор нелинейной интерполяции может приводить к отрицательным значениям, как это видно на рис.3, где приведены численные результаты решения по схемам MUSCL-Superbee и LD.

Рассмотрим теперь численные решения, которые получаются, если в уравнении переноса использовать предложенные характеристические функции. Численные решения системы уравнений (6), полученные с использованием схемы второго порядка MUSCL с различными ограничителями производных (Minmod, Van Leer, Van Albada, Superbee) и схемы LD, приведены на рис.4, 5 и 6 соответственно. Результаты показывают, что получающиеся значения объемных долей удовлетворяют условиям совместности во всех расчетных вариантах; отрицательные объемные доли не появляются.

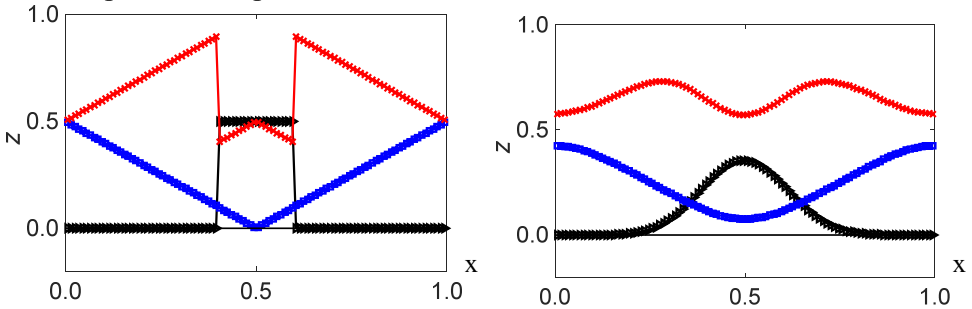


Рис.2. Начальные распределение объемных долей (слева) и численные результаты по противопотоковой схеме первого порядка после одного цикла,  $t=1.0$  (справа).

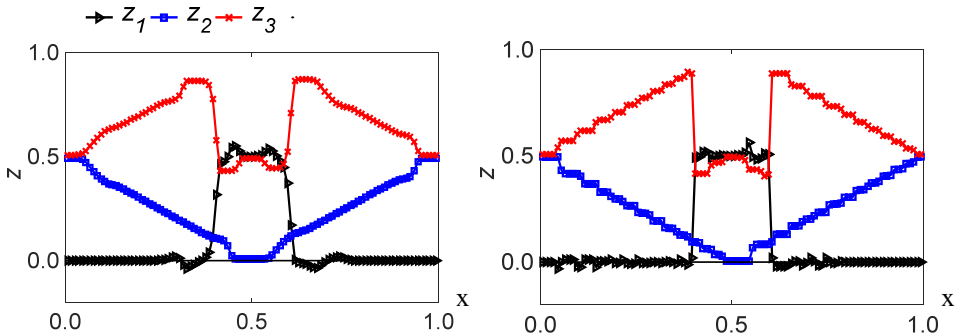


Рис.3. Численные результаты по схеме Superbee (слева) и LD (справа) после одного цикла,  $t=1.0$ . Решение уравнений (3) относительно объемных долей.

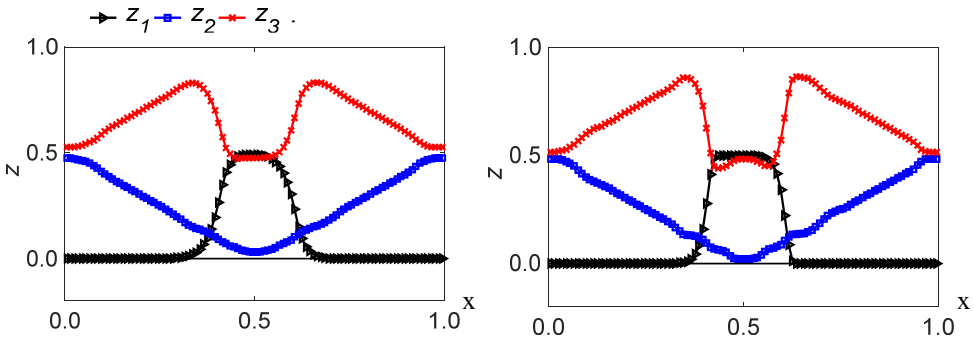
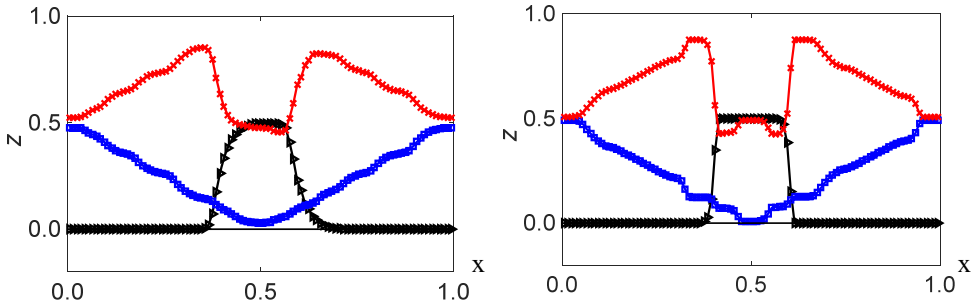
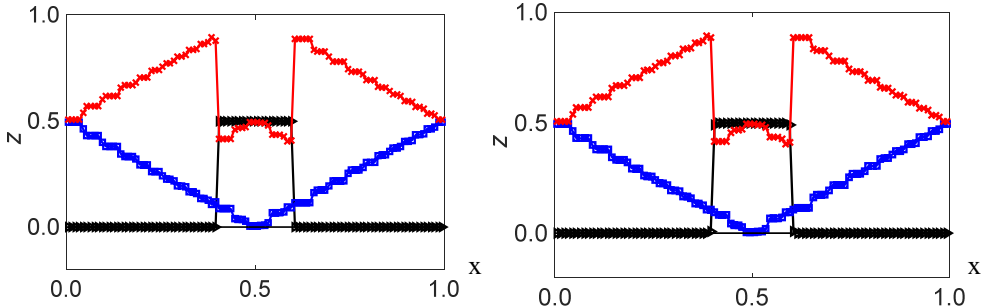


Рис.4. Численные результаты по схеме Minmod (слева) и Van Leer (справа) после одного цикла,  $t=1.0$ . Решение уравнений (6) относительно характеристических функций.

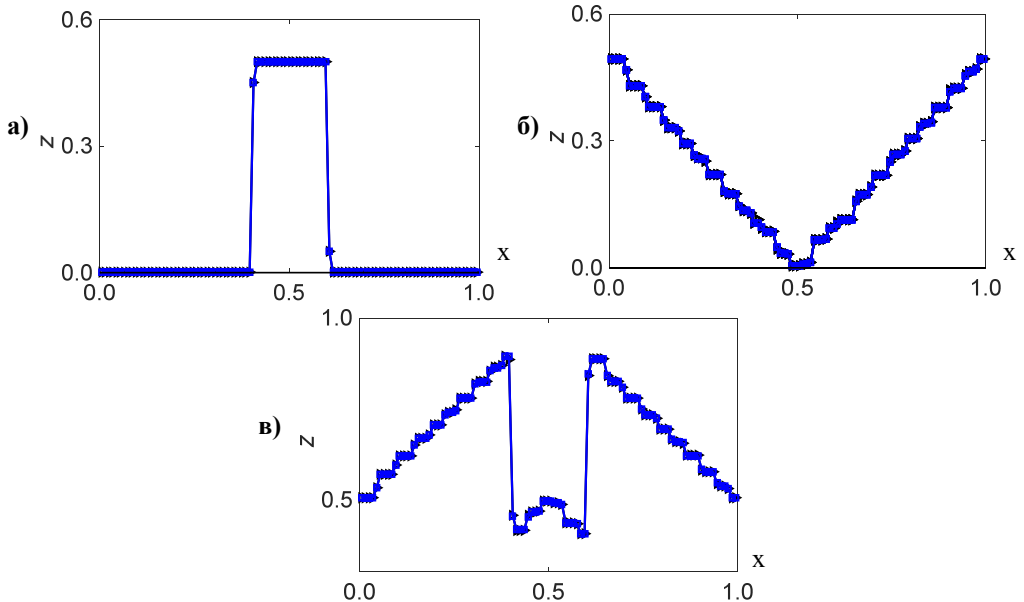
$\rightarrow Z_1$   $\rightarrow Z_2$   $\rightarrow Z_3$  .



**Рис.5.** Численные результаты по схеме Van Albada (слева) и Superbee (справа) после одного цикла,  $t=1.0$ . Решение уравнений (6) относительно характеристических функций.  $\rightarrow z_1$  —  $z_2$  —  $z_3$ .

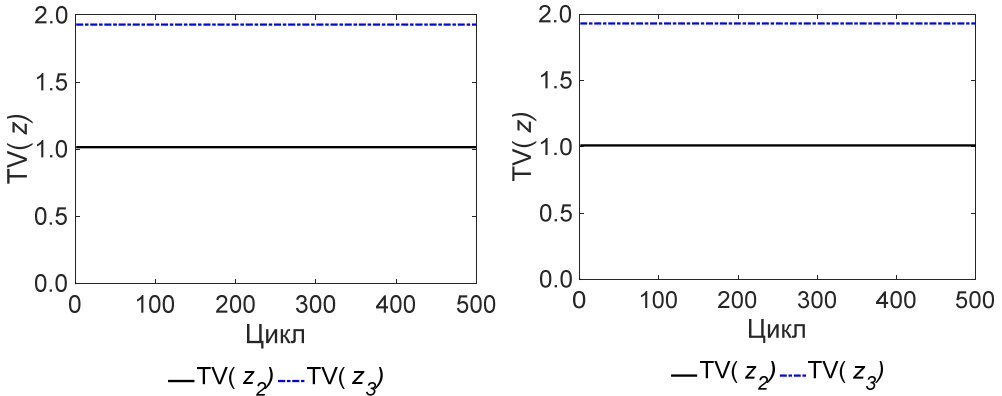


**Рис.6.** Численные результаты по схеме LD с характеристическими функциями (6) (слева) и методом S. Jaouen [10] (справа) после одного цикла,  $t=1.0$ .  $\rightarrow z_1$  —  $z_2$  —  $z_3$ .



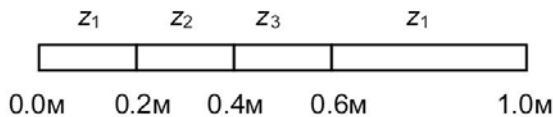
**Рис.7.** Сравнение метода LD с характеристическими функциями и метода S. Jaouen [10]. Расчет 500 циклов,  $t=500$ : (а)  $z_1$ , (б)  $z_2$ , (в)  $z_3$ .  $\rightarrow$  Наш метод —  $\blacksquare$  Метод Jaouen.

На рис.7 приведены результаты расчета 500 циклов ( $t=500$ ) по схеме LD с характеристическими функциями. Для сравнения также приведены аналогичные результаты по методу S. Jaouen [10]. Результаты фактически совпадают. Полные вариации показаны на рис.8. Видно, что полная вариация почти не меняется со временем и в нашем методе, и в методе [10].



**Рис.8.** Полные вариации численных решений в методе LD с характеристическими функциями (слева) и методе S. Jaouen [10] (справа). Расчет 500 циклов ( $t=500$ ).

**4.2. Перенос межфазной границы.** Эта задача моделирует движение межфазных границ. Ее постановка схематично изображена на рис.9. Расчетная область представляет собой отрезок  $[0.0\text{м}, 1.0\text{м}]$ . Внутри области заданы интервалы  $I_1 = [0.0\text{м}, 0.2\text{м}]$ ,  $I_2 = [0.2\text{м}, 0.4\text{м}]$ ,  $I_3 = [0.4\text{м}, 0.6\text{м}]$ ,  $I_4 = [0.6\text{м}, 1.0\text{м}]$ , в которых в начальный момент времени находятся 1-я, 2-я, 3-я и 1-я компоненты трехкомпонентной системы. Число счетных ячеек составляет 100. Периодические граничные условия задаются на левой и правой границе.



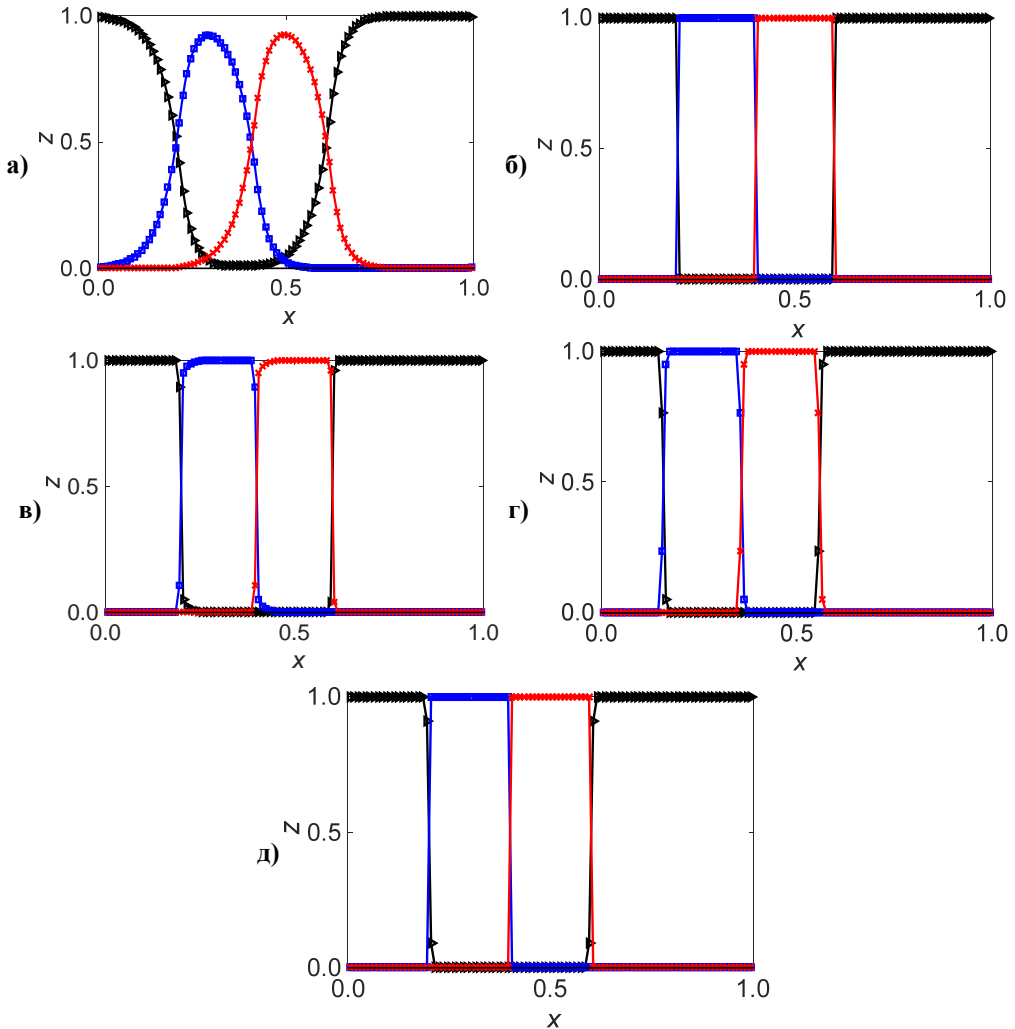
**Рис.9.** Схема расчета задачи переноса межфазной границы.

Начальные данные задаются следующим образом:

$$z_1(x) = \Xi_{I_1 \cup I_4}(x), \quad z_2(x) = \Xi_{I_2}(x), \quad z_3(x) = \Xi_{I_3}(x).$$

где 
$$\Xi_I(x) = \begin{cases} 1 - 10^{-6}, & x \in I, \\ (1/(N-1)) \times 10^{-6}, & x \notin I. \end{cases}$$

В этой задаче мы тестируем наш метод со схемами MINMOD, LD, THINC, AntiD и ACM. Численные результаты после 10 циклов представлены на рис.10. Видно, что за исключением MINMOD межфазные границы имеют высокое разрешение в 2-3 счетных ячейках. При этом численных осцилляций, связанных с нарушением условий совместности, не наблюдается.

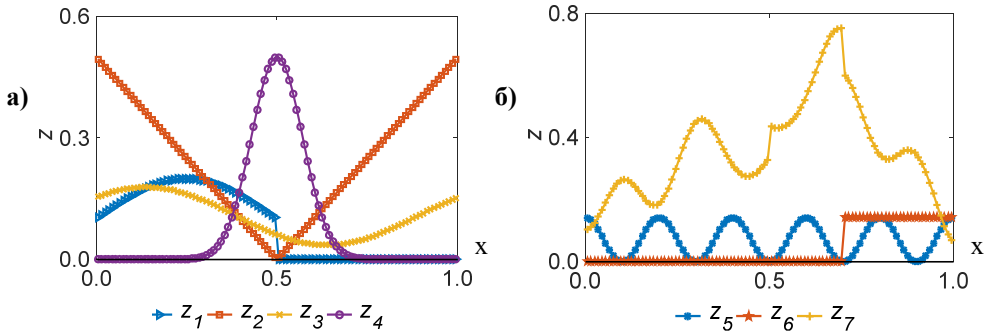


**Рис.10.** Численные результаты задачи переноса межфазной границы: (а) схема Minmod, (б) схема LD, (в) схема THINC, (г) AntiD, (д) ACM.  $\blacktriangleright z_1$   $\blacksquare z_2$   $\blacktriangleright z_3$ .

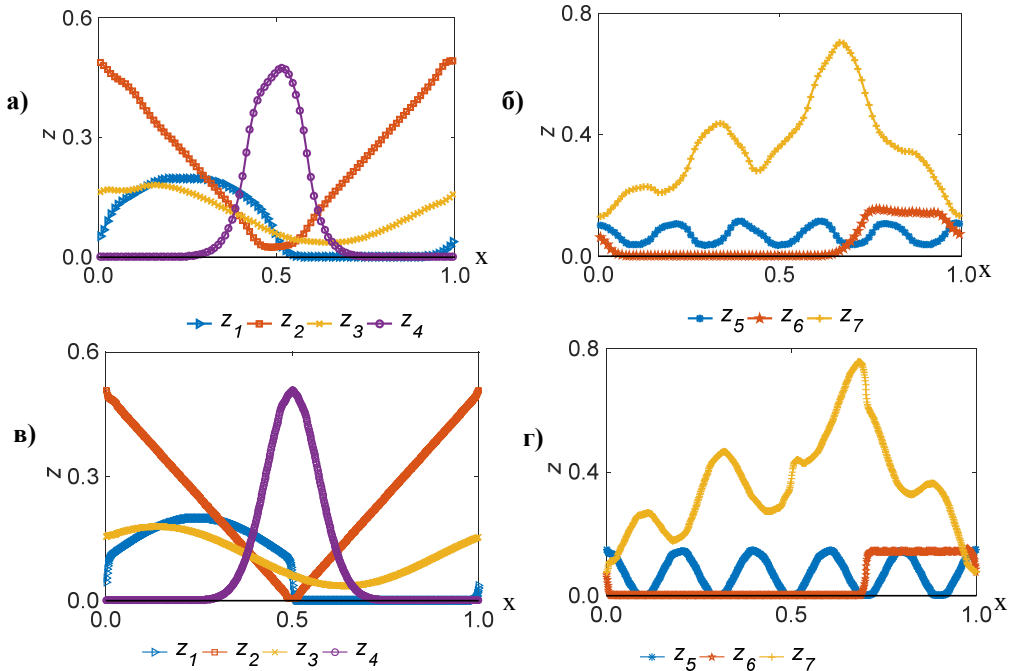
**4.3. Перенос семи компонентов.** Далее рассмотрим более сложную с вычислительной точки зрения задачу – перенос 7-компонентной системы. В начальный момент каждая компонента задается распределением объемных долей, которые удовлетворяют условиям совместности (4) и (5):

$$\begin{aligned}
 z_1(x) &= X_{[0,1/2]}(x)((1 + \sin(2\pi x))/10), & z_2(x) &= |x - 1/2|, \\
 z_3(x) &= (1.5 + \sin(0.7 + 2\pi x))/14, & z_4(x) &= 0.5 \exp\left(-100(x - 1/2)^2\right), \\
 z_5(x) &= (1 + \cos(10\pi x))/14, & z_6(x) &= \left(X_{[0.7,1]}(x)\right)/7, & z_7(x) &= 1 - \sum_{k=1}^6 z_k(x).
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

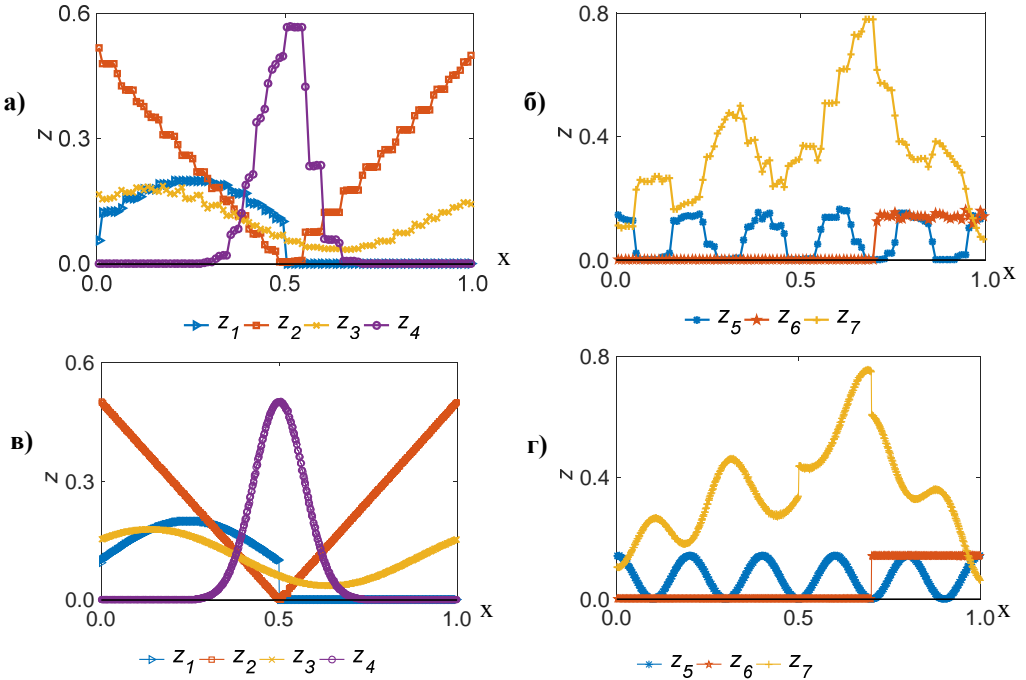
Начальное распределение показано на рис.11. Расчет проводится на двух сетках с числом ячеек 100 и 1000, соответственно. Численные результаты по схемам MINMOD и LD представлены на рис.12 и 13. Более диссипативная схема MINMOD дает ожидаемое большее искажение в распределениях объемных долей по сравнению со схемой LD, которая показывает отличную сходимость. Как видно из рис.13, на 1000 ячейках разрешение разрывов в LD схеме составляет всего 1 точку. При этом наш метод характеристических функций гарантированно обеспечивает свойство совместности (4) и (5) в численных решениях как в MINMOD, так и в LD схеме, на разных сеточных разрешениях.



**Рис.11.** Начальное распределение объемных долей в задаче переноса 7-компонентной системы.



**Рис.12.** Численные результаты задачи переноса 7-компонентной системы по схеме MINMOD: (а, б) число ячеек – 100, (в, г) число ячеек – 1000.



**Рис.13.** Численные результаты задачи переноса 7-компонентной системы по схеме LD: (а, б) число ячеек – 100, (в, г) число ячеек – 1000.

**4.4. Двумерная задача переноса 4-компонентной системы.** Рассматривается задача переноса 4-компонентной системы, которая изображена на рис.14. Система в начальный момент представляется двумя окружностями ( $O_1, O_2$ ) и одной крестообразной областью ( $C$ ), которые определяются следующими формулами:

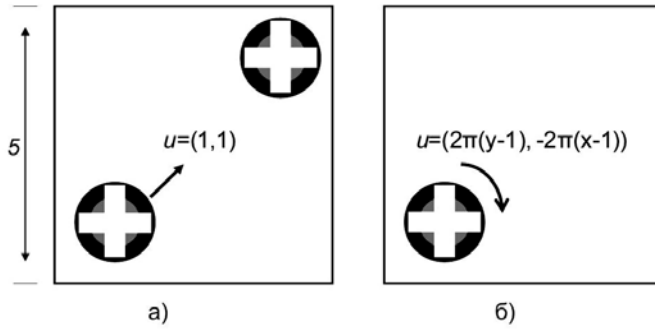
$$\begin{cases} O_1 = B((1,1), 0.5), \\ O_2 = B((1,1), 0.7), \\ C = [0.8, 1.2] \times [0.4, 1.6] \cup [0.4, 1.6] \times [0.8, 1.2]. \end{cases}$$

Начальное распределение объемных долей компонент имеет вид

$$\begin{aligned} z_1(x, y) &= \Xi_C(x, y), & z_2(x, y) &= \Xi_{O_1/C}(x, y), \\ z_3(x, y) &= \Xi_{O_2/(C \cup O_1)}(x, y), & z_4(x, y) &= 1 - \sum_{k=1}^3 z_k(x, y). \end{aligned}$$

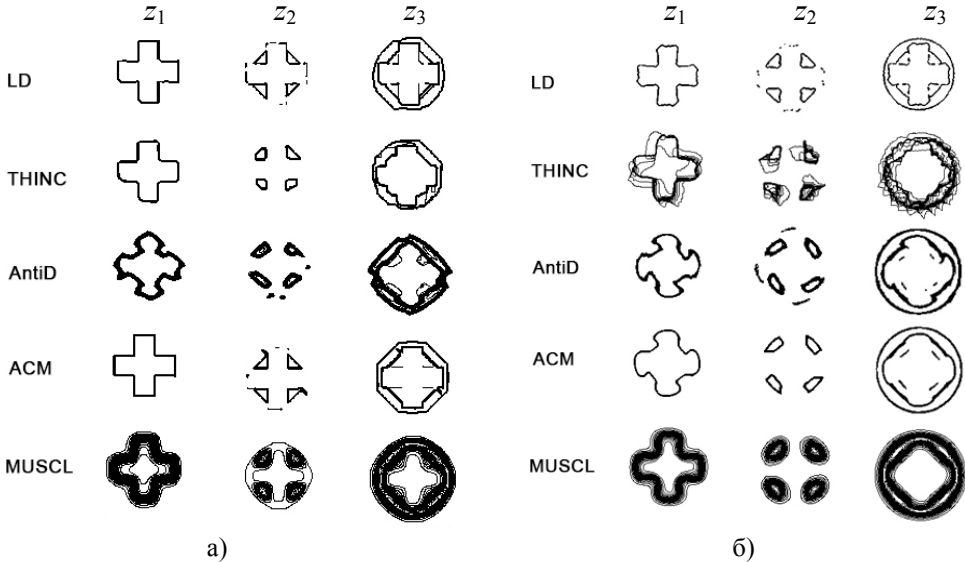
Рассматриваются следующие постановки: (а) трансляция материалов вдоль диагонали со скоростью  $u = (1,1)$  и (б) вращение около точки  $(1,1)$ . Тестируются пять методов: (1) LD, (2) THINC, (3) AntiD, (4) ACM, (5) MUSCL.





**Рис.14.** Схема двумерной задачи переноса 4-х – компонентной системы: (а) трансляция, (б) вращение.

Периодические граничные условия задаются на противоположных границах. Вычисление проводится на сетке  $400 \times 400$ . Используется метод Стрэнга (Strang) расщепления по направлению. Численные результаты после двух циклов ( $t = 10$  с) переноса по диагонали представлены на рис.15а. В результатах, полученных по схеме MUSCL, наблюдается сильное размазывание межфазных границ. Другие методы разрешения межфазной границы эффективно уменьшают зону размазывания. Наиболее хорошее разрешение интерфейсов обеспечивается схемами LD и ACM.



**Рис.15.** Линии уровней объемных долей: (а) после двух циклов трансляции вдоль диагонали, (б) после двух циклов вращения.

В схеме AntiD разрешение интерфейсов несколько хуже, чем в других методах. Причем, распределение объемных долей искажается в результате переноса. Можно уменьшить зону межфазной границы с помощью двойно-

го применения схемы AntiD, но это приводит к еще более сильному искажению ее формы.

Численные решения задачи в случае вращения, полученные после двух циклов ( $t = 2c$ ) по разным схемам, представлены на рис.15б. Как видно из представленных результатов, точнее всего интерфейсы разрешаются здесь также схемой LD. В распределениях объемных долей, полученных по схеме THINC, наблюдаются осцилляции и достаточно сильное размазывание межфазной границы. В распределениях объемных долей, полученных по схемам AntiD и АСМ, имеются сильные искажения формы границы.

**4.5. Перенос 4-компонентной системы в вихревом поле.** В последнем тесте мы рассматриваем перенос 4-компонентной системы вихревым полем скорости. Начальное распределение компонент представлено на рис.16. Длина стороны квадрата – 1.0. Центр окружности  $(\Omega_1 + \Omega_2) - (0.50, 0.50)$ , радиус – 0.15. В расчетной области в начальный момент находятся четыре разных компонента. Объемные доли определяются по следующим формулам:

$$z_1(x, y) = \Xi_{\Omega_1}(x, y), \quad z_2(x, y) = \Xi_{\Omega_2}(x, y),$$

$$z_3(x, y) = \Xi_{\Omega_3}(x, y), \quad z_4(x, y) = 1 - \sum_{k=1}^3 z_k(x, y).$$

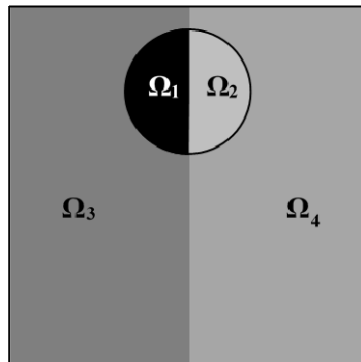


Рис.16. Схема задачи переноса в вихревом поле скорости.

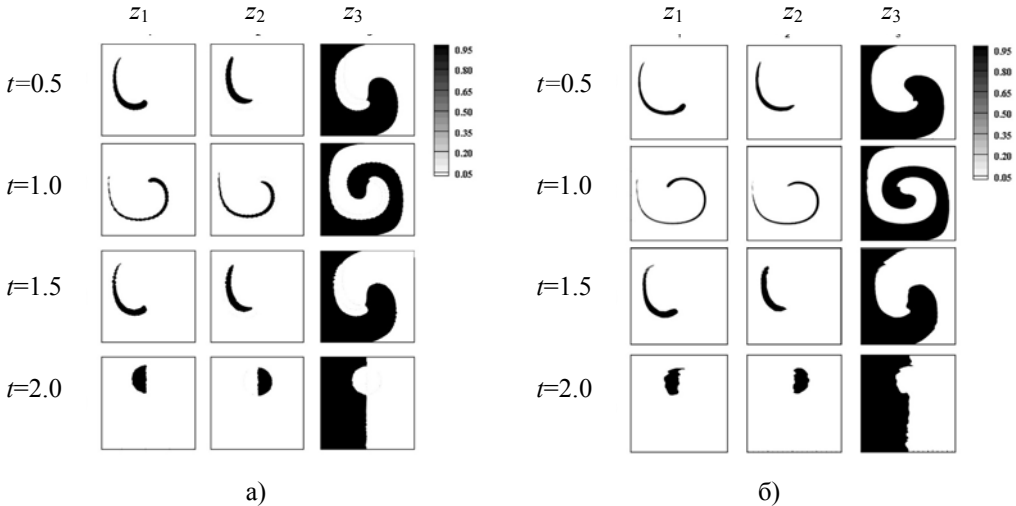
Поле скорости сначала определяется вихревым распределением с направлением по часовой стрелке,

$$u = \sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \quad v = -\sin^2(\pi y) \sin(2\pi x).$$

В момент времени  $t=1.0$  направление вектора скорости мгновенно меняется на противоположное, т.е. при  $t>1.0$  распределение вектора скорости становится

$$u = -\sin^2(\pi x) \sin(2\pi y), \quad v = \sin^2(\pi y) \sin(2\pi x).$$

Таким образом, к моменту времени  $t=2.0$  система должна вернуться в начальное состояние. В этом тесте мы тестируем только схемы LD и ACM, которые наилучшим образом показали себя на предыдущих задачах. Вычисления проводятся на сетке  $200 \times 200$ . Численные результаты приведены, соответственно, на рис.17а, б. Разрешение интерфейсов LD схемой почти идеально. Метод ACM допускает искажение формы границы.



**Рис.17.** Распределения объемных долей, полученных в разные моменты времени:  $t=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ : (а) методом LD, (б) методом ACM.

## Заключение

В настоящей работе описан новый метод решения системы уравнений переноса объемных долей многокомпонентной гетерогенной системы в заданном поле скоростей на неподвижных эйлеровых сетках. Метод гарантированно обеспечивает выполнение условий совместности объемных долей, а именно: (1) объемная доля каждого компонента должна быть в диапазоне  $[0,1]$  и (2) любая частичная сумма объемных долей не должна превышать единицу. При этом метод совместим с разными TVD схемами и методами разрешения межфазных границ. Метод прост и не требует существенных изменений в расчетных схемах. Он протестирован на разных задачах со схемами MUSCL (с ограничителями Minmod, Van Leer, Van Albada, Superbee), THINC, LD, AntiD, AMC. Наилучшие свойства разрешения интерфейсов были получены со схемой LD. Метод может быть применен к расчету сквозным образом (на фиксированных эйлеровых сетках) несжимаемых и сжимаемых течений многофазных сред с интерфейсами, что будет предметом наших будущих работ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Galera S., Maire P.H., Breil J. A two-dimensional unstructured cell-centered multi-material ALE scheme using VOF interface reconstruction // *J. Comput. Phys.*, 2010, v.229, p.5755–5787.
2. Maire P.H., Abgrall R., Breil J., Ovardia J. A cell-centered Lagrangian scheme for two-dimensional compressible flow problems // *SIAMJ. Sci. Comput.*, 2007, v.29, p.1781–1824.
3. Glimm J., Li X.L., Liu Y.J., Xu Z.L., Zhao N. Conservative front tracking with improved accuracy // *SIAM J. Numer. Anal.*, 2003, v.41, p.1926–1947.
4. Terashima H., Tryggvason G. A front-tracking/ghost-fluid method for fluid interfaces in compressible flows // *J. Comput. Phys.*, 2009, v.228, p.4012–4037.
5. Mulder W., Osher S., Sethian J.A. Computing interface motion in compressible gas dynamics // *J. Comput. Phys.*, 1992, v.100, p.209–228.
6. Abgrall R. How to prevent pressure oscillations in multicomponent flow calculations: a quasi-conservative approach // *J. Comput. Phys.*, 1996, v.125, p.150–160.
7. Saurel R., Abgrall R. A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows // *J. Comput. Phys.*, 1999, v.150, № 2, p.425–467.
8. Menshov I., Zakharov P. On the composite Riemann problem for multi-material fluid flows // *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 2014, v.76, p.109–127.
9. Allaire G., Clerc S., Kokh S. A five-equation model for the simulation of interfaces between compressible fluids // *J. Comput. Phys.*, 2002, v.181, p.577–616.
10. Jaouen S., Lagoutière F. Numerical transport of an arbitrary number of components // *Comput. Methods Appl. Math.*, 2007, v.196, p.3127–3140.
11. Després B., Lagoutière F. Contact discontinuity capturing schemes for linear advection, compressible gas dynamics // *J. Sci. Comput.*, 2001, v.16, p.479–524.
12. Xiao F., Honma Y., Kono T. A simple algebraic interface capturing scheme using hyperbolic tangent function // *Int. J. Numer. Mech. Fluids*, 2005, v.48, p.1023–1040.
13. So K.K., Hu X.Y., Adams N.A. Anti-diffusion method for interface steepening in two-phase incompressible flow // *J. Comput. Phys.*, 2011, v.230, p.5155–5177.
14. So K.K., Hu X.Y., Adams N.A. Anti-diffusion interface sharpening technique for two-phase compressible flow simulations // *J. Comput. Phys.*, 2012, v.231, p.4304–4323.
15. Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities, I: single conservation laws // *Commun. Pure Appl. Math.*, 1977, v.30, p.611–638.
16. Harten A. The artificial compression method for computation of shocks and contact discontinuities, III: self-adjusting hybrid schemes // *Math. Comput.*, 1978, v.32, p.363–389.

Поступила в редакцию 18.06.2018

После доработки 18.06.2018

Принята к публикации 19.11.2018