

**МОДЕЛИ ОЛЕДЕНЕНИЯ И ОТТАИВАНИЯ
ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МОРСКОГО ГАЗОПРОВОДА
В СЕВЕРНЫХ МОРЯХ**

© 2019 г. *Г.И. Курбатова, Н.Н. Ермолаева, Б.Я. Никитчук*

Санкт-Петербургский государственный университет
g.kurbatova@spbu.ru, n.ermolaeva@spbu.ru

DOI: 10.1134/S0234087919050010

Представлены модели оледенения и оттаивания внешней поверхности морского газопровода в северных морях. В модели оледенения предложена модификация условия Стефана, позволяющая учесть особенность нарастания льда в соленой воде. Приведены алгоритм численного решения нестационарной задачи оледенения (оттаивания) многослойной цилиндрической области методом явного выделения фронта и результаты расчета вариантов этих задач, представляющих практический интерес. Получены качественные оценки допустимости перехода к квазистационарному варианту модели оледенения (оттаивания) многослойных областей, приведено количественное условие допустимости квазистационарного приближения в расчетах оледенения (оттаивания) многослойной области. Эти оценки имеют большое значение при создании эффективных вычислительных алгоритмов расчета неустановившихся режимов транспортировки газа по морским газопроводам. Для задач оттаивания поверхности морского газопровода приведено уравнение, позволяющее найти минимальную толщину слоя льда в исследуемых условиях.

Ключевые слова: задача Стефана, оледенение, оттаивание, морские газопроводы в северных морях, численное решение, примеры расчета.

**GLACIATION AND THAWING MODELS OF THE OUTER SURFACE
OF AN OFFSHORE GAS PIPELINE IN THE NORTHERN SEAS**

G.I. Kurbatova, N.N. Ermolaeva, B.Y. Nikitchuk

St. Petersburg State University

The models of glaciation and thawing of the outer surface of an offshore gas pipeline are presented. In the glaciation model the modification of Stefan condition is proposed which allows accounting for the special features of a sea ice growing in salt water. The algorithm of numerical solution to unsteady problem of glaciation (thawing) of the multi-layer cylindrical area by the explicit front tracking method and some numerical simulation results of different variants of these problems, which are of practical interest, are

given. The quantitative estimates of a shift to a quasi-stationary version of the glaciation (thawing) model of multilayer areas are obtained. The qualitative condition for the admissibility of using a quasi-stationary approximation for numerical simulation of glaciation of the multilayer area is found. These estimates are very important for the developing effective numerical algorithms for simulation of the unsteady regimes of gas transportation through the offshore gas pipelines. For the problems of thawing of the outer surface pipelines the equation is proposed, which allows finding the minimal ice layer thickness under researched conditions.

Key words: Stefan problem, glaciation, thawing, offshore gas pipelines in the northern seas, numerical solution, examples of calculation.

1. Введение

В северных морях, например, в Баренцевом, возможно оледенение внешней поверхности морского газопровода. В [1] приведены математические модели и алгоритмы расчета установившихся режимов транспортировки газа по проектируемым газопроводам, а также характерные для этих задач значения параметров модели, в частности, значения придонной температуры воды $T^* \sim 272.5$ К и температуры фазового перехода $T_* \sim 271$ К. На входе в газопровод подается нагретый газ под высоким давлением, по мере прохождения трассы он охлаждается за счет теплообмена с окружающей водой и за счет газодинамических эффектов. Для протяженных морских газопроводов температура газа в конце трассы может опуститься ниже температуры T_* . На этих участках возможно оледенение внешней поверхности газопровода.

В расчетах неустановившихся режимов важна динамика нарастания льда, которая зависит от температуры газа, от геометрических и теплофизических параметров слоев обшивки газопровода, от температуры окружающей воды и от условий обтекания газопровода. Наличие слоя льда влияет как на теплообмен газа с окружающей средой, так и на плавучесть газопровода. Математическая модель транспортировки газа включает в себя модель оледенения, которая в общем случае неотделима от модели процессов в потоке газа. Толщина слоя льда существенно зависит от температуры окружающей воды, которая подвержена сезонным изменениям. Наряду с моделью оледенения необходима и модель оттаивания, которое наступает при повышении температуры воды. Расчет толщины слоя льда важен также для оценки плавучести газопровода [2].

Судя по публикациям, подобные задачи вызывают большой интерес. Например, в [3] исследуется оледенение в пресной воде подводного трубопровода (без обшивок и при отсутствии теплового потока от воды), однофазная задача Стефана решается численно одним из вариантов метода сквоз-

ного счета. В работе [4] рассматривается решение трехмерной нестационарной двухфазной задачи Стефана и обсуждаются причины невозможности решения подобных задач с помощью известных программных комплексов ANSYS и ABAQUS, приводится расчет распределения ореала оттаивания грунта под протяженным трубопроводом. Большое внимание подобным задачам уделяется и в зарубежной литературе, например, [5].

При создании эффективных вычислительных алгоритмов расчета неустановившихся режимов транспортировки газа большое значение имеет возможность упрощения модели теплообмена газа, включающей динамику оледенения (оттаивания). В настоящей работе эта задача решена и соответствующие оценки получены.

2. Модель динамики оледенения

Рассмотрим оледенение участка многослойного газопровода, обтекаемого морской водой температуры T^* . Длина l участка выбирается таким образом, чтобы в его пределах можно было считать температуру $T_0(t)$ внутри газопровода и температуру $T^*(t)$ окружающей воды функциями только времени. Представляет интерес диапазон изменения температуры $T_0(t)$ от 271 К до 263 К. Выбор зависимости $T^*(t)$ основывается на данных о сезонном поведении придонной температуры в исследуемом морском участке. В такой постановке тепловые процессы в слоях обшивки и в слое льда при наличии аксиальной симметрии можно считать зависящими только от времени t и от радиальной координаты r в цилиндрической системе координат (r, φ, z) . Динамика оледенения во многом определяется радиальной составляющей q_w вектора потока тепла от воды к фронту оледенения. Для определения величины q_w необходимо решить внешнюю задачу обтекания газопровода. В настоящей работе эта задача не рассматривается. При наличии слоя льда и при постоянной температуре T^* окружающей воды поток q_w можно считать постоянным и определять из квазистационарного решения уравнения теплопроводности в тепловом погранслое воды на поверхности слоя льда. Поток q_w также можно представить в виде: $q_w = \beta(T^* - T_*)$, где β – эффективный коэффициент теплообмена, зависящий от параметров обшивки газопровода и от толщины δ_* теплового погранслоя; δ_* , в свою очередь, зависит от донных течений и других факторов [1]. Отсутствие аксиальной симметрии при обтекании газопровода в рамках одномерной постановки учитывается введением поправки в значение β . Качественные оценки величины δ_* для этих задач приведены в [1]. Для адекватности мо-

дели целесообразно определять эффективный коэффициент β из решения обратной задачи, предложенного в [6].

В соленой воде (в отличие от пресной) при нарастании льда происходит приток солей в слой воды, прилегающий к фронту оледенения. Это увеличивает плотность воды и вызывает дополнительные конвективные течения. Суммарный эффект выражается в увеличении общего потока тепла от воды к фронту оледенения. Этот механизм учтен в представленной далее модели введением в условия Стефана дополнительного потока тепла $\alpha(dy/dt)$, пропорционального скорости нарастания льда, α – эффективный параметр, в пресной воде $\alpha = 0$. Методика выбора согласованного набора теплофизических параметров нарастающего морского льда и параметра α приведена в [7]. Эффективность этой методики проверялась в расчетах скорости оледенения поверхностей в соленой воде по экспериментальным данным, любезно предоставленным К.Е. Сазоновым, директором ледового опытового бассейна ФГУП ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова.

Модель оледенения двухслойного газопровода в соленой воде записывается следующим образом (модель 1):

$$\partial T_j / \partial t = a_j L(T_j), \quad r \in D_j, \quad j = 1, 2, i, \quad t > t_0; \quad (1)$$

$$t > t_0, \quad r = R: \quad T_1 = T_0(t); \quad (2)$$

$$t > t_0, \quad r = R_1: \quad T_1 = T_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}; \quad (3)$$

$$t > t_0, \quad r = R_2: \quad T_2 = T_i, \quad \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r}; \quad (4)$$

$$t > t_0, \quad r = R_2 + y(t): \quad T_i = T_*; \quad (5)$$

$$t > t_0, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{R_2 + y(t)} - q = \gamma \rho_i \frac{dy}{dt}, \quad q = q_w + \alpha \frac{dy}{dt}; \quad (6)$$

$$t = t_0: \quad y = y_0, \quad T_j(r) = T_j^0(r), \quad r \in D_j, \quad j = 1, 2, i; \quad (7)$$

$$D_1: \quad R < r < R_1; \quad D_2: \quad R_1 < r < R_2; \quad D_i: \quad R_2 < r < R_2 + y(t).$$

Индексы: 1, 2 – области первого и второго бокового слоя газопровода; i – область слоя льда; $L = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)$ – одномерный оператор Лапласа в цилиндрической системе координат; δ_1, δ_2 – толщины первого и второго

слоя соответственно; $R_1 = R + \delta_1$, $R_2 = (R + \delta_1 + \delta_2)$ – внешний радиус газопровода; $a_j = \lambda_j / (\rho_j c_j)$, ρ_j , λ_j , c_j – коэффициент температуропроводности, плотность, коэффициент теплопроводности, удельный коэффициент теплоемкости материала j -й области соответственно, $T_j(r, t)$ – распределение температуры в j -й области, $j = 1, 2, i$; q_w – поток тепла от воды к фронту оледенения; γ – эффективная теплота плавления морского льда; $r = R_2 + y(t)$ – координата фронта оледенения; y_0 – толщина слоя льда в начальный момент времени t_0 . В момент t_0 должно выполняться условие: $T_i^0(R_2 + y_0, t_0) = T_*$. Модель 1 легко обобщается на большее число слоев.

(6) – модифицированное условие Стефана, в котором учтен дополнительный поток тепла от воды, пропорциональный скорости оледенения. Величины λ_i , c_i , T_* , γ , α , q_w в модели 1 считаются постоянными.

Оледенение начинается в момент t_0 , в который выполняются следующие условия:

$$T_2(R_2, t_0) < T_*, \quad \lambda_2 \left. \frac{\partial T_2(t_0)}{\partial r} \right|_{R_2} > q_w. \quad (8)$$

Толщина слоя льда при неизменной температуре воды T^* и газа T_0 монотонно растет со временем, скорость оледенения стремится к нулю. В состоянии равновесия толщина слоя льда достигает максимального значения y_* , модифицированное условие Стефана (6) переходит в равенство:

$$\lambda_i \left. \frac{\partial T_i}{\partial r} \right|_{R_2 + y_*} - q_w = 0, \quad \text{которое совместно с квазистационарными вариантами}$$

уравнений теплопроводности в слоях и остальными условиями модели 1 позволяет найти y_* из следующего трансцендентного уравнения:

$$\frac{\lambda_i(T_* - T_0)}{(R_2 + y_*) \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_2 + y_*}{R_2} \right)} - q_w = 0. \quad (9)$$

3. Алгоритм численного решения задачи оледенения

Как известно (например, [8]), наиболее точно границу фазового перехода позволяет рассчитать метод явного выделения фронта [9,10]. В этом методе переменный шаг по времени определяется таким образом, чтобы слой льда за время шага увеличился на постоянную величину, равную шагу сетки по пространственной переменной. Уравнения (1) аппроксимируются по неявной разностной схеме. На каждом временном слое нелинейная сис-

тема разностных уравнений решается методом итераций, в каждой итерации система линейных уравнений решается методом прогонки.

Введем равномерную сетку по радиусу с шагом h . Текущее значение пространственной переменной в боковых слоях газопровода и в слое льда равно: $r_j[k] = R_{j-1} + kh$, $k = 0, 1, \dots, N_j$, $j = 1, 2, i$ (полагается $R_0 = R$); величины N_j определяются как целая часть от δ_i/h , $j = 1, 2$; максимальная длина N_* массива льда определяется как целая часть от y_*/h , y_* – максимальная толщина льда (9) в исследуемой задаче; для $(n+1)$ -го слоя по времени $N_i = n + 1$.

Введем массив переменных шагов по времени: $\tau[n]$ ($n = 1, \dots, N_*$). Величина шага $\tau[n+1]$ и массивы температур $T_j^{n+1}[k]$ рассчитываются итерационно, после окончания итерационного процесса шагу $\tau[n+1]$ присваивается значение шага τ^{s+1} в последней итерации, величинам $T_j^{n+1}[k]$ – значения $T_j^{s+1}[k]$ в последней итерации ($k = 0, 1, \dots, N_j$, $j = 1, 2, i$). Время, за которое нарастет слой льда толщиной $y = y_0 + (n+1)h$, определяется равенством: $t_{n+1} = t_0 + \tau[1] + \tau[2] + \dots + \tau[n+1]$. В нулевом приближении шаг $\tau^0[n+1]$ полагается равным шагу $\tau[n]$ на предыдущем временном слое.

В качестве нулевого приближения первого шага $\tau^0[1]$ при условии $y_0 = 0$ можно взять величину, определенную из разностного аналога модифицированного условия Стефана (6), положив температуру льда равной: $T_i^1[0] = T_2^0[N_2]$, $T_i^1[1] = T_*$.

$$\tau^0[1] = \frac{(\gamma\rho + \alpha)h^2}{(\lambda_i(T_* - T_2^0[N_2]) - q_w h)}.$$

Затем $\tau^0[1]$ уточняется по итерационному алгоритму, приведенному ниже. Разностные аналоги уравнений теплопроводности (1) решаются методом прогонки при граничных условиях, следующих из (2)-(5). Этот алгоритм приведен, например, в [11]. По рассчитанным массивам температур в s -й итерации величина шага τ^{s+1} рассчитывается по массиву температуры $T_i^s[k]$ льда следующим образом.

1) Находятся потоки тепла q_N – от фронта оледенения в лед и q_0 – ото льда во второй слой:

$$q_N = \lambda_i(T_i^s[N_i] - T_i^s[N_i - 1])/h, \quad (10)$$

$$q_0 = \lambda_i(T_i^s[1] - T_i^s[0])/h. \quad (11)$$

2) Рассчитывается толщина h^s прироста слоя льда за время τ^s :

$$h^s = \tau^s (q_N - q_w) / (\gamma\rho_i + \alpha). \quad (12)$$

3) Рассчитывается величина шага τ^{s+1} :

$$\tau^{s+1} = \tau^s + (\gamma\rho_i + \alpha)(h - h^s) / (q_0 - q_w). \quad (13)$$

4) Итерационный процесс считается завершенным при выполнении неравенства

$$|\tau^{s+1} - \tau^s| \leq \varepsilon_1, \quad (14)$$

ε_1 – заданная точность расчета шага по времени. В общем случае для окончания итерационного процесса необходимо также выполнение неравенств

$$\max_k |T_j^{s+1}[k] - T_j^s[k]| \leq \varepsilon_2, \quad j = 1, 2, i. \quad (15)$$

Однако в рассматриваемых задачах при выполнении неравенства (14) неравенства (15) выполняются с достаточной точностью.

В [9] доказаны существование и единственность решения однофазной задачи Стефана и сходимость численного решения по методу явного выделения фронта к точному решению. Решение задач оледенения морских газопроводов указанным методом привело к следующему выводу. При $y \rightarrow y_*$ скорость оледенения стремится к нулю, при этом, чтобы обеспечить сходимость итерационного процесса, необходимо мельчить шаг по пространству и доопределять с помощью интерполяции температуру в добавленных узлах пространственной сетки. Это делает малоэффективным алгоритм решения нестационарной задачи методом явного выделения фронта при близкой к нулю скорости оледенения. В этом случае целесообразно проводить расчет процесса оледенения вплоть до достижения максимального значения y_* в два этапа. На первом этапе задача (1)-(7) решается численно методом явного выделения фронта и определяется момент времени \hat{t} , начиная с которого с требуемой точностью профили температуры в слоях можно считать квазистационарными. Момент \hat{t} определяется из условия

$$m \leq \varepsilon_2, \quad m = \max_j(\delta T_j), \quad \delta T_j = \max_k |T_j[k] - \widehat{T}_j[k]|, \quad j = 1, 2, i, \quad (16)$$

ε_2 – необходимая точность вычисления температуры, определяемая в результате вычислительного эксперимента; $T_j[k]$, $\widehat{T}_j[k]$ – нестационарные и квазистационарные распределения температуры в j -й области в момент времени \widehat{t} , $\widehat{T}_j[k]$ рассчитываются далее. На втором этапе (при $t > \widehat{t}$) задача (1)-(7) решается по квазистационарному варианту модели 1, если $y(t)$ – монотонная функция.

4. Квазистационарная модель оледенения

В квазистационарном приближении распределение температуры в боковых слоях газопровода и в слое льда является логарифмическим:

$$\widehat{T}_j(r, t) = A_j(t) + B_j(t) \ln r, \quad t \geq \widehat{t}, \quad j = 1, 2, i.$$

Коэффициенты $A_j(t)$, $B_j(t)$ определяются из граничных условий (2)-(5) и выражаются через толщину слоя льда $y(t)$ и параметры модели. Распределения температуры $\widehat{T}_j(r, t)$, $t \geq \widehat{t}$ ($j = 1, 2, i$) в квазистационарном приближении имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{T}_1(r, t) &= T_0(t) + B_1(t) \ln(r/R), \quad r \in D_1; \\ \widehat{T}_2(r, t) &= T_0(t) + B_1(t) \ln(R_1/R) + (\lambda_1/\lambda_2) B_1(t) \ln(r/R_1), \quad r \in D_2; \\ \widehat{T}_i(r, t) &= T_* - (\lambda_1/\lambda_i) B_1(t) \ln((R_2 + y(t))/r), \quad r \in D_i; \\ B_1(t) &= \frac{T_* - T_0(t)}{\ln(R_1/R) + (\lambda_1/\lambda_2) \ln(R_2/R_1) + (\lambda_1/\lambda_i) \ln((R_2 + y(t))/R_2)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Модифицированное условие Стефана (6) для логарифмического распределения температуры в слое льда приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению относительно $y(t)$. В безразмерных величинах (кроме температуры) расчет динамики оледенения в квазистационарном приближении сводится к решению задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (штрихи у безразмерных величин опущены):

$$\frac{dy}{dt} = \frac{a(T_* - T_0(t))}{(R_2 + y)(d + \ln(1 + y/R_2))} - b \quad (18)$$

с начальным условием

$$y|_t = \hat{y}. \quad (19)$$

В уравнении (18) комплекс a имеет размерность $1/K$, комплексы b, d – безразмерные; a, b, d выражаются через характерные величины r_x, t_x и параметры задачи по формулам

$$a = \frac{\lambda_i t_x}{r_x^2 (\gamma \rho_i + \alpha)}, \quad b = \frac{q_w t_x}{r_x (\gamma \rho_i + \alpha)}, \quad d = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1}. \quad (20)$$

Комплекс d характеризует влияние слоев газопровода на динамику оледенения. Численное решение уравнения (18) с начальным условием (19) для любого закона $T_0(t)$, представляющего практический интерес, может быть получено, например, методом Рунге-Кутты.

В [7] найдены аналитические решения дифференциального уравнения (18) для случаев постоянной температуры газа и температуры газа, изменяющейся по линейному закону, в приближении тонкого слоя: $y/R_2 \ll 1$.

5. Пример расчета оледенения морского газопровода

Приведен результат расчета по модели 1 одного из вариантов оледенения газопровода в морской воде. Считается, что он имеет два слоя – первый – из стали, второй – из бетона. Соленость воды принята равной 35‰. Средние значения теплофизических параметров нарастающего морского льда рассчитаны по методике работы [7] на основании таблиц, приведенных в [12] для температуры льда в интервале от 271.236 К до 265 К. Этому варианту соответствует следующий набор параметров:

$$\begin{aligned} q_w = 31.0 \text{ Вт/м}^2, \quad T_* = 271.236 \text{ К}, \quad T_0(t) = (T_* - 6) \text{ К}, \quad \alpha = 330048.81 \text{ кДж/м}^3, \\ \rho_1 = 10^4 \text{ кг/м}^3, \quad \rho_2 = 2300 \text{ кг/м}^3, \quad c_1 = 450 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad c_2 = 924 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \\ \lambda_1 = 24 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_2 = 1.7 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \delta_1 = 0.04 \text{ м}, \quad \delta_2 = 0.12 \text{ м}, \quad \rho_i = 931 \text{ кг/м}^3, \\ c_i = 2100 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}, \quad \lambda_i = 2.15 \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}, \quad \gamma = 303 \text{ кДж/кг}, \quad R = 0.51 \text{ м}. \end{aligned} \quad (21)$$

Считается, что в момент начала оледенения $t_0 = 0$ лед отсутствует: $y_0 = 0$. Для набора параметров (21) максимальная толщина слоя льда, рассчитанная по уравнению (9), равна: $y_* = 17.729$ см. В табл.1 представлен пример расчета динамики оледенения для набора параметров (21) по нестационарной (t) и по квазистационарной (t_1) моделям, y – толщина слоя льда.

Таблица 1.

y , см	1	3	5	7	9	11
t , сут.	1.76	5.85	11.08	17.83	26.71	38.77
t_1 , сут.	1.67	5.75	10.96	17.71	26.59	38.65

Из расчетов следует, что квазистационарная модель дает несколько большую скорость нарастания льда, особенно в начале процесса. Причина этого в том, что в нестационарной задаче при отсутствии теплового равновесия в слоях уменьшается градиент температуры льда на фронте по сравнению с его значением в квазистационарном приближении. Как следует из условия Стефана (6), это приводит к уменьшению скорости нарастания льда. Расчеты показали, что, начиная с семи суток, выполняется условие (16) при $\varepsilon_2 = 0.005$ К и устанавливается квазистационарный режим оледенения, поэтому дальнейший расчет вплоть до $y = y_*$ целесообразно проводить по квазистационарной модели.

6. Качественные оценки допустимости перехода к квазистационарной модели

При оледенении многослойных областей лимитирующей стадией выхода на квазистационарный режим может оказаться время установления квазистационарного распределения температуры в одном из слоев. В этой ситуации малости критерия Стефана может быть недостаточно для оценки допустимости квазистационарного приближения. Введем W – характерную скорость нарастания льда, положив ее равной

$$W = \frac{\lambda_i(T_* - T_0)}{y_x(\gamma\rho_i + \alpha)},$$

y_x – характерная толщина слоя льда. Характерная скорость U_j установления квазистационарного распределения температуры в j -м слое равна

$$U_j = a_j/\delta_j, \quad a_j = \lambda_j/(\rho_j c_j), \quad j = 1, 2; \quad U_i = a_i/y_x, \quad a_i = \lambda_i/(\rho_i c_i).$$

Число Стефана ($Ste = c_i(T_* - T_0)/\gamma_*$, $\gamma_* = \gamma + \alpha/\rho_i$) можно представить в виде отношения

$$W/U_i = c_i(T_* - T_0)/\gamma_* = Ste.$$

Квазистационарное приближение в задаче оледенения многослойной области допустимо, если выполнено условие

$$W \ll \min(U_1, U_2, U_i), \quad (22)$$

т.е. выход на квазистационарный режим лимитируется наибольшей из безразмерных величин $B_j = W/U_j$, $j=1,2,i$. Для набора параметров (21) B_j равны

$$B_1 = 0.00316, \quad B_2 = 0.06323, \quad B_i = Ste = 0.01916.$$

В рассмотренном примере расчет начала оледенения по нестационарной и по квазистационарной моделям различается, несмотря на малость числа Стефана. Качественно этот вывод следует из приведенных оценок B_j , $j=1,2,i$.

7. Модель таяния слоя льда на внешней поверхности газопровода

Сезонные изменения придонной температуры T^* морской воды составляют примерно 5-6 градусов. Принятая в задаче оледенения температура воды $T^* \sim 272.5$ К при эффективном коэффициенте теплообмена $\beta \sim 25$ Вт/(м²·К) дает значение потока тепла от воды к фронту, равное: $q_w = 31.0$ Вт/м². Даже незначительное повышение температуры T^* при неизменных остальных условиях может привести к таянию сформировавшегося слоя льда. Рассмотрим решение задачи таяния льда на поверхности модельного газопровода (21) при изменении q_w в диапазоне от 65 до 125 Вт/м², что соответствует изменению величины разности температур ($T^* - T_*$) от 2.6 до 5 К.

При таянии морского льда механизм увеличения потока тепла от воды за счет выделения соли ослабевает, это позволяет использовать обычное условие Стефана

$$t > t_1, \quad \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} \Big|_{R_2+y(t)} - q_w = \gamma \rho_i \frac{dy}{dt}, \quad (23)$$

t_1 – момент начала таяния. Пусть к моменту t_1 сформирован слой льда толщиной y_1 . Величина y_1 не может превышать равновесной толщины слоя льда y_* при заданных условиях. Положим, что к моменту t_1 в боковых слоях газопровода и в слое льда имеют место квазистационарные распределения температуры. Это предположение позволяет отделить решение задачи таяния от задачи оледенения, в противном случае, начальные распределения температуры и толщина слоя льда рассчитываются по модели оледенения, приведенной выше. Модель таяния отличается от модели оледенения

только записью условия Стефана (6), значением потока тепла от воды q_w и начальными условиями (7).

7.1. Условие начала таяния льда. Сформировавшийся слой льда толщиной y_1 начинает таять при значении потока тепла q_w от воды, удовлетворяющем неравенству

$$\lambda_i \frac{\partial T_i(r, t_1)}{\partial r} \Big|_{R_2 + y_1} < q_w,$$

которое в случае квазистационарных распределений температуры записывается в виде

$$\frac{\lambda_i (T_* - T_0)}{(R_2 + y_1) \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_2 + y_1}{R_2} \right)} < q_w. \quad (24)$$

Например, из условия (24) для набора параметров (21) следует, что для $y_1 = 7$ см таяние начинается при $q_w > 49$ Вт/м², а для $y_1 = 15$ см для начала таяния достаточно, чтобы $q_w > 34.32$ Вт/м².

7.2. Условие окончания процесса таяния льда. При неизменных температуре газа T_0 и величине потока q_w возможны два варианта окончания процесса таяния: *I* – лед растает полностью, *II* – лед растает до минимальной толщиной y_e , отличной от нуля ($0 < y_e < y_1$).

Минимальная толщина y_e слоя льда во втором варианте для рассматриваемого газопровода определяется из трансцендентного уравнения:

$$\frac{\lambda_i (T_* - T_0)}{(R_2 + y_e) \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1} \ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_i}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \ln \frac{R_2 + y_e}{R_2} \right)} - q_w = 0. \quad (25)$$

Если уравнение (25) не имеет положительного корня, реализуется первый вариант окончания процесса, т.е. лед тает полностью. В варианте *I* таяние льда рассчитывается по алгоритму решения нестационарной задачи, который с небольшими изменениями повторяет алгоритм расчета нестационарной задачи оледенения (1)–(7), приведенный выше. Для варианта *II* при $y \rightarrow y_e$ скорость таяния стремится к нулю и возникает ситуация, аналогичная ситуации в модели оледенения при $y \rightarrow y_*$, т.е. алгоритм решения методом явного выделения фронта становится малоэффективным. В этом слу-

чае, как и в задаче оледенения, целесообразно определять в ходе решения нестационарной задачи момент времени \hat{t} , начиная с которого устанавливается квазистационарный режим таяния, и переходить к расчету таяния льда по соответствующему обыкновенному дифференциальному уравнению.

8. Численное решение задачи таяния для $y_e = 0$

Численное решение задачи (1)-(5), (23), (7) строится методом явного выделения фронта, аналогично приведенному выше алгоритму для задачи оледенения. В качестве начального распределения температуры в j -м слое задается квазистационарное распределение (17) при $y = y_1$.

Величина первого шага по времени в нулевом приближении $\tau^0[1]$ рассчитывается по формуле, следующей из разностного аналога уравнения (23) для квазистационарного распределения температуры льда при $y = y_1$

$$\tau^0[1] = \frac{\gamma \rho_i h}{q_w - q_N}, \quad q_N = \frac{\lambda_i (T_* - T_0)}{(R_2 + y_1) \left(\ln \frac{R_1}{R} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_i} \ln \frac{R_2 + y_1}{R_2} \right)}. \quad (26)$$

Далее $\tau^0[1]$ уточняется по итерационному алгоритму, приведенному ниже.

В алгоритме таяния длина N_i массива льда на каждом временном слое равна: $N_i = N_0 - n$, N_0 – начальная длина массива льда, равная целой части от (y_1/h) , h – шаг по радиусу, n – номер шага по времени.

Для задачи таяния в алгоритме 1)-4) расчета шага τ^{s+1} изменяются знаки в уравнениях (12) и (13) и они записываются в виде

$$h^s = -\tau^s (q_N - q_w) / (\gamma \rho_i); \quad (27)$$

$$\tau^{s+1} = \tau^s - \gamma \rho_i (h - h^s) / (q_0 - q_w).$$

В остальном алгоритм численного решения нестационарной задачи таяния повторяет приведенный выше алгоритм численного решения задачи оледенения.

9. Численное решение задачи таяния для $y_e > 0$

В этом варианте, как отмечалось выше, при $y \rightarrow y_e$ использование метода явного выделения фронта мало эффективно. Поэтому, начиная с момента времени \hat{t} , с которого решения нестационарной и квазистационарной задач таяния совпадают, при монотонном поведении $y(t)$ нестационарную задачу целесообразно решать в квазистационарном приближении с началь-

ными условиями (7), в которых y_0 и $T_j^0(r)$, $j=1,2,i$, определены из решения нестационарной задачи в момент \hat{t} .

Момент времени \hat{t} , начиная с которого допустим переход к квазистационарному приближению в задаче таяния, как и в задаче оледенения, определяется из условия (16).

В квазистационарном приближении толщина слоя льда $y(t)$ рассчитывается по уравнению (18) с соответствующим начальным условием, величины комплексов a и b для задачи таяния равны

$$a = \frac{\lambda_i t_x}{r_x^2 \gamma \rho_i}, \quad b = \frac{q_w t_x}{r_x \gamma \rho_i}.$$

10. Примеры расчета оттаивания внешней поверхности морского газопровода

По созданным программам, реализующим приведенные выше алгоритмы, рассчитывались различные варианты процессов оледенения и оттаивания морского газопровода. В качестве иллюстрации приведены расчеты трех вариантов оттаивания слоя льда на морском газопровode для набора параметров (21). В расчетах варьировался q_w – поток тепла от воды: в варианте 1 $q_w=100$ Вт/м², в варианте 2 $q_w=85$ Вт/м², в варианте 3 $q_w=65$ Вт/м². До момента повышения температуры воды принималось: $q_w=31.0$ Вт/м², при этом максимально возможная толщина слоя льда на поверхности газопровода равнялась: $y_*=17.729$ см. Начальная толщина слоя льда y_1 в задаче таяния принята равной 17.7 см. Минимальная толщина y_e слоя льда в вариантах 1 и 2 равнялась нулю, расчет оттаивания поверхности газопровода вплоть до полного исчезновения льда в этих вариантах проводился по нестационарной модели методом явного выделения фронта. В варианте 3 $y_e \neq 0$, в соответствии с условием (16) при $\varepsilon_2 = 0.005$ К по нестационарной модели определялся момент времени \hat{t} , начиная с которого допустим переход к квазистационарной модели, и толщина \hat{y} слоя льда в этот момент, далее динамика таяния льда для варианта 3 рассчитывалась в квазистационарном приближении. Во всех расчетах при точности $\varepsilon_1 = 10$ сек было достаточно 2-3 итераций, за исключением варианта 3, в котором при $y \rightarrow y_e$ количество итераций увеличивалось, но не превышало 13 вплоть до момента допустимости перехода к квазистационарной модели.

В табл.2 приведен расчет таяния слоя льда по нестационарной модели для вариантов 1 и 2, в табл.3 – расчет таяния по нестационарной модели для

варианта 3, минимальная толщина слоя льда y_e , рассчитанная по уравнению (25), для варианта 3 равна 2.10 см, окончание процесса таяния в этом варианте, начиная с момента $\hat{t} = 14.81$ суток, рассчитывалось в квазистационарном приближении.

Таблица 2.

Вариант 1: $q_w = 100 \text{ Вт/м}^2, y_e = 0$							
$y, \text{ см}$	16.7	13.7	10.7	7.7	4.7	1.7	0
$t, \text{ сут.}$	0.48	1.99	3.60	5.38	7.42	9.99	12.21
Вариант 2: $q_w = 85 \text{ Вт/м}^2, y_e = 0$							
$y, \text{ см}$	16.7	13.7	10.7	7.7	4.7	1.7	0
$t, \text{ сут.}$	0.62	2.57	4.71	7.14	10.10	14.33	18.26

Таблица 3.

Вариант 3: $q_w = 65 \text{ Вт/м}^2, y_e = 2.10 \text{ см}$							
$y, \text{ см}$	16.7	13.7	10.7	7.7	6.7	5.7	4.7
$t, \text{ сут.}$	0.99	4.21	7.98	12.78	14.81	17.24	20.32
$m \cdot 10^2, \text{ К}$	1.3	1.1	0.8	0.6	0.5	0.41	0.3

Изменения толщины слоя льда со временем для вариантов 1-3 в рассмотренной модельной задаче таяния представлены на рис. 1.

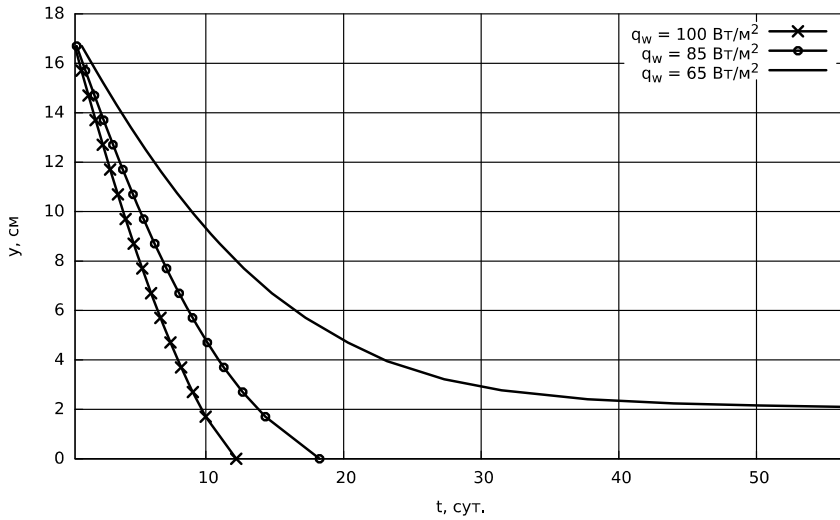


Рис.1. Зависимость толщины слоя льда от времени для разных значений q_w в модельной задаче таяния слоя льда на поверхности морского газопровода.

11. Заключение

В работе представлены модели оледенения и оттаивания внешней поверхности морского газопровода в северных морях. Приведены алгоритмы

численного решения нестационарной задачи оледенения и оттаивания многослойной цилиндрической области методом явного выделения фронта и результаты расчета различных вариантов этой задачи. В модель оледенения включен учет особенности нарастания льда в соленой воде.

Получены качественные и количественные оценки допустимости перехода к квазистационарному варианту модели оледенения (оттаивания) в многослойных областях.

Для задач таяния предложено уравнение, решение которого позволяет выяснить возможность в принятых условиях полного оттаивания поверхности газопровода и рассчитать минимальную толщину слоя льда.

Построенные в работе численные алгоритмы решения задач оледенения и оттаивания льда на поверхности газопровода являются одним из блоков общего алгоритма расчета системы уравнений модели транспортировки газа по газопроводам в северных морях, приведенной в [13].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.И. Курбатова, Е.А. Попова, Б.В. Филиппов и др. Модели морских газопроводов. – СПб.: С.-Петерб. гос. ун-т, 2005, 156 с.;
G.I. Kurbatova, E.A. Popova, B.V. Filippov i dr. Modeli morskikh gazoprovodov. – St.-Petersburg: St.-Petersburg State University, 2005, 156 s.
2. V. Malkov, G. Kurbatova, N. Ermolaeva, Y. Malkova and R. Petrukhin. Analysis of the strength of sea gas pipelines of positive buoyancy conditioned by glaciation. AIP Conference Proceedings 1959, 050019 (2018); <https://doi.org/10.1063/1.5034647>.
3. Д.А. Медведев, А.П. Ершов. Моделирование намерзания льда на подводной трубе газопровода // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика, 2013, т.13, вып.4, с.96-101;
D.A. Medvedev, A.P. Ershov. Modelirovanie namerzaniia lda na podvodnoy trube gazoprovoda // Vestnik NGU. Serii: Matematika, Mekhanika, informatika, 2013, t.13, vyp.4, s.96-101.
4. И.А. Гишкелюк, Ю.В. Станюковская, Д.В. Евланов. Прогнозирование оттаивания многолетнемерзлых грунтов вокруг подземного трубопровода большой протяженности // Наука и технологии трубопроводного транспорта нефти и нефтепродуктов, 2015, №1, с.20-25;
I.A. Gishkeluk, Y.V. Stanilovskaia, D.V. Evlanov. Prognozirovanie ottaivaniia mnogoletnemerzlykh gruntov vokrug podzemnogo truboprovoda bolshoy protiazhenosti // Nauka i tekhnologii truboprovodnogo transporta nefiti i nefteproduktov, 2015, №1, s.20-25.
5. M. Vitel, A. Rouabhi, M. Tijana, and F. Guerin. Modelling Heat and Mass Transfer During Ground Freezing Subjected to High Seepage Velocities // Comput. Geotech., 2015, 73, p.1-15. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.11.014>.
6. Н.Н. Ермолаева, Г.И. Курбатова. Параметрическая идентификация модели установившегося неизотермического течения газа по морскому газопроводу // Морские ин-

- теллектуальные технологии, 2017, т.1, №1, (35), с.8-13;
N.N. Ermolaeva, G.I. Kurbatova. Parametricheskaia identifikatsia modeli ustanovivshegosia neizotermicheskogo techenia gaza po morskomu gazoprovodu // Morskije intellektualnye tekhnologii, 2017, t.1, №1, (35), s.8-13.
7. *H.H. Ermolaeva, G.I. Kurbatova.* Нестационарная модель нарастания морского льда // Вестник Санкт-Петербургского университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки, 2017, №1, с.3-8;
N.N. Ermolaeva, G.I. Kurbatova. Nestatsionarnaia model narastaniia morskogo lida // Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta Tekhnologii i dizaina. Seria 1. Estestvennye i tekhnicheskie nauki, 2017, №1, s.3-8.
8. *A.A. Самарский, П.Н. Вабищевич.* Вычислительная теплопередача. – М.: Едиториал УРСС, 2003, 784 с.;
A.A. Samarskii and P.N. Vabishevich. Computational Heat Transfer, Chichester: Wiley, cop., (1996), 418 p.
9. *Ф.П. Васильев.* О методе конечных разностей для решения однофазной задачи Стефана // ЖВМ и МФ, 1963, т.3, №5, с.861-873;
F.P. Vasilev. O metode konechnykh raznostei dlia resheniia odnofaznoi zadzchi Stefana // Zh.V.M. i M.F, 1963, v.3, №5, s.861-873.
10. *J. Douglas, T.M. Gallie.* On the numerical integration of a parabolic differential equations subject to a moving boundary condition // Duke Math. J., 1955, v.22, №4, p.557-572.
11. *G.I. Kurbatova, N.N. Ermolaeva, V.V. Mikova.* Analytical and numerical solutions to Stefan problem in model of the glaciation dynamics of the multilayer cylinder in sea water. Journal of Physics: Conference Series. 2017 DOI10.1088/1742-6596/929/1/012103.
12. *Ю.П. Доронин, Д.Е. Хейсин.* Морской лед. – Л.: Гидрометеиздат, 1975, 320 с.;
Yu.P. Doronin, D.E. Kheysin. Morskoi led. – Leningrad: Gidrometeoizdat 1975, 320 s.
13. *G.I. Kurbatova, N.N. Ermolaeva, B.Y. Nikitchuk.* Calculation of the Flow Characteristics in the Offshore Gas Pipelines in the Northern Seas with Accounting for Growing and Ice Melting on its Outer Surface // WSEAS Transactions on Heat and Mass Transfer, 2018, v.13, p. 29-34.

Поступила в редакцию 04.06.18

После доработки 04.06.18

Принята к публикации 20.09.18