

**РАССЕЯНИЕ ЗВУКА ТЕРМОУПРУГИМ ШАРОМ
С НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНЫМ ПОКРЫТИЕМ
В ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ**

© 2019 г. *Н.В. Ларин, Л.А. Толоконников*

Тульский государственный университет

Larinaelen@mail.ru

Исследование выполнено за счет гранта РФФИ (проект 18-11-00199).

DOI: 10.1134/S0234087919050022

Решены прямая и обратная задачи дифракции плоской гармонической звуковой волны на термоупругом шаре с покрытием в виде радиально-неоднородного термоупругого сферического слоя, граничащем с невязкой теплопроводной жидкостью. Колебания шара с покрытием рассматриваются в рамках линейной модели связанной термоупругости. Определены волновые поля в сферическом теле и вне его. Представлены результаты расчетов частотной и угловой зависимостей амплитуды рассеянного акустического поля в дальней зоне. Показано существенное отличие характеристик рассеяния звука для термоупругого и упругого тел. Осуществлено моделирование покрытия, обеспечивающего наименьшее рассеяние звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения. Построены функции, выражающие интенсивность звукоотражения, и представлен алгоритм их минимизации, основанный на комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска. Найдены законы неоднородности термоупругого покрытия с оптимальными звукоотражающими свойствами.

Ключевые слова: прямая и обратная задачи дифракции, звуковая волна, термоупругий шар, неоднородный термоупругий слой, теплопроводная жидкость.

**SOUND SCATTERING
BY THE THERMOELASTIC CONTINUOUSLY-INHOMOGENEOUS
COVERED SPHERE IN HEAT-CONDUCTING FLUID**

N.V. Larin, L.A. Tolokonnikov

Tula State University, Tula region

In the project we solved direct and inverse problems of the plane harmonic acoustic wave diffraction on the thermoelastic sphere covered with radially inhomogeneous thermoelastic spherical layer, bounded by inviscid heat-conducting fluid. Coated ball vibrations are considered in terms of the linear model of coupled thermoelasticity. The wave fields are

defined in a spherical body and outside it. The results of calculations of the frequency and angular dependences of the amplitude of the scattered acoustic field in the far zone are presented. We showed the essential difference between the characteristics of sound scattering for thermoelastic and elastic bodies. In the project we modeled the coating, which provides the smallest scattering of a sound in a given frequency range and angular observation sector. Functionals expressing the intensity of sound reflection were constructed, as well as an algorithm for its minimization. The algorithm is based on the combination of random search and coordinate descent methods. We discovered the inhomogeneity laws of the thermoelastic coating with optimal sound-reflecting properties.

Key words: direct and inverse problems of diffraction, acoustic wave, thermoelastic sphere, inhomogeneous thermoelastic layer, heat-conducting fluid.

1. Введение

Создание покрытий, обеспечивающих требуемые звукоотражающие свойства тел, является актуальной проблемой. Моделировались различные типы покрытий, наносимых на твердые тела. Например, в [1] рассмотрены прямая и обратная задачи дифракции плоской звуковой волны на цилиндре с перфорированным покрытием. В [2] обсуждаются задачи о нерассеивающем покрытии с протяженной реакцией, делающем тело акустически невидимым. В [3] выявлены условия, при которых совместный выбор импедансов однородного покрытия и упругой цилиндрической оболочки позволяет минимизировать рассеянное поле.

Требуемые звукоотражающие свойства тел, в том числе сферической формы, можно получить с помощью непрерывно-неоднородного упругого покрытия, если подобрать соответствующие законы неоднородности для его механических параметров [4]. Такое покрытие можно моделировать системой однородных упругих слоев [5]. В указанных выше работах тепловые процессы в телах не учитывались.

Реальный процесс деформирования тела от воздействия на него звуковой волны сопровождается изменением температурного поля. Изучению процессов деформирования упругих тел при наличии температурных полей (термоупругих тел) посвящены, например, работы [6, 7], в которых взаимодействие звуковых волн с термоупругими телами не рассматривалось. В [8] показано, что характеристики рассеяния звука для термоупругого сферического тела могут значительно отличаться от соответствующих характеристик для упругого тела.

В настоящей работе при моделировании покрытия шара с оптимальными звукоотражающими свойствами учитывается взаимодействие процессов деформирования и теплопроводности в упругом рассеивателе.

2. Прямая задача

Рассмотрим однородный изотропный термоупругий шар радиуса r_0 , плотность материала которого ρ^0 , упругие постоянные λ^0 и μ^0 , температурный коэффициент линейного расширения α_T^0 , теплопроводность λ_T^0 , объемная теплоемкость c_ε^0 . Начало сферической системы координат r, θ, φ совпадает с центром шара. Шар имеет покрытие в виде изотропного термоупругого сферического слоя с внешним радиусом r_1 . Полагаем, что модули упругости λ и μ , температурный коэффициент линейного расширения α_T и теплопроводность λ_T материала покрытия являются дифференцируемыми функциями координаты r , а плотность материала покрытия ρ и его объемная теплоемкость c_ε – непрерывными функциями координаты r . Источники тепла в теле отсутствуют. Окружающая тело жидкость – невязкая теплопроводная, ее равновесная плотность ρ_f , скорость звука c , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ , теплопроводность λ^T , температуропроводность χ^T , коэффициент температурного расширения α^T . В невозмущенном состоянии тело и жидкость имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 .

Пусть из внешнего пространства на шар с покрытием падает плоская звуковая волна. Без ограничения общности будем полагать, что волна распространяется в направлении $\theta=0$. Тогда в сферической системе координат потенциал скорости падающей волны имеет вид $\Psi_0 = A \exp[i(k_1 r \cos \theta - \omega t)]$ и может быть представлен разложением [8]

$$\Psi_0(r, \theta, t) = \exp(-i\omega t) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n j_n(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad \alpha_n = A i^n (2n+1),$$

где A – амплитуда волны; k_1 – волновое число звуковых волн в жидкости; ω – круговая частота; t – время; $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя порядка n ; $P_n(x)$ – многочлен Лежандра степени n .

При падении плоской звуковой волны, распространяющейся в невязкой теплопроводной жидкости на термоупругое тело, в жидкости возникают рассеянная звуковая и возбужденная тепловая волны. Само тело деформируется, его температура изменяется.

Определим волновые поля вне термоупругого тела и внутри него.

Ввиду осевой симметрии задачи и свойств материалов шара и покрытия, искомые волновые поля не будут зависеть от координаты φ .

Определим волновые поля в жидкости, воспользовавшись полной системой линеаризованных уравнений гидродинамики вязкой теплопроводной

жидкости [9, 10], состоящей из уравнений: Навье-Стокса, неразрывности, притока тепла и физического состояния, которые соответственно имеют вид

$$\rho_f \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\text{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\nu}{3} \right) \text{grad} \text{div} \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \text{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \beta^T \frac{\partial s}{\partial t} + \chi^T \Delta \Theta,$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \rho_f \frac{c^2}{\gamma} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + \alpha^T \frac{\partial \Theta}{\partial t} \right),$$

где \mathbf{v} – скорость частиц жидкости; ν и ζ – коэффициенты вязкости; p , s и Θ – акустические давление, сжатие и температура соответственно; β^T – коэффициент пропорциональности ($1 + \alpha^T \beta^T = \gamma$). Так как рассматриваем установившийся режим колебаний с временным множителем $\exp(-i\omega t)$, то здесь и далее дифференцирование по t в уравнениях заменяем умножением на $-i\omega$, временной множитель опускаем. В предположении отсутствия вязкости жидкости ($\nu = \zeta = 0$) представим вектор скорости в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad}(\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2),$$

где Ψ_1 и Ψ_2 – потенциалы рассеянной телом звуковой и возбужденной тепловой волн соответственно. В результате из приведенной выше системы уравнений приходим к уравнениям Гельмгольца

$$\Delta \Psi_q + k_q^2 \Psi_q = 0, \quad q = 1, 2,$$

где k_2 – волновое число тепловых волн в жидкости. При этом в предположении выполнения условия $\omega \chi^T / c^2 \ll 1$ будем иметь

$$k_1 \approx \frac{\omega}{c}, \quad k_2 \approx \left(\frac{\omega \gamma}{2 \chi^T} \right)^{1/2} (1 + i).$$

Учитывая условия излучения на бесконечности, отвечающие уходящим от тела волнам, функции Ψ_1 и Ψ_2 будем искать в виде

$$\Psi_q(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} V_{qn} h_n(k_q r) P_n(\cos \theta), \quad q = 1, 2, \quad (1)$$

где $h_n(x)$ – сферическая функция Ганкеля первого рода порядка n .

Волновые поля в однородном изотропном шаре определим на основе системы уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости [6], состоящей из уравнения движения

$$\mu^0 \Delta \mathbf{u}^0 + (\lambda^0 + \mu^0) \text{grad div} \mathbf{u}^0 - (3\lambda^0 + 2\mu^0) \alpha_T^0 \text{grad} T^0 = \rho^0 (\partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2)$$

и уравнения теплопроводности

$$\lambda_T^0 \Delta T^0 - (3\lambda^0 + 2\mu^0) \alpha_T^0 T_0 \text{div} \frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} = c_\varepsilon^0 \frac{\partial T^0}{\partial t},$$

где \mathbf{u}^0 и T^0 – смещение частиц и изменение температуры в шаре соответственно. Из данной системы уравнений, с учетом представления

$$\mathbf{u}^0 = \text{grad}(\Phi_1 + \Phi_2) + \text{rot} \Phi_3,$$

получаем уравнения Гельмгольца

$$\Delta \Phi_q + \kappa_q^2 \Phi_q = 0, \quad \Delta \Phi_3 + \kappa_3^2 \Phi_3 = 0, \quad q = 1, 2,$$

где κ_q ($q = 1, 2$) и κ_3 – волновые числа продольных термоупругих и поперечных упругих волн соответственно. При этом

$$\kappa_q^2 = \frac{k_l^2}{2} \left[1 + \delta(1 + \varepsilon^0) - (-1)^q \sqrt{1 - 2\delta(1 - \varepsilon^0) + \delta^2(1 + \varepsilon^0)^2} \right], \quad \kappa_3 = \frac{\omega}{c_\tau},$$

где

$$\delta = \left(\frac{k_T}{k_l} \right)^2, \quad k_T = \left(\frac{\omega}{2\chi_T} \right)^{1/2} (1 + i), \quad k_l = \frac{\omega}{c_l},$$

$$c_l = \left(\frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{\rho^0} \right)^{1/2}, \quad c_\tau = \left(\frac{\mu^0}{\rho^0} \right)^{1/2}, \quad \chi_T = \frac{\lambda_T^0}{c_\varepsilon^0}, \quad \varepsilon^0 = \frac{[(3\lambda^0 + 2\mu^0)\alpha_T^0]^2 T_0}{(\lambda^0 + 2\mu^0)c_\varepsilon^0},$$

k_T и k_l – волновые числа продольных тепловых и упругих волн соответственно; c_l и c_τ – скорости продольных и поперечных упругих волн соответственно; χ_T – температуропроводность; ε^0 – параметр связанности.

В силу осевой симметрии задачи $\Phi_3 = \Phi_3(r, \theta) \mathbf{e}_\varphi$, где \mathbf{e}_φ – единичный вектор оси φ . Тогда векторное уравнение Гельмгольца сведется к одному скалярному уравнению

$$\Delta \Phi_3 + (\kappa_3^2 - 1/\sin^2 \theta) \Phi_3 = 0.$$

Учитывая условие ограниченности, функции Φ_1, Φ_2, Φ_3 будем искать в виде

$$\begin{aligned} & (\Phi_1(r, \theta), \Phi_2(r, \theta), \Phi_3(r, \theta)) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \left(W_{1n} j_n(\kappa_1 r), W_{2n} j_n(\kappa_2 r), W_{3n} j_n(\kappa_3 r) \frac{d}{d\theta} \right) P_n(\cos \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

Волновые поля в неоднородном покрытии опишем системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела [7], которая включает общие уравнения движения сплошной среды

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi} + \sigma_{r\theta} \operatorname{ctg} \theta) = \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\phi\phi}) \operatorname{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] = \rho \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial t^2}$$

и уравнение притока тепла

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - T_0 \beta \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

где штрихом обозначена производная по координате r . Компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \dots$ связаны с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \dots$ и изменением температуры T в покрытии соотношениями Дюгамеля–Неймана [7]

$$\sigma_{kk} = 2\mu \varepsilon_{kk} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T \quad (k = r, \theta, \phi), \quad \sigma_{r\theta} = 2\mu \varepsilon_{r\theta}, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} (u_r + u_\theta \operatorname{ctg} \theta),$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\phi\phi}, \quad \beta = (3\lambda + 2\mu) \alpha_T,$$

u_r и u_θ – компоненты вектора смещения \mathbf{u} в покрытии.

Функции u_r, u_θ и T будем искать в виде разложений

$$(u_r(r, \theta), u_\theta(r, \theta), T(r, \theta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(U_{1n}(r), U_{2n}(r) \frac{d}{d\theta}, U_{3n}(r) \right) P_n(\cos \theta). \quad (6)$$

Подставляя ряды (6) в уравнения (3) и (4), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно функций $U_{mn}(r)$ ($m = 1, 2, 3$) для каждого значения $n = 0, 1, 2, \dots$

$$A_n \mathbf{U}_n'' + B_n \mathbf{U}_n' + C_n \mathbf{U}_n = 0, \quad \mathbf{U}_n = (U_{1n}, U_{2n}, U_{3n})^T, \quad (7)$$

где

$$A_n = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}\}, \quad B_n = (b_{ms})_{3 \times 3}, \quad C_n = (c_{ms})_{3 \times 3},$$

$$a_{11} = \lambda + 2\mu, \quad a_{22} = \mu, \quad a_{33} = \lambda_T,$$

$$b_{11} = \lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r}, \quad b_{12} = -n(n+1) \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad b_{13} = -\beta,$$

$$b_{21} = \frac{\lambda + \mu}{r}, \quad b_{22} = \mu' + \frac{2\mu}{r}, \quad b_{23} = b_{32} = 0, \quad b_{31} = i\omega T_0 \beta, \quad b_{33} = \lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r},$$

$$c_{11} = \frac{2\lambda'}{r} - \frac{2(\lambda + 2\mu) + n(n+1)\mu}{r^2} + \omega^2 \rho, \quad c_{12} = -\frac{n(n+1)}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right), \quad c_{13} = -\beta',$$

$$c_{21} = \frac{1}{r} \left[\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right], \quad c_{22} = -\frac{\mu'}{r} - n(n+1) \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} + \omega^2 \rho, \quad c_{23} = -\frac{\beta}{r},$$

$$c_{31} = \frac{2i\omega T_0 \beta}{r}, \quad c_{32} = -n(n+1) \frac{i\omega T_0 \beta}{r}, \quad c_{33} = -n(n+1) \frac{\lambda_T}{r^2} + i\omega c_\varepsilon.$$

Индекс n , которым должны быть снабжены элементы матриц, здесь и в дальнейшем для простоты записи опускаем.

Граничные условия на внешней поверхности покрытия включают равенство нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, равенство нормального напряжения и акустического давления, отсутствие тангенциального напряжения, непрерывность акустической температуры и теплового потока:

$$r = r_1: \quad -i\omega u_r = \mathfrak{G}_r, \quad \sigma_{rr} = -p, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad T = \Theta, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_T^T \frac{\partial \Theta}{\partial r}. \quad (8)$$

На внутренней поверхности покрытия должны быть непрерывны компоненты вектора смещения частиц взаимодействующих однородной и неоднородной термоупругих сред, нормальные и тангенциальные напряжения, температура и тепловой поток:

$$r = r_0: \quad u_r = u_r^0, \quad u_\theta = u_\theta^0, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0, \quad \sigma_{r\theta} = \sigma_{r\theta}^0, \quad T = T^0, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} = \lambda_T^0 \frac{\partial T^0}{\partial r}. \quad (9)$$

Нормальная компонента скорости частиц жидкости, акустическое давление и акустическая температура определяются выражениями

$$\mathfrak{V}_r = \partial(\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2)/\partial r, \quad p = i\omega\rho_f(\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2),$$

$$\Theta = \frac{i}{\alpha_T} \left(\frac{\omega\gamma}{c^2}(\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2) + \frac{1}{\omega} \Delta(\Psi_0 + \Psi_1 + \Psi_2) \right).$$

В однородном шаре составляющие вектора смещения и изменение температуры определяются выражениями

$$u_r^0 = \frac{\partial}{\partial r}(\Phi_1 + \Phi_2) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \Phi_3), \quad u_\theta^0 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\Phi_1 + \Phi_2) - \frac{\partial}{\partial r}(r\Phi_3) \right],$$

$$T^0 = \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{(3\lambda_0 + 2\mu_0)\alpha_T^0} \left[k_l^2(\Phi_1 + \Phi_2) + \Delta(\Phi_1 + \Phi_2) \right],$$

а для компонентов тензора напряжений σ_{rr}^0 , $\sigma_{r\theta}^0$ остаются справедливыми соотношения (5), в которых функции λ , μ , α_T следует заменить постоянными λ^0 , μ^0 , α_T^0 соответственно.

Из первого и четвертого граничных условий (8) находим выражения для коэффициентов отражения V_{1n} , V_{2n}

$$r = r_1: \mathbf{V}_n = (D_n^{-1} E_n) \mathbf{U}_n - D_n^{-1} \mathbf{a}_n, \quad \mathbf{V}_n = (V_{1n}, V_{2n})^T, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{a}_n = (k_1 j_n'(k_1 r), \xi_1 j_n(k_1 r))^T \alpha_n, \quad D_n = (d_{\alpha q})_{2 \times 2}, \quad E_n = (e_{\alpha m})_{2 \times 3},$$

$$d_{1q} = k_q h_n'(k_q r), \quad d_{2q} = \xi_q h_n(k_q r), \quad \xi_q = \frac{i}{\alpha_T} \left(\frac{\omega\gamma}{c^2} - \frac{k_q^2}{\omega} \right), \quad q = 1, 2,$$

$$e_{11} = -i\omega, \quad e_{12} = e_{13} = e_{21} = e_{22} = 0, \quad e_{23} = 1.$$

Из оставшихся трех граничных условий (8) находим

$$r = r_1: A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = G_n \mathbf{V}_n + \mathbf{b}_n, \quad (11)$$

где

$$\mathbf{b}_n = \left(-i\omega\rho_f j_n(k_1 r), 0, \lambda^T \xi_1 k_1 j_n'(k_1 r) \right)^T \alpha_n, \quad F_n = (f_{ms})_{3 \times 3}, \quad G_n = (g_{mq})_{3 \times 2},$$

$$f_{11} = 2\lambda/r, \quad f_{12} = -n(n+1)\lambda/r, \quad f_{13} = -\beta,$$

$$f_{21} = \mu/r, \quad f_{22} = -\mu/r, \quad f_{23} = f_{31} = f_{32} = f_{33} = 0,$$

$$g_{1q} = -i\omega\rho_f h_n(k_q r), \quad g_{2q} = 0, \quad g_{3q} = \lambda^T \xi_q k_q h_n'(k_q r), \quad q = 1, 2.$$

После подстановки выражения (10) в формулу (11) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (7) на внешней поверхности покрытия

$$r = r_1 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(1)} \mathbf{U}_n = \mathbf{c}_n, \quad (12)$$

где

$$L_n^{(1)} = F_n - G_n (D_n^{-1} E_n), \quad \mathbf{c}_n = \mathbf{b}_n - (G_n D_n^{-1}) \mathbf{a}_n.$$

Теперь рассмотрим граничные условия (9). Из условий непрерывности компонентов вектора смещения и температуры находим выражения для коэффициентов W_{mm} ($m = 1, 2, 3$)

$$r = r_0 : \mathbf{W}_n = T_n^{-1} \mathbf{U}_n, \quad \mathbf{W}_n = (W_{1n}, W_{2n}, W_{3n})^T, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} T_n &= (t_{ms})_{3 \times 3}, \quad t_{1q} = Z_{1q}, \quad t_{13} = -n(n+1) \frac{1}{r} Z_{03}, \quad t_{2q} = \frac{1}{r} Z_{0q}, \\ t_{23} &= -\left(\frac{1}{r} Z_{03} + Z_{13} \right), \quad t_{3q} = \zeta_q Z_{0q}, \quad t_{33} = 0, \quad \zeta_q = \frac{\lambda^0 + 2\mu^0}{(3\lambda^0 + 2\mu^0)\alpha_T^0} (k_l^2 - \kappa_q^2), \\ Z_{0m} &= j_n(\kappa_m r), \quad Z_{1m} = \kappa_m j_n'(\kappa_m r), \quad q = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Из условий непрерывности компонентов тензора напряжений и теплового потока находим

$$r = r_0 : A_n \mathbf{U}'_n + F_n \mathbf{U}_n = Y_n \mathbf{W}_n, \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} Y_n &= (y_{ms})_{3 \times 3}, \quad y_{1q} = 2\mu^0 Z_{2q} + \eta_q Z_{0q}, \quad y_{13} = n(n+1) \frac{2\mu^0}{r} \left(\frac{1}{r} Z_{03} - Z_{13} \right), \\ y_{2q} &= \frac{2\mu^0}{r} \left(Z_{1q} - \frac{1}{r} Z_{0q} \right), \quad y_{23} = \mu^0 \left[(2 - n(n+1)) \frac{1}{r^2} Z_{03} - Z_{23} \right], \\ y_{3q} &= \lambda_T^0 \zeta_q Z_{1q}, \quad y_{33} = 0, \\ \eta_q &= 2\mu^0 \kappa_q^2 - (\lambda^0 + 2\mu^0) k_l^2, \quad Z_{2m} = \kappa_m^2 j_n''(\kappa_m r), \quad q = 1, 2, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

После подстановки выражения (13) в формулу (14) получаем краевые условия для системы дифференциальных уравнений (7) на внутренней поверхности покрытия

$$r = r_0 : A_n \mathbf{U}'_n + L_n^{(0)} \mathbf{U}_n = 0, \quad (15)$$

где $L_n^{(0)} = F_n - Y_n T_n^{-1}$.

Таким образом, система уравнений для малых возмущений неоднородного термоупругого покрытия сведена к краевой задаче (7), (12), (15), решив которую и определив по выражениям (10), (13) коэффициенты V_{1n} , V_{2n} , W_{1n} , W_{2n} , W_{3n} в рядах (1), (2), получаем возможность исследовать волновые поля в термоупругом теле и вне его.

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента, из равенства (1) при $q = 1$ находим

$$\Psi_1(r, \theta) = \frac{Ar_1}{2r} \exp(ik_1 r) F(\varpi, \theta), \quad F(\varpi, \theta) = \frac{2}{Ak_1 r_1} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} V_{1n} P_n(\cos \theta), \quad (16)$$

где $\varpi = k_1 r_0$ – волновой размер шара без покрытия.

Были проведены расчеты амплитуды рассеяния звука $|F(\varpi, \theta)|$ для шара радиуса $r_0 = 1$ м с покрытием толщиной 0.1 м, находящегося в воде ($\rho_f = 1000$ кг/м³, $c = 1485$ м/с, $\gamma = 1.006$, $\lambda^T = 0.59$ Вт/(м·К), $\chi^T = 1.43 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\alpha^T = 2.1 \cdot 10^{-4}$ 1/К, $T_0 = 293$ К). Амплитуда падающей волны полагалась равной единице.

Расчеты проводились для неоднородных покрытий, физико-механические характеристики которых менялись по толщине сферического слоя по линейным законам

$$\rho^{\pm}(r) = \rho^1 [1 \pm 0.5(r - r_0)/(r_1 - r_0)],$$

$$\lambda(r) = \lambda^1, \quad \mu(r) = \mu^1, \quad \alpha_T(r) = \alpha_T^1, \quad \lambda_T(r) = \lambda_T^1, \quad c_\varepsilon(r) = c_\varepsilon^1, \quad r_0 \leq r \leq r_1,$$

где ρ^1 , λ^1 , μ^1 , α_T^1 , λ_T^1 , c_ε^1 – плотность, упругие постоянные, температурный коэффициент линейного расширения, теплопроводность и объемная теплоемкость материала однородного покрытия соответственно.

Физико-механические характеристики материалов шара (алюминий) и однородного покрытия (поливинилбутираль) приведены в табл.1. Здесь же приведены значения параметра связанности ε^j для этих материалов.

Таблица 1. Физико-механические характеристики материалов.

j	ρ^j , кг/м ³	λ^j , Н/м ²	μ^j , Н/м ²	α_T^j , 1/К	λ_T^j , Вт/(м·К)	c_ε^j , Дж/(м ³ ·К)	ε^j
0	2700	$5.3 \cdot 10^{10}$	$2.6 \cdot 10^{10}$	$25.5 \cdot 10^{-6}$	236	$2.3 \cdot 10^6$	0.035
1	1070	$3.9 \cdot 10^9$	$9.8 \cdot 10^8$	$2.3 \cdot 10^{-4}$	0.2	$1.2 \cdot 10^6$	0.411

Для оценки влияния термоупругости материалов однородного шара и его покрытия на рассеяние звука расчеты проводились также для упругого шара с упругим покрытием и для упругого шара с термоупругим покрытием. При этом рассматривалось покрытие с плотностью $\rho = \rho^+(r)$.

Краевая задача (7), (12), (15) решена методом сплайн-коллокации [8]. На отрезке $[r_0, r_1]$ введена равномерная сетка. Решение краевой задачи ищется в виде трех кубических сплайнов дефекта 1 с узлами на введенной сетке, приближающих функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$, $U_{3n}(r)$ соответственно. Сплайны представляются в виде разложений по базису из нормализованных кубических В-сплайнов. Полагалось, что искомые сплайны удовлетворяют системе (7) и краевым условиям (12), (15) в узлах коллокации, совпадающих с узлами сетки. Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (для каждого значения n) расчеты проводились на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Вычисления заканчивались, когда относительная погрешность значений $U_{mn}(r_j)$ ($m=1,2,3, j=0,1$) на последней паре сеток не превосходила 0.1%.

При суммировании ряда (16) индекс n изменялся до значения $n=2[\varpi] + 3$, где $[\]$ – целая часть числа. Для рассматриваемых частот увеличение n практически не сказывается на результатах расчетов.

На рис.1 приведены графики зависимости амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара ($|F(\varpi, \pi)|$) в интервале $7 \leq \varpi \leq 12$. Заметим, что расчеты в области $\varpi < 7$ показали, что как неоднородность материала покрытия, так и термоупругость рассматриваемых материалов шара и его покрытия слабо влияют на величину $|F(\varpi, \pi)|$. Однако с увеличением волнового числа картина заметно меняется, что видно из рис.1. Сравнение кривых 1 и 2 показывает существенное различие частотных зависимостей при разных законах неоднородности материала покрытия, а сравнение кривых 1 и 3 – существенное различие частотных зависимостей в термоупругом и чисто упругом случаях. Почти полное совпадение кривых 1 и 4 позволяет сделать вывод, что основной вклад в совместное влияние термоупругости материалов шара и его покрытия на отраженное акустическое поле вносит термоупругость материала покрытия. Это объясняется тем, что в ме-

таллическом шаре взаимодействие полей деформации и температуры существенно слабее, чем в полимерном покрытии (значение параметра связанности для алюминия на порядок ниже, чем для поливинилбутираля (табл.1)). Заметим, что в [6, 11] отмечалось, что для материалов, обладающих большим параметром связанности, могут существенно различаться решения связанной и несвязанной динамических задач термоупругости.

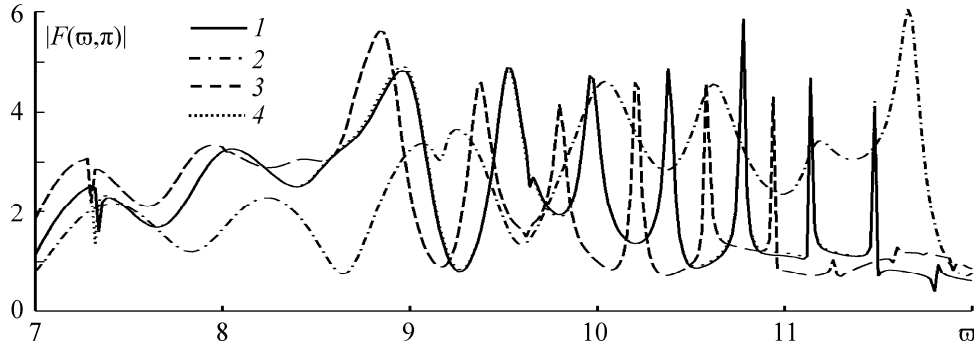


Рис.1. Зависимость амплитуды обратного рассеяния звука от волнового размера шара: 1 (2) – термоупругий шар с термоупругим покрытием с плотностью $\rho = \rho^+(r)$ ($\rho = \rho^-(r)$), 3 (4) – упругий шар с упругим (термоупругим) покрытием с плотностью $\rho = \rho^+(r)$.

На рис.2 представлены диаграммы направленности рассеянного акустического поля в освещенной области ($\pi/2 \leq \theta \leq \pi$) для частоты, соответствующей волновому числу $\omega = 9$. Стрелкой показано направление распространения падающей плоской волны. Видно, что на рассматриваемой частоте неоднородность материала покрытия, а также учет термоупругости рассматриваемых материалов шара и его покрытия заметно влияют на зависимость $|F|$ от угла θ .

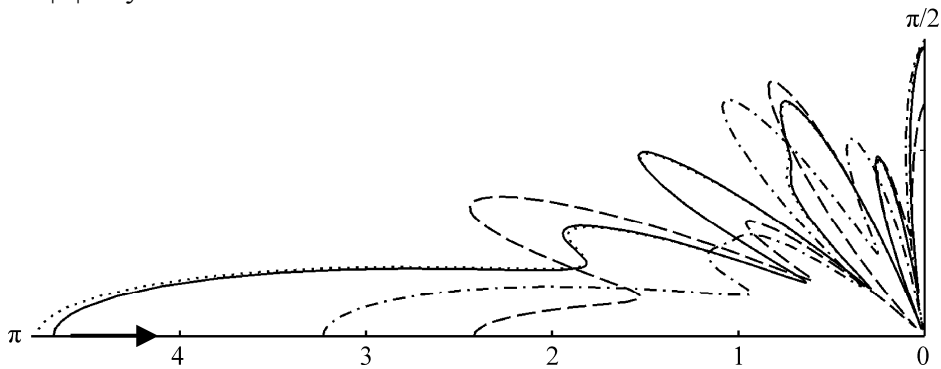


Рис.2. Полярные диаграммы направленности рассеянного акустического поля при $\omega = 9$ (обозначения приведены на рис.1).

3. Обратная задача

Для достижения заданных звукоотражающих свойств рассеивателя требуется решить проблему определения законов неоднородности термоупругого материала покрытия по известному акустическому полю, то есть приходим к необходимости решать коэффициентную обратную задачу. Число работ, в которых рассматривались коэффициентные обратные задачи термоупругости, невелико. В известных работах для нахождения параметров или функций, характеризующих неоднородность, используется сопоставление теоретических и измеряемых величин в некоторой области, например, [12–15]. В [16] при решении обратной задачи предложен подход, использующий исключительно решение прямой задачи дифракции звука и не требующий экспериментальных замеров акустических откликов. Такой способ применен при решении обратных задач в [4, 17, 18] и будет использован ниже.

На основе решения прямой задачи определим законы неоднородности материала покрытия, для которых будем иметь наименьшее рассеяние звука в заданном диапазоне частот $\varpi_1 \leq \varpi \leq \varpi_2$, при фиксированном угле наблюдения $\theta = \theta_*$, а также в заданном угловом секторе наблюдения $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ при фиксированной частоте $\varpi = \varpi_*$.

Будем считать, что функции $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$, $\alpha_T(r)$, $\lambda_T(r)$, $c_\varepsilon(r)$ аппроксимированы многочленами второй степени относительно переменной r , то есть будем рассматривать следующие параболические законы неоднородности термоупругого материала покрытия:

$$\eta(r) = \eta^1 \bar{\eta}(r), \quad (17)$$

где

$$\bar{\eta}(r) = \eta^{(0)} + \eta^{(1)}r + \eta^{(2)}r^2, \quad (18)$$

η^1 – характерная величина материала покрытия. Здесь и далее под символом η подразумеваем каждую из величин ρ , λ , μ , α_T , λ_T , c_ε .

Построим функционалы I_1 и I_2 вида

$$I_1[\rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon] = \frac{1}{\varpi_2 - \varpi_1} \int_{\varpi_1}^{\varpi_2} |F(\varpi, \theta_*)|^2 d\varpi, \quad (19)$$

$$I_2[\rho, \lambda, \mu, \alpha_T, \lambda_T, c_\varepsilon] = \frac{1}{\theta_2 - \theta_1} \int_{\theta_1}^{\theta_2} |F(\varpi_*, \theta)|^2 d\theta,$$

определенные на классе параболических функций (17) и выражающие усредненные интенсивности рассеяния звука в заданных диапазоне частот и угловом секторе наблюдения соответственно.

Для каждого функционала найдем такие значения коэффициентов функций (18), при которых он достигает минимального значения.

Для функций (18), определенных на отрезке $[r_0, r_1]$, введем ограничения

$$C_{1\eta} \leq \bar{\eta}(r) \leq C_{2\eta}, \quad (20)$$

где $C_{1\eta}$ и $C_{2\eta}$ – некоторые положительные константы.

Геометрически каждое из неравенств (20) задает в прямоугольной системе координат с осью абсцисс r и осью ординат f бесконечное множество кривых, лежащих в прямоугольной области

$$\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(r, f) : r_0 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\},$$

показанной на рис.3а

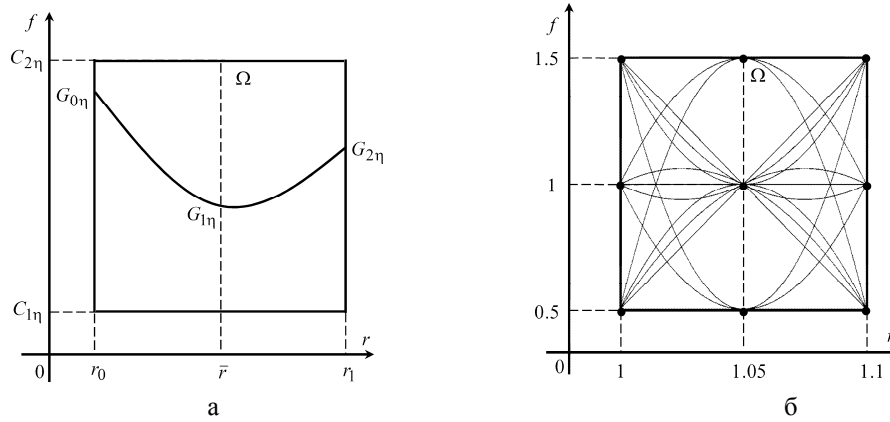


Рис.3. Область $\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}) = \{(r, f) : r_0 \leq r \leq r_1, C_{1\eta} \leq f \leq C_{2\eta}\}$ и допустимые параболические зависимости для функций $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$.

В области $\Omega(\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})$ каждую параболу будем определять тремя точками $G_{0\eta}(r_0, f_{0\eta})$, $G_{1\eta}(\bar{r}, f_{1\eta})$, $G_{2\eta}(r_1, f_{2\eta})$, где $\bar{r} = (r_0 + r_1)/2$, $f_{q\eta} \in [C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ ($q = 0, 1, 2$).

Подставляя координаты точек $G_{0\eta}$, $G_{1\eta}$, $G_{2\eta}$ в выражение (18), приходим к системе трех линейных уравнений с неизвестными $\eta^{(0)}$, $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$. Решая полученную систему, находим

$$\boldsymbol{\eta} = R^{-1} \mathbf{f}_\eta, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)})^T, \quad (21)$$

где $\mathbf{f}_\eta = (f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta})^T$, $R = \begin{pmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 \\ 1 & \bar{r} & \bar{r}^2 \\ 1 & r_1 & r_1^2 \end{pmatrix}$.

Выбирая из отрезка $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ значения для ординат $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$ и вычисляя с помощью соотношений (21) значения коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, получаем параболические (линейные при $\eta^{(2)} = 0$) законы неоднородности материала покрытия. При этом не все параболические законы подлежат рассмотрению. Если выполняется условие

$$r_0 \leq -\eta^{(1)} / (2\eta^{(2)}) \leq r_1, \quad (22)$$

то это означает, что абсцисса вершины параболы принадлежит отрезку $[r_0, r_1]$. В этом случае параболу следует рассматривать только тогда, когда ордината ее вершины принадлежит отрезку $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$, то есть когда выполняется условие

$$C_{1\eta} \leq \eta^{(0)} - \eta^{(1)2} / (4\eta^{(2)}) \leq C_{2\eta}. \quad (23)$$

Нахождение значений неизвестных коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ функций (18), удовлетворяющих условиям (20) и минимизирующих функцию восемнадцати переменных

$$I_m(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)}, \dots, c_\varepsilon^{(0)}, c_\varepsilon^{(1)}, c_\varepsilon^{(2)}) \rightarrow \min, \quad m = 1, 2, \quad (24)$$

осуществим с помощью алгоритма, предложенного в [17, 18].

Введем для ординалы $f_{q\eta}$ ($q = 0, 1, 2$) точки $G_{q\eta}$ на отрезке $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$ равномерную сетку

$$f_{q\eta}^{(l_{q\eta})} = C_{1\eta} + l_{q\eta} h_{q\eta}, \quad q = 0, 1, 2. \quad (25)$$

Здесь $l_{q\eta} = 0, 1, \dots, n_{q\eta}$ – номер узла сетки, $h_{q\eta} = (C_{2\eta} - C_{1\eta}) / n_{q\eta}$ – шаг q -й сетки, $n_{q\eta}$ – количество равных частей, на которые разбит отрезок $[C_{1\eta}, C_{2\eta}]$. Таким образом, построены двумерные сетки в каждой из шести областей Ω , соответствующих неравенствам (20). На этих сетках, используя выражения (21) и условия (22), (23), рассчитываем наборы значений коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$.

Нахождение оптимального набора коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$ осуществим с помощью процедуры поиска минимума функции восемнадцати переменных (24). Вычислительная процедура построена на основе комбинации методов случайного поиска и покоординатного спуска [19] и включает два этапа. При этом в качестве восемнадцати искомым координат выступают не сами коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, а соответствующие им наборы величин $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$, присутствующие в выражениях (21).

На первом этапе случайным образом выбирается начальная точка – совокупность восемнадцати значений $f_{0\eta}, f_{1\eta}, f_{2\eta}$

$$\mathbf{f} = (f_{0\rho}, f_{1\rho}, f_{2\rho}, \dots, f_{0\varepsilon}, f_{1\varepsilon}, f_{2\varepsilon})$$

из множества допустимых дискретных сочетаний на введенной многомерной сетке.

На втором этапе в случайном порядке выбирается одна из координат и выполняется поиск минимума I_m ($m = 1, 2$) при изменении значений этой координаты в узлах введенной для нее сетки (25). При этом другие семнадцать координат сохраняют неизменные значения. Интегралы (19) вычисляются численно. Это повторяется до исчерпания непросмотренных координат. По окончании второго этапа получаем значение локального минимума функции I_m и соответствующий набор координат \mathbf{f} , по которому с помощью формул (21) вычисляются искомые коэффициенты $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$.

Локальный минимум функции I_m и соответствующий ему набор материальных параметров будут зависеть как от выбора начальной точки, так и от порядка перебора координат при покоординатном спуске. Поэтому процедура поиска локального минимума повторяется M раз. В качестве конечного решения выбирается набор коэффициентов $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \eta^{(2)}$, обеспечивающий наименьшее значение I_m среди локальных решений. Получаемое таким образом оптимальное решение является приближенным, точность которого зависит от выбора шага сетки $h_{q\eta}$ и числа M .

Ниже приведены результаты численной реализации описанного выше алгоритма. Расчеты проводились для алюминиевого шара радиуса $r_0 = 1$ м с покрытием толщиной 0.1 м на основе поливинилбутираля, находящегося в воде (см. п.1). При расчетах полагали, что неоднородность термоупругого покрытия проявляется в изменении его плотности $\rho(r)$ и модулей упругости $\lambda(r)$ и $\mu(r)$. При этом для функций $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$ вводились ограничения (20), в которых $C_{1\rho} = C_{1\lambda} = C_{1\mu} = 0.5$, $C_{2\rho} = C_{2\lambda} = C_{2\mu} = 1.5$. Такие значения границ неравенств (20) обеспечивают достаточно широкий диапазон изменения функций $\rho(r)$, $\lambda(r)$, $\mu(r)$, когда максимально возможные значения функций больше минимально допустимых значений в три раза.

В первой строке табл.2 приведены значения оптимальных коэффициентов $\rho^{(q)}, \lambda^{(q)}, \mu^{(q)}$ ($q = 0, 1, 2$), обеспечивающих наименьшее обратное ($\theta_* = \pi$) рассеяние звука шаром с покрытием в частотном диапазоне, который определяется изменением волнового размера шара в интервале $11.5 \leq \varpi \leq 12.5$. При этом в каждой из трех областей $\Omega(\rho^{(0)}, \rho^{(1)}, \rho^{(2)})$, $\Omega(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $\Omega(\mu^{(0)}, \mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ строилась двумерная сетка для одинаковых шагов ($h_{q\rho} = h_{q\lambda} = h_{q\mu} = 0.5$, $q = 0, 1, 2$), отмеченная на рис.3б точками. Рассчитанные на этих сетках наборы коэффициентов $\rho^{(q)}, \lambda^{(q)}, \mu^{(q)}$ определяют в каждой из областей все допустимые функции $\bar{\rho}(r)$, $\bar{\lambda}(r)$, $\bar{\mu}(r)$ для законов неоднородности материала по-

крытия, показанные на рис.3б. Из этих законов в соответствии с изложенным выше алгоритмом выбираются те, которым соответствует минимальное значение I_1 . Минимальному значению I_1 , найденному при $M = 63$ и равному 0.715, соответствует термоупругое покрытие со следующими свойствами:

$$\rho(r) = 1070 \cdot (-9.5 + 10r), \quad \lambda(r) = 3.9 \cdot 10^9 \cdot (116.5 - 215r + 100r^2),$$

$$\mu(r) = 9.8 \cdot 10^8 \cdot (441.5 - 840r + 400r^2), \quad \alpha_T(r) = 2.3 \cdot 10^{-4},$$

$$\lambda_T(r) = 0.2, \quad c_\varepsilon(r) = 1.2 \cdot 10^6.$$

Результаты, приведенные во второй строке табл.2, получены для случая фиксированной частоты, которой соответствует волновое число $\varpi_* = 12$. При этом угол наблюдения изменялся в интервале $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$. Из табл.2 следует, что наименьшее рассеяние звука в освещенной зоне со значением $I_2 = 0.320$ достигается при неоднородности материала покрытия, определяемой зависимостями, которые отличаются от зависимостей, приведенных выше, только законом изменения плотности

$$\rho(r) = 1070 \cdot (-114.5 + 215r - 100r^2).$$

Таблица 2. Оптимальные наборы коэффициентов.

$\rho^{(0)}$	$\rho^{(1)}$	$\rho^{(2)}$	$\lambda^{(0)}$	$\lambda^{(1)}$	$\lambda^{(2)}$	$\mu^{(0)}$	$\mu^{(1)}$	$\mu^{(2)}$	I_m
-9.5	10	0	116.5	-215	100	441.5	-840	400	0.715 ($m = 1$)
-114.5	215	-100	116.5	-215	100	441.5	-840	400	0.320 ($m = 2$)

Для оценки эффективности покрытий с оптимальными звукоотражающими свойствами были рассчитаны значения величин I_1 , I_2 и для термоупругого шара без покрытия, которые оказались равными 1.973 и 0.824 соответственно. Видно, что и в заданном диапазоне частот, и в определенном секторе углов наблюдения покрытия с найденными оптимальными законами неоднородности уменьшают среднее значение интенсивности рассеяния звука более чем на 60 процентов.

В заключение отметим, что непрерывно-неоднородное по толщине термоупругое покрытие шара можно моделировать системой однородных термоупругих слоев с различными значениями материальных констант подобно тому, как это сделано для непрерывно-неоднородного термоупругого плоского слоя [20].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.П. Иванов. Анализ поля дифракции на цилиндре с перфорированным покрытием // Акустический журнал, 2006, т.52, №6, с.791-798;

- англ. пер.: *V.P. Ivanov*. Analysis of the field diffracted by a cylinder with a perforated coating // *Acoustical Physics*, 2006, v.52, №6, p.683-690.
2. *Ю.И. Бобровницкий, К.Д. Морозов, Т.М. Томила*. Периодическая поверхностная структура с экстремальными акустическими свойствами // *Акустический журнал*, 2010, т.56, №2, с.147-151;
англ. пер.: *Yu.I. Bobrovnikskii, K.D. Morozov, T.M. Tomilina*. A periodic surface structure with extreme acoustic properties // *Acoustical Physics*, 2010, v.56, №2, p.127-131.
 3. *О.И. Косарев*. Дифракция звука на упругой цилиндрической оболочке с покрытием // *Проблемы машиностроения и надежности машин*, 2012, т.46, №1, с.34-37;
O.I. Kosarev. Difraktsiia zvuka na uprugoi tsilindricheskoi obolochke s pokrytiem // *Problemy mashinostroeniia i nadezhnosti mashin*, 2012, t.46, №1, s.34-37.
 4. *Л.А. Толоконников, Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын*. Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами // *Математическое моделирование*, 2017, т.29, №11, с.89-98;
англ. пер.: *L.A. Tolokonnikov, N.V. Larin, S.A. Skobel'tsyn*. Modelling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties // *Mathematical models and computer simulations*, 2018, v.10, №3, p.333-340.
 5. *Л.А. Толоконников*. Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука // *Прикладная математика и механика*, 2017, т.81, №6, с.699-707;
англ. пер.: *L.A. Tolokonnikov*. Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound scattering // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, v.81, №6.
 6. *А.Д. Коваленко*. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970, 240 с.;
A.D. Kovalenko. *Osnovy termouprugosti*. – Kiev: Naukova dumka, 1970, 240 s.
 7. *Я.С. Подстригач, В.А. Ломакин, Ю.М. Коляно*. Термоупругость тел неоднородной структуры. – М.: Наука, 1984, 368 с.;
Ia.S. Podstrigach, V.A. Lomakin, Iu.M. Koliانو. *Termouprugost tel neodnorodnoi struktury*. – M.: Nauka, 1984, 368 s.
 8. *Н.В. Ларин, Л.А. Толоконников*. Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем // *Прикладная математика и механика*, 2010, т.74, №4, с.645-654;
англ. пер.: *N.V. Larin, L.A. Tolokonnikov*. Scattering of sound by an inhomogeneous thermoelastic spherical layer // *J. of Applied Math. and Mechanics*, 2010, v.74, №4, p.460-466.
 9. *Дж.В. Стрэтт Лорд Рэлей*. Теория звука. Т.2. – М.: Гостехиздат, 1955, 475 с.;
J.W. Strutt Lord Rayleigh. *The theory of sound*. V.2. – NY: Dover Publications, Inc., 1945, 522p.
 10. *J.R. Allegra, S.A. Hawley*. Attenuation of sound in suspensions and emulsions: Theory and experiments // *The J. of the Acoustical Society of America*, 1972, v.51, №5, p.1545-1564.
 11. *Э.М. Карташов, Л.М. Ожерелкова*. Новые модельные представления в проблеме теплового удара // *Математическое моделирование*, 2002, т.14, №2, с.95-108;
E.M. Kartashov, L.M. Ozherelkova. *Novye modelnye predstavleniia v probleme teplovogo udara* // *Matematicheskoe modelirovanie*, 2002, t.14, №2, s.95-108.
 12. *В.А. Ломазов*. Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. – Орел: ОрелГТУ, 2002, 168 с.;
V.A. Lomazov. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred*. – Orel: OrelGTU, 2002, 168 s.

13. S.A. Lukasiwicz, R. Babaei, R.E. Qian. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // *Journal of Thermal Stresses*, 2003, v.26, №1, p.13-23.
14. А.О. Ватульян, С.А. Нестеров. Об особенностях идентификации неоднородного предварительно напряженного состояния в термоупругих телах // *Прикладная математика и механика*, 2017, т.81, №1, с.103-110;
англ. пер.: A.O. Vatulyan, S.A. Nesterov. Certain aspects of identification of the inhomogeneous prestressed state in thermoelastic bodies // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2017, v.81, №1, p.71-76.
15. А.О. Ватульян, С.А. Нестеров. Численная реализация итерационной схемы решения обратных задач термоупругости для неоднородных тел с покрытиями // *Вычислительные технологии*, 2017, т.22, №5, с.14-26;
A.O. Vatulyan, S.A. Nesterov. Chislennaia realizatsiia iteratsionnoi skhemy resheniia obratnykh zadach termouprugosti dlia neodnorodnykh tel s pokrytiiami // *Vychislitelnye tekhnologii*, 2017, t.22, №5, s.14-26.
16. Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын, Л.А. Толоконников. Определение законов неоднородности плоского упругого слоя с заданными звукоотражающими свойствами // *Акустический журнал*, 2015, т.61, №5, с.552-558;
англ. пер.: N.V. Larin, S.A. Skobel'tsyn, L.A. Tolokonnikov. Determination of the inhomogeneity laws for an elastic layer with preset sound-reflecting properties // *Acoustical Physics*, 2015, v.61, №5, p.504-510.
17. Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын, Л.А. Толоконников. Моделирование неоднородного покрытия упругой пластины с оптимальными звукоотражающими свойствами // *Прикладная математика и механика*, 2016, т.80, №4, с.480-488;
англ. пер.: N.V. Larin, S.A. Skobel'tsyn, L.A. Tolokonnikov. Modelling the inhomogeneous coating of an elastic plate with optimum sound-reflecting properties // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2016, v.80, №4, p.339-344.
18. Л.А. Толоконников, Н.В. Ларин, С.А. Скобельцын. Моделирование неоднородного покрытия упругого цилиндра с заданными звукоотражающими свойствами // *Прикладная механика и техническая физика*, 2017, т.58, №4, с.189-199;
англ. пер.: L.A. Tolokonnikov, N.V. Larin, S.A. Skobel'tsyn. Modeling of an inhomogeneous coating of an elastic cylinder with given sound-reflecting properties // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2017, v.58, №4, p.733-742.
19. Ф.П. Васильев. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988, 552с.;
F.P. Vasilev. Chislennyye metody resheniia ekstremalnykh zadach. – М.: Nauka, 1988, 552s.
20. Л.А. Толоконников, Н.В. Ларин. Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями // *Прикладная механика и техническая физика*, 2017, т.58, №1, с.108-116;
англ. пер.: L.A. Tolokonnikov, N.V. Larin. Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2017, v.58, №1, p.95-102.

Поступила в редакцию 04.06.2018

После доработки 06.11.2018

Принята к публикации 10.12.2018