МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ 2019 год, том 31, номер 5, стр. 69-84

ВАРИАЦИОННАЯ ЭНТРОПИЙНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

 Ю.А. Криксин, В.Ф. Тишкин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН
kriksin@imamod.ru, v.f.tishkin@mail.ru

Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

DOI: 10.1134/S0234087919050058

Для уравнений газовой динамики построена конструктивная версия разрывного метода Галеркина произвольных порядков точности, опирающаяся на новый вариационный принцип энтропийной регуляризации, обеспечивающий выполнение дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса, полной энергии и энтропийного неравенства.

Ключевые слова: газодинамические уравнения, разрывный метод Галеркина, законы сохранения, вариационный принцип, энтропийное неравенство.

VARIATIONAL ENTROPIC REGULARIZATION OF DISCONTINUOUS GALERKIN METHOD FOR GAS DYNAMICS EQUATIONS

Y.A. Kriksin, V.F. Tishkin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

A constructive version of an arbitrary accuracy discontinuous Galerkin (DG) method solving gas dynamics equations is proposed. This DG method is based on the new variational principle of entropic regularization ensuring the implementation of discrete analogs of the conservation laws of mass, momentum, total energy and entropic inequality.

Key words: gasdynamic equations, discontinuous Galerkin method, conservation laws, variational principle, entropic inequality.

1. Введение

Газодинамические (ГД) процессы описываются системами уравнений в частных производных гиперболического типа [1], выражающими законы сохранения массы, импульса и полной энергии. Необратимые термодинамические процессы на микроскопическом уровне в ГД течениях выражаются в неотрицательном производстве энтропии [2], которое является количественной мерой необратимости. Поэтому реалистичные численные решения ГД задач вместе с законами сохранения также должны удовлетворять энтропийному неравенству [3].

Исследования последних двух десятков лет в области численных алгоритмов решения ГД уравнений показали высокую эффективность разрывного метода Галеркина (РМГ) [4-12]. Наряду с традиционными вариантами РМГ и других численных методов в предшествующие годы интенсивно исследовались и в настоящее время продолжают активно развиваться *энтропийно устойчивые* алгоритмы [13-20].

В предлагаемой работе формулируется вариационный принцип получения уравнений РМГ для численного решения трехмерных уравнений газодинамики, который называется *энтропийной регуляризацией* [21]. Последняя основывается на одном экстремальном свойстве РМГ и обеспечивает выполнение соответствующих дискретных аналогов законов сохранения и энтропийного неравенства для приближенных решений.

2. Постановка задачи

Будем использовать традиционную векторную запись задачи Коши для уравнений газодинамики [1] в трехмерной области D с кусочно-гладкой границей ∂D при соответствующих граничных условиях

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U})}{\partial x_j}=0, \qquad \mathbf{U}=\mathbf{U}(\mathbf{x},t), \qquad \mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3)\in D, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{U}=\begin{pmatrix} U^{(1)} \\ U^{(2)} \\ U^{(3)} \\ U^{(4)} \\ U^{(5)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ e \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_j=\begin{pmatrix} F_j^{(1)} \\ F_j^{(2)} \\ F_j^{(3)} \\ F_j^{(4)} \\ F_j^{(5)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + p\delta_{1j} \\ \rho v_2 v_j + p\delta_{2j} \\ \rho v_3 v_j + p\delta_{3j} \\ (e+p)v_j \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},0)=\mathbf{U}_0(\mathbf{x}). \tag{3}$$

В уравнениях (2) величины ρ, p, e и $\mathbf{v}$ обозначают соответственно плотность, давление, плотность полной энергии и вектор скорости идеального газа

$$e = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{\rho \mathbf{v}^2}{2}, \qquad \mathbf{v}^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2. \tag{4}$$

Реалистичная модель газодинамического течения должна учитывать и законы механики, и неравновесной термодинамики, поэтому помимо уравнения (1) искомое обобщенное решение должно удовлетворять в обобщенном смысле энтропийному неравенству

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho s v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho s v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho s v_3)}{\partial x_3} \geq 0, \tag{5}$$

в котором безразмерная удельная энтропия идеального газа определяется равенством

$$s = \ln \frac{p}{p_*} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_*}. \tag{6}$$

Отметим, что в правой части (6) параметры p_* и ρ_* («стандартные» значения давления и плотности) можно выбрать любыми.

Введем обозначения

$$S(\mathbf{U}) = \rho s, \qquad H_j(\mathbf{U}) = \rho s v_j \qquad (j = 1, 2, 3) \tag{7}$$

и перепишем энтропийное неравенство (5) в следующем виде:

$$\frac{\partial S(\mathbf{U})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_j(\mathbf{U})}{\partial x_j} = \nabla_{\mathbf{U}} S(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_j(\mathbf{U})}{\partial x_j} \geq 0, \tag{8}$$

где

$$\nabla_{\mathbf{U}} S(\mathbf{U}) \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial S(\mathbf{U})}{\partial U^{(i)}} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial t}. \tag{9}$$

Рассмотрим функциональное фазовое пространство Ф, состоящее из упорядоченных пар пятимерных (5*D*) векторных функций $(\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{W}(\mathbf{x}))$, которые зависят от пространственной переменной $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in D$. Очевидно, обобщенное решение $(\mathbf{U}(\mathbf{x},t), \partial \mathbf{U}(\mathbf{x},t) / \partial t)$ системы (1) является некоторой *t*-параметрической кривой (фазовой траекторией), лежащей в Ф.

Обратим внимание, что неравенство (8), переписанное в виде

$$\nabla_{\mathbf{V}} S(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{W} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H_j(\mathbf{V}(\mathbf{x}))}{\partial x_j} \geq 0, \tag{10}$$

где $(\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{W}(\mathbf{x})) \in \Phi$, определяет некоторую область $\Gamma \subset \Phi$, в которой лежат физически реализуемые траектории системы (1).

Топология области Г может быть достаточно сложной. Тем не менее, алгоритм, претендующий на вычисление физически реализуемых решений, должен обеспечивать принадлежность «численной» фазовой траектории $(\mathbf{U}(\mathbf{x},t), \partial\mathbf{U}(\mathbf{x},t)/\partial t)$ указанной области Г. Фазовое пространство Ф можно интерпретировать как прямое произведение "координатного" подпространства V и "касательного" подпространства W. Обратим внимание на то, что неравенство (10) является линейным по отношению к элементу $\mathbf{W}(\mathbf{x}) \in W$ и имеет простую геометрическую интерпретацию: если пара векторных функций $(\mathbf{V}(\mathbf{x}), \mathbf{W}(\mathbf{x}))$ непрерывно-дифференцируема в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$, тогда $5D$-вектор $\mathbf{W}(\mathbf{x}_0)$ лежит по одну сторону от гиперплоскости соответствующего пятимерного подпространства, принадлежащего "касательному" подпространству W. Данная гиперплоскость определяется обращением в нуль левой части неравенства (10).

Такая линейность энтропийного неравенства (8) относительно "касательного" вектора $\partial\mathbf{U}(\mathbf{x},t)/\partial t$ играет ключевую роль в построении численного алгоритма решения задачи (1)–(6) на основе разрывного метода Галеркина (РМГ) более высокого порядка точности, чем первый порядок, обеспечивающего выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства на численных решениях.

3. Об одном экстремальном свойстве метода Галеркина

Основная идея как классического метода Галеркина, так и РМГ заключается в представлении приближенного решения задачи для дифференциального уравнения в виде конечной линейной комбинации линейно независимых функций и последующем определении коэффициентов этой комбинации как решения некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ).

Сформулируем метод Галеркина для системы (1) уравнений газовой динамики в некоторой области $\Omega \in \mathrm{E}^3$. Пусть $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ ($k = 0, \dots, n$) есть система n+1 ортонормированных функций в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{L}_2(\Omega). \tag{11}$$

Наряду с только что введенным пространством $L_2(\Omega)$, рассмотрим гильбертово пространство $\mathbf{L}_2^{\alpha,\beta}(\Omega)$ $5D$-векторных функций $\mathbf{V}(\mathbf{x}) = (V^{(1)}(\mathbf{x}), V^{(2)}(\mathbf{x}), V^{(3)}(\mathbf{x}), V^{(4)}(\mathbf{x}), V^{(5)}(\mathbf{x}))^T$ со скалярным произведением

$$(\mathbf{V},\mathbf{W})_{\alpha,\beta} = \alpha(V^{(1)},W^{(1)}) + \beta\sum_{i=2}^{4}(V^{(i)},W^{(i)}) + (V^{(5)},W^{(5)}), \quad \alpha,\beta > 0, \quad (12)$$

и нормой

$$\|\mathbf{V}\|_{\alpha,\beta} = (\mathbf{V},\mathbf{V})_{\alpha,\beta}^{1/2}. \quad (13)$$

Положительные весовые множители α и β в правой части (12) являются, вообще говоря, размерными и необходимы для обеспечения одинаковой размерности всех слагаемых в правой части (12).

Приближенное решение системы (1) уравнений газовой динамики будем искать в виде линейной комбинации функций конечномерной ортонормированной системы $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ ($(\varphi_k,\varphi_l) = \delta_{kl}$, δ_{kl} – символ Кронекера) в гильбертовом пространстве $L_2(\Omega)$ с коэффициентами, зависящими от времени

$$\mathbf{U}(\mathbf{x},t) = \sum_{k=0}^{n}\mathbf{U}_k(t)\varphi_k(\mathbf{x}). \quad (14)$$

Соответствующие уравнения классического метода Галеркина и РМГ принимают вид

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = -\int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\mathbf{F}_j(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))}{\partial x_j}\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}. \quad (15)$$

Пусть $\mathbf{g}_j = (\alpha^{-1/2}\delta_{j,1}, \beta^{-1/2}\delta_{j,2}, \beta^{-1/2}\delta_{j,3}, \beta^{-1/2}\delta_{j,4}, \delta_{j,5})^T$ есть постоянный $5D$-вектор, тогда система векторных функций

$$\mathbf{e}_{5k+j}(\mathbf{x}) = \varphi_k(\mathbf{x})\mathbf{g}_j, \qquad k = 0,\ldots,n; \qquad j = 1,2,3,4,5, \quad (16)$$

образует конечную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}_2^{\alpha,\beta}(\Omega)$ размерности $5n$+5.

Введем обозначение

$$\lambda_{5k+j} = (\mathbf{g}_j)_j^{-1}\frac{dU_k^{(j)}}{dt}, \quad (17)$$

где $(\mathbf{g}_j)_j$ представляет собой j-ю координату вектора $\mathbf{g}_j$.

Теперь с учетом (16) и (17) уравнения (15) можно переписать в виде

$$\lambda_m = (\mathbf{a}, \mathbf{e}_m)_{\alpha,\beta}, \qquad \mathbf{a} = -\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))}{\partial x_j}. \tag{18}$$

Легко видеть, что квадратичная функция $M = 5n + 5$ переменных

$$w(\lambda_1, \ldots, \lambda_M) = \| \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \mathbf{e}_m - \mathbf{a} \|^2_{\alpha,\beta} \tag{19}$$

достигает своего минимального значения, если ее аргументы удовлетворяют равенствам (18), причем коэффициенты $\mathbf{U}_k(t)$ не зависят от выбора весовых коэффициентов α и β в определении скалярного произведения (12). Тем самым показано, что альтернативным, но эквивалентным способом получения коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ является решение экстремальной задачи о нахождении точки минимума квадратичной функции

$$W_0(\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_n) = \int_{\Omega} | \sum_{k=0}^{n} \mathbf{B}_k \varphi_k(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))}{\partial x_j} |^2_{\alpha,\beta} \, d\mathbf{x}, \tag{20}$$

где

$$|\mathbf{c}|_{\alpha,\beta} = (\alpha c_1^2 + \beta \sum_{i=2}^{4} c_i^2 + c_5^2)^{1/2}, \quad \forall\, \mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)^T \in \mathrm{E}^5, \tag{21}$$

а производные по времени от коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ определяются по правилу

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = \mathbf{B}_k^{\min}, \tag{22}$$

где $\mathbf{B}_k^{\min}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ – точка минимума квадратичной функции (20).

Таким образом, минимизация квадратичной функции (20) с последующим выбором коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ в соответствии с равенством (22) предоставляет вариационный метод получения коэффициентов классического метода Галеркина и РМГ. Вариационная интерпретация РМГ открывает в дальнейшем возможность для его *энтропийной регуляризации*.

4. Выбор системы линейно независмых функций в РМГ

В газодинамических задачах выбор конечной системы $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ ортонормированных функций должен обеспечивать выполнение дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии. Интегрирование уравнения (1) по пространственной переменной x в некоторой подобласти (конечном элементе) $\Omega \in E^3$ с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$ приводит к интегро-дифференциальной форме законов сохранения

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \mathbf{U}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} + \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U})}{\partial x_j}d\mathbf{x} = 0\,. \tag{23}$$

В дальнейшем приближенные решения на основе РМГ будут конструироваться таким образом, чтобы соотношение (23) было для них выполнено. После преобразования второго интеграла в левой части (23) в поверхностный интеграл получим равенство

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \mathbf{U}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} + \oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{F}_j(\mathbf{U})\nu_j d\omega = 0\,, \tag{24}$$

где $\mathbf{v} = (v_1, \nu_2, \nu_3)$ обозначает нормаль к поверхности $\partial\Omega$.

С другой стороны, формальное интегрирование правой части равенства (15) по частям [5] приводит к следствию

$$\frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} = -\oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{F}_j(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))\nu_j\varphi_k(\mathbf{x})d\omega + \int_{\Omega}\sum_{j=1}^{3}\mathbf{F}_j(\mathbf{U})\frac{\partial\varphi_k(\mathbf{x})}{\partial x_j}d\mathbf{x}\,. \tag{25}$$

Легко проверить, что приближенное решение на основе РМГ удовлетворяет дискретным аналогам (24) законов сохранения, если в ортонормированной системе функций

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = V_{\Omega}^{-1/2}\,. \tag{26}$$

В самом деле, в этом случае

$$\int_{\Omega}\mathbf{U}(\mathbf{x},t)d\mathbf{x} = V_{\Omega}^{1/2}\mathbf{U}_0(t)\,, \tag{27}$$

и равенство (25) при $k = 0$ эквивалентно равенству (24). Оставшаяся часть системы ортонормированных функций $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ может быть произвольной и выбираться, например, исходя из соображений аппроксимации.

Отметим, что интегро-дифференциальная форма энтропийного условия (8) в конечном элементе Ω имеет вид

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} S(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))d\mathbf{x} + \oint\!\!\oint_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{3}H_j(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega \ge 0\,. \tag{28}$$

Последнее неравенство следует из (5) и может быть получено с применением тех же самых формальных приемов, что и законы сохранения (24).

5. Связь РМГ первого порядка со схемой Годунова и выполнение энтропийного условия во внутренних ячейках

Пусть область D в задаче (1) является объединением конечного числа выпуклых многогранников $\Omega_m \subset E_3$ (m=1, 2, ... , M_Ω), играющих роль конечных элементов. Специфика РМГ такова, что на границах произвольной ячейки (конечного элемента) Ω_m приближенное решение, вообще говоря, претерпевает разрыв первого рода. Поэтому выражения, чисто формально стоящие под знаками поверхностных интегралов в (24)–(26) и (28), должны быть заменены на соответствующие численные потоки [3,10-12]. Следуя [10-12], в качестве численных потоков выберем потоки Годунова, значения которых определяются через решения соответствующих задач распада произвольного разрыва на общей плоской границе смежных ячеек.

Для значений вектора **U**, определяющих потоки массы импульса энергии и энтропии на общих границах смежных ячеек, будем использовать обозначение $\mathbf{U}_G$, соответствующее решениям задачи распада разрыва. Другими словами, в (24)–(26) и (28) под знаком поверхностных интегралов следует полагать $\mathbf{U}$=$\mathbf{U}_G$. Дополнительно предположим, что начальные и граничные условия задачи (1) таковы, что в течение некоторого времени T давление, плотность и температура газа превышают некоторые фиксированные минимальные положительные значения, т.е. исключается получение решений задач распада разрыва с образованием областей вакуума.

В рамках сделанных допущений правые части ОДУ (25) являются непрерывно дифференцируемыми функциями искомых коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$, (см. выражение (14)), что обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для этих ОДУ в некоторой окрестности начальной точки.

Рассмотрим РМГ первого порядка, что отвечает значению n = 0 в разложении (14) и единственной функции (26) в системе ортонормированных функций. В этом случае приближенное решение в пределах каждого конечного элемента $\Omega \subset \mathrm{E}_3$ не зависит от векторной пространственной переменной x и является только функцией времени $\mathbf{U}(\mathbf{x},t) = \mathbf{U}(t) = V_\Omega^{-1/2}\mathbf{U}_0(t)$. Далее будем рассматривать внутренние ячейки Ω, ни одна из граней которых не имеет общих точек с границей области D, за исключением, быть может, некоторых ребер и вершин. Для функций $\mathbf{U}(t)$ во внутренних ячейках справедливо уравнение

$$\frac{d\mathbf{U}(t)}{dt} = -V_\Omega^{-1} \oiint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega, \tag{29}$$

вытекающее из (24) и принятого выше соглашения о потоках Годунова.

Установим выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства (см. (28))

$$\frac{dS(\mathbf{U}(t))}{dt} + V_\Omega^{-1} \oiint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} H_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega \ge 0 \tag{30}$$

на решениях системы ОДУ (29). С этой целью заметим, что по отношению к (29) схема Годунова

$$\frac{\mathbf{V}(t+\tau) - \mathbf{V}(t)}{\tau} = -V_\Omega^{-1} \oiint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega \tag{31}$$

реализует явную схему Эйлера решения системы (29). В принятых нами условиях последовательность ломаных Эйлера, порожденная схемой Годунова (31), сходится к единственному решению задачи Коши для системы ОДУ (29) при $\tau \to 0$.

Проанализируем поведение энтропии на решении схемы Годунова (31) в ячейке Ω в пределах одного шага τ по времени аналогично тому, как это было сделано нами ранее в одномерном случае [21].

С этой целью выберем некоторый момент времени $t = t_0$ и рассмотрим решение $\mathbf{V}(t_0 + \tau)$ схемы Годунова (31) (ломаную Эйлера) при достаточно малых значениях шага τ, полагая, что $\mathbf{U}(t_0) = \mathbf{V}(t_0)$. Для точного решения задачи распада разрыва в ячейке Ω в момент времени $t = t_0$ будем по-прежнему использовать обозначение $\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t)$ в пространственно-временной области $\Omega \times [t_0, t_0 + \tau]$. Отметим, что в области Ω справедливо равенство $\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0)$=$\mathbf{U}(t_0)$=$\mathbf{V}(t_0)$. Хотя аналитическое представление решения $\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t)$ в трехмерной области неизвестно в отличие от одномерного случая [1], тем не менее, конечность скорости распространения волн и разрывов, описываемых гиперболическими системами, дает возможность получить ряд важных оценок и выводов.

Отметим, что области влияния ребер и вершин ячейки Ω простираются на расстояния, удаленные не более чем на $c\tau$ от соответствующих ребер и вершин, где c обозначает максимальную скорость распространения волн и разрывов в ГД системе [10]. Так как в момент времени $t = t_0 + 0$ решения задач распада разрыва $\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t)$ на каждой из граней ячейки Ω принимают постоянные для рассматриваемой грани значения, то они останутся теми же самыми во всех точках соответствующих граней за пределами областей влияния ребер и вершин. Площади областей влияния ребер и вершин на гранях ячейки Ω составляют величины порядка $O(\tau)$, поэтому решение схемы Годунова (31) $\mathbf{V}(t_0+\tau)$ отличается от среднего значения точного решения на величину второго порядка малости $O(\tau^2)$

$$< \mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau) >= V_\Omega^{-1} \int\limits_\Omega \mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau)d\mathbf{x} = \mathbf{V}(t_0+\tau) + O(\tau^2) . \qquad (32)$$

Вследствие гладкости плотности энтропии $S(\mathbf{U})$ по U (см. равенства (6) и (7)) будет иметь место равенство

$$S(< \mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau) >) = S(\mathbf{V}(t_0+\tau)) + O(\tau^2) . \qquad (33)$$

Кроме этого, в соответствии с неравенством (35) из [21] справедливо неравенство

$$< S(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau)) > \le S(< \mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau) >) . \qquad (34)$$

Из-за наличия областей влияния ребер и вершин ячейки Ω энтропийное неравенство для точного решения выполняется приближенно с точностью $O(\tau^2)$

$$\begin{gathered}\int\limits_\Omega [S(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0+\tau)) - S(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0))]d\mathbf{x} + \\ +\tau \oiint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} H_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0))\nu_j d\omega \ge O(\tau^2).\end{gathered} \qquad (35)$$

Этот факт следует из того, что вне указанных областей влияния производство энтропии в левой части (35) неотрицательно вследствие свойств решений задачи распада разрыва и определения потоков Годунова, а вклад оставшихся областей имеет порядок $O(\tau^2)$.

С учетом равенства $\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0) = \mathbf{V}(t_0)$, а также соотношений (31)–(35) получим энтропийное неравенство для решений схемы Годунова (31)

$$\tau^{-1} \int\limits_\Omega [S(\mathbf{V}(t_0+\tau)) - S(\mathbf{V}(t_0))]d\mathbf{x} + \oiint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} H_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0))\nu_j d\omega \ge O(\tau) . \qquad (36)$$

Переходя в (36) к пределу при $\tau \to 0$ и учитывая сходимость соответствующих разностных решений схемы (31) к решению РМГ первого порядка (29), устанавливаем справедливость энтропийного неравенства (30) в обобщенном смысле.

6. Энтропийная регуляризация РМГ высоких порядков точности

С целью улучшения аппроксимации исходной задачи (1) газовой динамики необходимо расширить систему $\{\varphi_k(\mathbf{x})\}$ ортонормированных функций по сравнению с РМГ первого порядка (29). Однако традиционные уравнения РМГ (25), вообще говоря, не удовлетворяют дискретному аналогу энтропийного неравенства (28) во внутренних ячейках Ω. Поэтому здесь будет сформулирован *энтропийно регуляризованный вариационный принцип* получения системы ОДУ для коэффициентов РМГ, основанный на экстремальных свойствах метода Галеркина (20)–(22).

Естественным способом получения энтропийно регуляризованных уравнений РМГ служит замена безусловной минимизации квадратичной функции (20) на ее условную минимизацию на множестве переменных $\mathbf{B}_k$, совместимых с условием (28). Неравенство (28) может быть переписано в виде линейного неравенства относительно переменных $\mathbf{B}_k$, что делает новую вариационную задачу минимизации столь же легко разрешимой, как и первоначальная задача безусловной минимизации. Перейдем к формулировке РМГ более высоких порядков точности, опирающейся на условную минимизацию квадратичной функции (20) с ограничением (28). Как уже отмечалось выше, дискретные аналоги законов сохранения (24) будут выполнены, если в качестве одного из элементов локального ортонормированного базиса ячейки Ω выбрать функцию (26), а соответствующий ей коэффициент положить равным

$$\mathbf{U}_0(t) = V_\Omega^{1/2}\mathbf{U}(t), \tag{37}$$

где функция $\mathbf{U}(t)$ является решением системы ОДУ (29).

Для определения оставшихся уравнений для коэффициентов $\mathbf{U}_k(t)$ (k=1,...,n) преобразуем неравенство (28) к виду

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k(t) \cdot \frac{d\mathbf{U}_k(t)}{dt} + \oiint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} H_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0))\nu_j d\omega -$$
$$- V_\Omega^{-1/2}\mathbf{V}_0(t) \cdot \oiint_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega \ge 0, \tag{38}$$

где

$$\mathbf{V}_k(t) = \int\limits_{\Omega} \nabla_{\mathbf{U}} S(\mathbf{U}(\mathbf{x},t))\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x}, \qquad k = 0, \dots, n. \tag{39}$$

Положим далее в правой части (20)

$$\mathbf{B}_0 = -V_{\Omega}^{-1/2} \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega \tag{40}$$

и перепишем соотношение (20) в виде

$$W(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n) = \int\limits_{\Omega} |\sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_k \varphi_k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})|^2_{\alpha,\beta} d\mathbf{x}, \tag{41}$$

где

$$\mathbf{A}(x) = V_{\Omega}^{-1} \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{F}_j(\mathbf{U})}{\partial x_j}. \tag{42}$$

Поставим задачу условной минимизации квадратичной функции (41) с линейным ограничением

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k \geq \eta, \tag{43}$$

где

$$\eta = V_{\Omega}^{-1/2} \mathbf{V}_0(t) \cdot \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} \mathbf{F}_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t))\nu_j d\omega - \oint\!\!\!\oint\limits_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{3} H_j(\mathbf{U}_G(\mathbf{x},t_0))\nu_j d\omega, \tag{44}$$

а $5n$-мерный вектор $(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n)$ является искомой точкой минимума. Задача условной минимизации квадратичной функции (41) с ограничением (43) единственным образом разрешима, если хотя бы один из компонентов $5n$-мерного вектора $(\mathbf{V}_1, \dots, \mathbf{V}_n)$ в левой части (43) отличен от нуля. Для решения задачи условной минимизации квадратичной функции (41) может быть использован метод неопределенных множителей Лагранжа, рассмотренный для одномерного случая в [21].

Соответствующий функционал Лагранжа имеет вид

$$\Phi_{\mu}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n) = \int\limits_{\Omega} |\sum_{k=1}^{n} \mathbf{B}_k \varphi_k(\mathbf{x}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})|^2_{\alpha,\beta} d\mathbf{x} + 2\mu(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k - \eta). \tag{45}$$

Точку его безусловного экстремума легко найти, приравнивая к нулю производные $\partial\Phi_{\mu} / \partial B_k^{(j)}$

$$B_k^{(j)} = \int\limits_{\Omega} A^{(j)}(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} - (\mathbf{g}_j)_j^2 \mu V_k^{(j)}, \qquad k = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, 5. \qquad (46)$$

Если при $\mu = 0$ $5n$-мерный вектор $(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_n)$, определяемый равенствами (46), удовлетворяет неравенству (43), то его значение и принимается в качестве искомого решения $\mathbf{B}_k^{\min}$ $(k = 1, \dots, n)$ задачи условной минимизации квадратичной функции (41). В противном случае для определения значения множителя Лагранжа μ следует воспользоваться уравнением

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{V}_k \cdot \mathbf{B}_k - \eta = 0, \qquad (47)$$

где вместо $\mathbf{B}_k$ используется правая часть выражений (46). Корень уравнения (47)

$$\mu = \{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{5} (\mathbf{g}_j)_j^2 [V_k^{(j)}]^2\}^{-1} [\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{5} V_k^{(j)} \int\limits_{\Omega} A^{(j)}(\mathbf{x})\varphi_k(\mathbf{x})d\mathbf{x} - \eta] \qquad (48)$$

определяет искомое значение множителя Лагранжа μ.

В рассматриваемом случае искомое решение $\mathbf{B}_k^{\min}$ задачи условной минимизации квадратичной функции (41) представляет собой правую часть (46) со значением (48) параметра μ. Приняв соглашение, что значение $\mathbf{B}_0^{\min}$ задается равенством (40), определим *энтропийно регуляризованный* РМГ, использовав для этого в правой части системы ОДУ (22) для коэффициентов РМГ только что определенный вектор $\mathbf{B}_k^{\min}$ $(k = 0, 1, \dots, n)$.

Выбор весовых коэффициентов α и β осуществляется как и в [21], исходя из соображений размерности

$$\beta = \frac{< E(\mathbf{x}, t) >}{< \rho(\mathbf{x}, t) >} = (\int\limits_{\Omega} \rho d\mathbf{x})^{-1} \int\limits_{\Omega} (\frac{p}{\gamma - 1} + \rho \mathbf{v}^2 / 2) d\mathbf{x}, \qquad \alpha = \beta^2.$$

Таким образом, процедура вычисления коэффициентов энтропийно регуляризованного РМГ полностью описана.

7. Заключительные замечания

1. Впервые сформулирован вариационный принцип энтропийной регуляризации разрывного метода Галеркина произвольного порядка точности для трехмерной системы уравнений газовой динамики, обеспечивающий выполнение дискретных аналогов законов сохранения массы, импульса и полной энергии и закона неубывания энтропии в неравновесных термодинамических системах.

2. Сложность численной реализации предложенного метода имеет такой же уровень, как и для классического РМГ, что создает предпосылки его применения в широком круге задач газовой динамики.

3. Порядок точности как энтропийно регуляризованного, так и классического РМГ существенно зависит от выбора базисных функций. Обратим внимание на то, что в тех ячейках, где классический РМГ не нарушает энтропийного неравенства, энтропийно регуляризованное приближенное решение вычисляется по одним и тем же с ним формулам и должно иметь тот же самый порядок точности. В областях вблизи разрыва высокая точность обоих методов не предполагается.

4. Конструктивный характер предложенного метода открывает возможность для расчета моделей с заданным производством энтропии. Например, модифицируя энтропийное неравенство, можно формулировать условия, относящиеся к скорости производства энтропии для тех или иных необратимых физических процессов, и учитывать их в вычислительном алгоритме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М.: Физматлит, 2001, 608 с.;
A.G. Kulikovsky, N.V. Pogorelov, A.Yu. Semenov. Mathematical aspects of numerical solution of hyperbolic systems. – Taylor & Francis Inc., 2000.
2. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2001, 736 с.;
L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Fluid Mechanics, 2nd ed., v.6. – Butterworth-Heinemann, 1987, 552 p.
3. *С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов*. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976, 400 с.;
S.K. Godunov, A.V. Zabrodin, M.Ia. Ivanov, A.N. Kraiko, G.P. Prokopov. Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoi dinamiki. – M.: Nauka, 1976, 400 s.
4. *B. Cockburn*. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection – Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // Lecture Notes in Mathematics, 1998, v.1697, p.151-268.
5. *B. Cockburn, G.E. Karniadakis, Ch.-W. Shu.* The Development of Discontinuous Galerkin Methods // IMA Preprint Series # 1662, December 1999, Institute for Mathematics and its Applications, University of Minnisota, 51 p.
6. *B. Cockburn, Ch.-W. Shu.* Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems. Journal of Scientific Computing, 2001, v. 16, №3, p.173-261.
7. *D.N. Arnold, F. Brezzi*, *B. Cockburn, L.D. Marini*. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems // SIAM J. on Numer. Anal., 2002, 29, p.1749-1779.
8. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин*. Использование усреднений для сгла-

живания решений в разрывном методе Галеркина // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, № 89, 32 с.;
M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin. Application of averaging to smooth the solution in DG method // Preprint KIAM RAS, 2017, № 89, 32 s.

9. *М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин*. Исследование влияния лимитера на порядок точности решения разрывным методом Галеркина // Мат. моделирование, 2012, т.24, №12, с.124-128;
англ. пер.: *M.E. Ladonkina, O.A. Neklyudova, V.F. Tishkin*. Impact of Different Limiting Functions on the Order of Solution Obtained by RKDG // Math. Mod. & Comp. Simul., 2013, v.5, №4, p.346-349.
10. *М.М. Краснов, П.А. Кучугов, М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин*. Обобщение метода Годунова, использующее кусочно-полиномиальные аппроксимации в многомерном случае // Супервычисления и математическое моделирование. Труды XVI международной конференции 3-7 октября 2016 г. / Под ред. Р.М. Шагалиева. – Саров: ФГУП "РФЯЦ-ВНИИЭФ", 2017, с. 168-183;
M.M. Krasnov, P.A.Kuchugov, M.E. Ladonkina, V.F. Tishkin. Obobshchenie metoda Godunova, ispolzuiushchego kusochno-polinomialnye approksimatsii v mnogomernom sluchae // Supervychisleniia i matematicheskoe modelirovanie. Trudy XVI mezhdunarodnoi konferentsii 3-7 oktiabria 2016 g. / Pod red. R.M. Shagalieva. – Sarov: FGUP “RFIATS-VNIIEF”, 2017, s. 168-183.
11. *М.Е. Ладонкина, В.Ф. Тишкин*. О методах типа Годунова высокого порядка точности // Доклады академии наук, 2015, т.461, №4, с.390-393;
англ. пер.: *M.E. Ladonkina, V.F.Tishkin*. On Godunov type methods of high order of accuracy // Doklady Mathematics, 2015, v.91, №2, p.189-192.
12. *В.Ф. Тишкин, В.Т. Жуков, Е.Е. Мышецкая*. К обоснованию схемы Годунова в многомерном случае // Матем. моделирование, 2016, т.28, №2, с.86-96;
англ. пер.: *V.F. Tishkin, V.T. Zhukov, E.E. Myshetskaya*. Justification of Godunov’s scheme in the multidimensional case // Math. Mod. & Comp. Simul., 2016, v.8, №5, p.548-556.
13. *P.G. Le Floch, J.M. Mercier, C. Rohde*. Fully discrete, entropy conservative schemes of arbitrary order // SIAM J. Numer. Anal. 2002, v.40, №5, p.1968-1992.
14. *F. Lagoutière, C.R. Acad*. A non-dissipative entropic scheme for convex scalar equations via discontinuous cell-reconstruction // Comp. Rendus Mathematique. 2004, v.338, №7, p.549-554.
15. *H. Zakerzadeh, U.S. Fjordholm*. High-order accurate, fully discrete entropy stable schemes for scalar conservation laws // IMA J. of Numerical Analysis. 2016, v.36, №2, p.633-654.
16. *U.S. Fjordholm, R. Käppeli, S. Mishra, E. Tadmor*. Construction of approximate entropy measure-valued solutions for hyperbolic systems of conservation laws // Found. Comput. Math., 2017, v.17, №3, p.763-827.
17. *A.R. Winters, G.J. Gassner*. A Comparison of Two Entropy Stable Discontinuous Galerkin Spectral Element Approximations for the Shallow Water Equations with Non-Constant Topography // Journal of Computational Physics, 2015, v.301, p.357-376.
18. *G.J. Gassner, A.R. Winters, D.A. Kopriva*. A Well Balanced and Entropy Conservative Discontinuous Galerkin Spectral Element Method for the Shallow Water Equations // Applied Mathematics and Computation, 2016, v.272, p.291-308.

19. *T. Chen, Ch.-W. Shu*. Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws // J. Comp. Phys., 2017, v.345, p.427-461.
20. *И.Б. Петров, А.С. Холодов*. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1984, т.24, №8, с.1172-1188;
англ. пер.: *I.B. Petrov, A.S. Kholodov*. Regularization of discontinuous numerical solutions of equations of hyperbolic type // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, 1984, v.24, №4, p.128-138.
21. *Ю.А. Криксин, В.Ф. Тишкин*. Энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина в одномерных задачах газовой динамики // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша, 2018, №100, 22 с.;
Y.A. Kriksin, V.F. Tishkin. Entropic regularization of discontinuous Galerkin method in one-dimensional problems of gas dynamics // Preprint KIAM RAS, 2018, №100, 22 s.

Поступила в редакцию 06.09.18
После доработки 06.09.18
Принята к публикации 22.10.18