

О ВЫЧИСЛЕНИИ ГРАДИЕНТА В МЕТОДЕ КОРРЕКЦИИ ПОТОКОВ

© 2019 г. *П.А. Бахвалов*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
bahvalo@mail.ru

Статья подготовлена в ходе выполнения проекта РФФИ 16-31-60072 мол-а-дк.

DOI: 10.1134/S0234087919050083

Метод коррекции потоков является семейством рёберно-ориентированных схем для решения гиперболических систем на неструктурированных сетках. Ключевое место в этих схемах занимает вычисление градиентов от физических переменных в сеточных узлах не менее чем со вторым порядком аппроксимации. Существуют две известные процедуры, обеспечивающие выполнение этого условия. Первая основана на методе наименьших квадратов, а вторая – на спектральных элементах. В настоящей работе проводится сравнение схем, получающихся при использовании этих процедур, между собой и с другими рёберно-ориентированными схемами.

Ключевые слова: неструктурированная сетка, метод коррекции потоков, схема UFC.

ON GRADIENT CALCULATION IN FLUX CORRECTION METHOD

P.A. Bakhvalov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS

Flux Correction method is a family of edge-based schemes for solving hyperbolic systems on unstructured meshes. The crucial operation there is a nodal gradient calculation of physical variables with at least second order of accuracy. There are two well-known procedures meeting this condition. One is based on Least Squares method and the other one is based on spectral elements. In this paper we compare resulting schemes and discuss their problems.

Key words: unstructured mesh, Flux Correction method, UFC scheme.

1. Введение

Рёберно-ориентированные схемы представляют собой особый класс конечно-объёмных схем для решения гиперболических систем уравнений на неструктурированных сетках. В этих схемах консервативные переменные определяются в сеточных узлах, а потоки, используемые для аппрокси-

мации законов сохранения, вычисляются в серединах сеточных рёбер или диагоналей элементов. Впервые эти схемы предложены в [1, 2]. Современное состояние этих схем представлено, главным образом, схемами с квазиодномерной реконструкцией переменных [3–6] и схемами на основе метода коррекции потоков (Flux Correction method – FC) [7–14].

Схема T. Barth [2] заключается в линейной реконструкции переменных в середине ребра с использованием градиентов, вычисленных в сеточных узлах. Она обладает 1-м порядком аппроксимации и на практике показывает порядок точности от $3/2$ до 2. Однако в [7] было замечено, что если эти градиенты вычислять со вторым порядком аппроксимации, то и вся схема в целом также будет обладать вторым порядком аппроксимации. Порядок точности получаемой при этом схемы на нестационарных задачах остаётся равным 2, однако на стационарных задачах часто наблюдается 3-й порядок сходимости. Дальнейшее развитие этих схем заключалось в перенесении этой сверхсходимости на нестационарные задачи [8–12], но это было достигнуто ценой существенного усложнения схемы и потери консервативности. Другим подходом является метод коррекции нестационарных потоков [13, 14], который снижает порядок аппроксимации до первого, однако при этом на практике позволяет улучшить точность стационарного метода при ничтожных дополнительных затратах машинного времени.

Ключевое место в схемах на основе метода коррекции потоков занимает процедура вычисления градиентов от физических переменных в сеточных узлах не менее чем со вторым порядком аппроксимации. Этого можно добиться, например, вычисляя градиент от интерполяционного многочлена, полученного методом наименьших квадратов (Least Squares Method, LSM). Проблемой является возможность вырождения системы уравнений для нахождения коэффициентов многочлена. Кроме того, при использовании анизотропной сетки в пристеночных областях число обусловленности системы растёт с ростом анизотропии и кривизны поверхности.

Чтобы избежать этих проблем, в [8] предложено вычислять градиенты по спектральным элементам. В этом случае расчётная сетка должна представлять собой результат однократного естественного измельчения (см. рис.1) некоторой другой расчётной сетки, элементы которой называются спектральными. На каждом спектральном элементе интерполюант определяется однозначно, после чего градиент в узле определяется как средний градиент от таких интерполянтов, определённых в этом узле. При этом на равномерной сетке схема получается неоднородной: часть сеточных узлов являются вершинами спектральных элементов, а часть – не являются таковы-

ми, и поэтому в них по-разному вычисляются градиенты. Метод вычисления градиентов по спектральным элементам к настоящему моменту казался оптимальным. Однако, как будет показано ниже, неоднородность схемы может приводить к странностям в поведении решения.



Рис.1. Естественное измельчение сеточных элементов в 2 раза.

В трёхмерном случае в пристеночных областях для вязких задач расчётная сетка обычно имеет тип *strand*, то есть её топология представляет собой декартово произведение двумерной неструктурированной сетки на одномерную сетку. В этом случае становится возможным ещё один способ вычисления градиентов. Компонента градиента вдоль ребра, втыкающегося в границу, вычисляется с использованием одномерной конечно-разностной схемы, а касательные компоненты – с использованием только значения переменных на соответствующем слое, с применением одного из двух описанных выше методов [10, 11]. Этот тип сеток мы в настоящей работе рассматривать не будем, ограничившись невязким случаем.

В настоящей работе на ряде тестовых задач проводится сравнение схем на основе метода коррекции потоков, получающихся при использовании разных процедур вычисления градиентов. Также эти схемы сопоставляются по точности со схемами с квазиодномерной реконструкцией. Помимо этого предлагается новый ограничитель наклонов для решения задач с разрывами при помощи метода коррекции потоков.

2. Рёберно-ориентированные схемы

В настоящей работе будем рассматривать гиперболические системы уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = 0, \quad (1)$$

где $\mathcal{F} = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z)$. Условие гиперболичности означает, что для любого вектора $\tilde{\mathbf{n}}$ якобиан вектора потоков в этом направлении представим в виде

$$\frac{d\mathcal{F}(\mathbf{Q}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}}{d\mathbf{Q}} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}, \quad (2)$$

где $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица. В частности, такой вид имеет уравнение переноса при $\mathbf{Q}=u$, $\mathcal{F}=au$. Уравнения Эйлера для идеального газа имеют вид (1)

при $\mathbf{Q}=(\rho, \rho \mathbf{u}, E)^T$, $\mathcal{F}=(\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \hat{I}, (E+p) \mathbf{u})^T$, где $E=\rho \mathbf{u}^2 / 2 + \rho \varepsilon$, \hat{I} – единичная матрица, и замыкаются уравнением состояния идеального газа $p = \rho \varepsilon (\gamma - 1)$. Всюду в настоящей работе используется показатель адиабаты $\gamma = 1.4$.

Построение конечно-объёмной схемы предполагает разбиение расчётной области на ячейки, для которых выписываются дискретные законы сохранения. Для схем с определением переменных в сеточных узлах роль ячеек выполняют контрольные объёмы, каждый из которых построен вокруг своего сеточного узла. Опишем их построение на примере треугольной сетки.

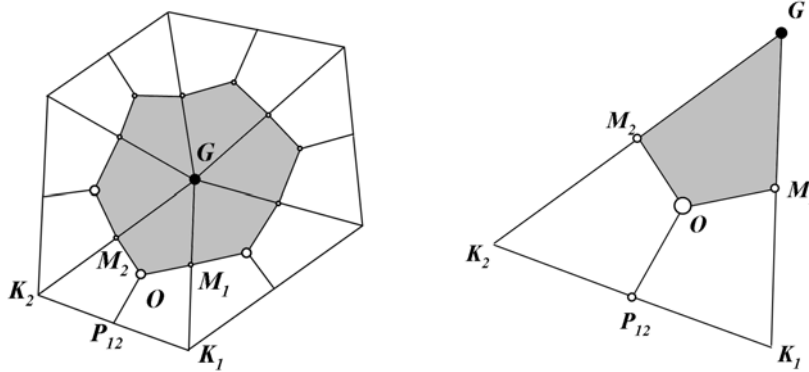


Рис.2. Двумерный медианный объём узла G (слева) и относящаяся к нему часть треугольного сеточного элемента GK_1K_2 (справа).

Рассмотрим некоторый треугольник GK_1K_2 , изображённый на рис.2 справа. Середины рёбер GK_1 , GK_2 и K_1K_2 обозначим через M_1 , M_2 и P_{12} соответственно, а центр треугольника – через O . Треугольник GK_1K_2 разбивается на три четырёхугольника: GM_1OM_2 (входит в контрольный объём узла G), K_1M_1OP (входит в контрольный объём узла K_1) и K_2M_2OP (входит в контрольный объём узла K_2). Контрольный объём узла G представляет собой объединение таких четырёхугольников и изображён на рис.2 слева. Если в качестве центра треугольника выбирается его центр масс, то получающиеся при этом ячейки называются медианными или барицентрическими. Построение аналогичных ячеек в трёхмерном случае описано в [15, 16].

Закон сохранения вида (1) для ячейки G можно переписать в виде

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}_G}{dt} = -\frac{1}{V_G} \int_{\partial C_G} \mathcal{F} \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3)$$

где C_G – контрольный объём узла G , $V_G = |C_G|$ – его величина, ∂C_G – его граница, \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к ней, $\bar{\mathbf{Q}}_G$ – интегральное среднее от \mathbf{Q} по ячейке C_G .

Поверхность ячейки может быть представлена в виде $\partial C_G = \bigcup_{K \in N_1(G)} \partial C_{GK}$,

где $N_1(G)$ – множество узлов, соседних (то есть соединённым общим сеточным элементом) с вершиной G , ∂C_{GK} – общая поверхность ячеек G и K . Введём обозначения

$$\mathbf{n}_{GK} = \int_{\partial C_G \cap \partial C_K} \mathbf{n} dS, \quad \tilde{\mathbf{n}}_{GK} = \mathbf{n}_{GK} / |\mathbf{n}_{GK}|.$$

Для аппроксимации (3) подставим \mathbf{Q}_G (точечное значение \mathbf{Q} в сеточном узле G) вместо $\bar{\mathbf{Q}}_G$; значение интеграла по ∂C_G в (4) представим в виде суммы интегралов по ∂C_{GK} , и в каждом таком интеграле заменим поток \mathcal{F} на некоторое значение, отнесённое к середине ребра. Имеем

$$\frac{d\mathbf{Q}_G}{dt} = -\frac{1}{V_G} \sum_{K \in N_1(G)} \mathbf{h}_{GK} |\mathbf{n}_{GK}|, \quad (4)$$

где \mathbf{h}_{GK} — численный поток, не менее чем с первым порядком аппроксимирующий $\mathcal{F} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{GK}$ в середине ребра. Схемы вида (4) называются *рёберно-ориентированными* (edge-based). При использовании медианных ячеек на симплицальной сетке рёберно-ориентированные схемы обладают первым порядком аппроксимации во внутренних узлах сетки [15]. Это свойство вытекает из точности вычисления правой части (4) на линейной функции, если потоки \mathbf{h}_{GK} точны на линейной функции в серединах рёбер.

На гибридной сетке можно построить два типа контрольных объёмов: полупрозрачные [16] и прямые [17, 16]. Полупрозрачные контрольные объёмы являются обобщением медианных: они сохраняют точность на линейной функции на произвольной неструктурированной сетке (если потоки точны на линейной функции в серединах рёбер), но ошибка аппроксимации пропорциональна коэффициенту анизотропии. Прямые контрольные объёмы не сохраняют точность на линейной функции. На призматической сетке в пристеночной области первый порядок аппроксимации, как правило, имеет место за счёт структурированности сетки в нормальном направлении, однако теряется при переходе на неструктурированную сетку.

С целью обеспечения устойчивого счёта потоки обычно определяются при помощи некоторого приближённого решения задачи о распаде разрыва, например, схемы типа Куранта–Изаксона–Риса (см., например, [18]):

$$\mathbf{h}_{GK} = \frac{\mathcal{F}(\mathbf{Q}_{GK}^+) + \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{GK}^-)}{2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{GK} - \frac{1}{2} \mathbf{S}^{-1} |\Lambda| \mathbf{S} \frac{\mathbf{Q}_{GK}^+ - \mathbf{Q}_{GK}^-}{2},$$

где матрицы \mathbf{S} и Λ определены (2). Частным случаем этой схемы является схема Роу [19]. В некоторых случаях используется поток более общего вида

$$\mathbf{h}_{GK} = \frac{\mathbf{F}_{GK}^+ + \mathbf{F}_{GK}^-}{2} - \frac{\delta}{2} \mathbf{S}^{-1} |\Lambda| \mathbf{S} \frac{\mathbf{Q}_{GK}^+ - \mathbf{Q}_{GK}^-}{2}. \quad (5)$$

Независимое определение \mathbf{F}_{GK}^\pm позволяет добиться большего порядка точности на нелинейных задачах на равномерных сетках, хотя на практике это, как правило, не очень заметно.

Определение конкретной рёберно-ориентированной схемы сводится к определению значений \mathbf{Q}_{GK}^\pm и \mathbf{F}_{GK}^\pm . Простейшей рёберно-ориентированной схемой является «линейная» схема Т. Barth [1]. В ней предраспадные значения вычисляются по формулам

$$\mathbf{Q}_{GK}^- = \mathbf{Q}_G + \alpha_{GK} \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot (\nabla \mathbf{Q})_G, \quad \mathbf{Q}_{GK}^+ = \mathbf{Q}_K - \alpha_{KG} \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot (\nabla \mathbf{Q})_K, \quad (6)$$

в качестве одного из вариантов определения \mathbf{F}_{GK}^\pm предлагается $\mathbf{F}_{GK}^\pm = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{GK}^\pm) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{GK}$, а градиент функции в сеточном узле вычисляется процедурой Грина–Гаусса:

$$(\nabla \mathbf{Q})_G = \frac{1}{V_G} \sum_{K \in N_1(G)} \frac{\mathbf{Q}_G + \mathbf{Q}_K}{2} \mathbf{n}_{GK}. \quad (7)$$

При решении задач с гладкими решениями коэффициенты α_{GK} и α_{KG} полагаются равными 1. Для расчётов течений с разрывами они выбираются независимо для каждой компоненты вектора \mathbf{Q} таким образом, чтобы выполнялось условие $\min\{\mathbf{Q}_G, \mathbf{Q}_K\} \leq \mathbf{Q}_{GK}^\pm \leq \max\{\mathbf{Q}_G, \mathbf{Q}_K\}$ [1].

Другими примерами рёберно-ориентированных схем являются схема Луо и др. [20], схема Eliasson [21], метод коррекции потоков (Flux Corrector method, FC) [7–14] и построенные на его основе схемы Н. Nishikawa [22, 23], схемы Mixed Element-Volume (MEV) [3, 24, 25] и схемы EBR (Edge-Based Reconstruction) [3–6].

3. Метод коррекции потоков

Рассмотрим схему (6) для уравнения переноса $\partial u / \partial t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$. Предположим, что градиент вычисляется со вторым порядком аппроксимации.

Покажем, что при этом и вся схема (4)–(6) обладает вторым порядком аппроксимации во внутренних узлах на медианных ячейках на неструктурированной сетке.

Поскольку точность на линейной функции имеет место в силу свойств медианных ячеек, то чтобы убедиться во втором порядке аппроксимации, достаточно рассмотреть функцию вида $u(\mathbf{r}) = (x - x_G)^a (y - y_G)^b (z - z_G)^c$ при $a + b + c = 2$. Предраспадное значение со стороны узла G в центре ребра GK вычисляется по формуле (6) и равно 0, поскольку $u(\mathbf{r}_G) = \nabla u(\mathbf{r}_G) = 0$. Рассмотрим предраспадное значение со стороны узла K . Проанализируем его разложение в ряд Тейлора в окрестности точки \mathbf{r}_G . Штрихом будем обозначать производную по направлению ребра, а через h – длину ребра GK .

$$u_{GK}^+ = u(\mathbf{r}_G) + u'(\mathbf{r}_G)h + \frac{1}{2}u''(x_G)h^2 - \\ - \frac{1}{2}h(u'(x_G) + hu''(x_G)) = u(x_G) + \frac{1}{2}u'(x_G)h = 0.$$

Таким образом, на квадратичной функции предраспадное значение со стороны K также равно 0. Следовательно, равен нулю и численный поток (5), и правая часть равенства (4) в целом. Более подробно это доказательство см. в [7].

На неравномерных и неструктурированных сетках схемы часто обеспечивают сходимость с большей скоростью, чем это предсказывается их порядком аппроксимации (см., например, [26]). Это явление иногда называют сверхсходимостью (supra-convergence). Так, близкий ко второму порядку точности обычно показывает «линейная» схема Т. Barth (4)–(7), хотя известен пример, на котором решение по этой схеме сходится с порядком $3/2$ [27]. Для метода коррекции потоков второй порядок аппроксимации метода обеспечивает второй порядок точности, когда схема устойчива, однако при этом порядок сходимости оказывается тоже равным двум, то есть эффект сверхсходимости отсутствует. Тем не менее, в [7] было обнаружено, что сверхсходимость метода коррекции потоков наблюдается на задачах со стационарными решениями. Поэтому схема (4)–(6) при условии вычисления градиентов со вторым порядком аппроксимации была названа *стационарным методом коррекции потоков* (steady Flux Correction method).

Исследования в области аппроксимации источникового члена, если таковой содержится в уравнении, вызвало дальнейшее развитие схем на основе метода коррекции потоков: А. Pincock и А. Katz вместо (4) в [8] предложили использовать разнесённую по пространству аппроксимацию производной по времени:

$$\sum_K M_{GK} \left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_K = -\frac{1}{V_G} \sum_{K \in N_1(G)} \mathbf{h}_{GK}.$$

Здесь \mathbf{h}_{GK} – поток типа (5). Коэффициенты M_{GK} выбираются таким образом, что сохраняется второй порядок точности на произвольной неструктурированной сетке и обеспечивается третий порядок аппроксимации на трансляционно-инвариантных сетках, однако теряется консервативность. Трансляционно-инвариантными называются сетки в бесконечном пространстве, переходящие в себя при пространственной трансляции на вектор любого своего ребра. Таковыми являются равномерные сетки из параллелепипедов или их однородные разбиения на симплексы, см. рис.3. Теми же свойствами обладает схема, полученная по методике, описанной в работе Nishikawa [28]. Различные варианты определения матрицы M подытожены в [12].

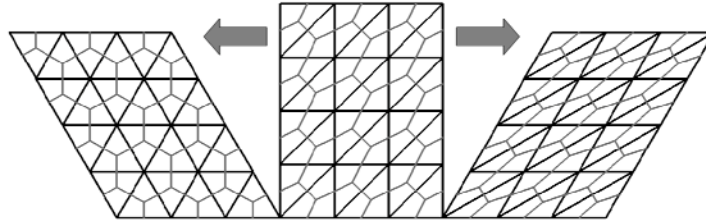


Рис.3. Треугольная трансляционно-инвариантная сетка (чёрные линии) и медианные контрольные объёмы на ней (серые линии).

В [13] автором была предложена схема UFC, представляющая собой другой алгоритм повышения точности решения нестационарных задач. Она может быть представлена в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right)_G = -\frac{1}{V_G} \sum_{K \in N_1(G)} U_{GK} \sum_{L \in N_1(K)} \mathbf{h}_{KL}.$$

Коэффициенты матрицы U_{GK} подобраны таким образом, чтобы сохранить консервативность исходной схемы и обеспечить 3-й порядок аппроксимации на трансляционно-инвариантных сетках. Второй порядок аппроксимации на неструктурированных сетках при этом, однако, теряется. В [13] описано обобщение схемы UFC для гибридной сетки (не применимое, однако, к задачам с анизотропной сеткой в пристеночном слое). Заметим, что если методом коррекции потоков получено стационарное решение, то оно является стационарным решением также и схемы UFC.

В нелинейном случае определение $\mathbf{F}_{GK}^{\pm} = \mathcal{F}(\mathbf{Q}_{GK}^{\pm}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{GK}$ ограничивает порядок аппроксимации на равномерных сетках вторым. Вместо этого в на-

стоящей работе используется реконструкция потоковых переменных, аналогичная реконструкции консервативных:

$$\mathbf{F}_{GK}^- = \mathbf{F}_G + \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot (\nabla \mathbf{F})_G, \quad \mathbf{F}_{GK}^+ = \mathbf{F}_K - \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot (\nabla \mathbf{F})_K,$$

где \mathbf{F} – поток в направлении $\tilde{\mathbf{n}}_{GK}$. Отметим, что в [8] была предложена альтернативная процедура

$$\mathbf{F}_{GK}^- = \mathbf{F}_G + \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \right)_G (\nabla \mathbf{Q})_G, \quad \mathbf{F}_{GK}^+ = \mathbf{F}_K - \frac{\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G}{2} \cdot \left(\frac{d\mathbf{F}}{d\mathbf{Q}} \right)_K (\nabla \mathbf{Q})_K,$$

не требующая вычисления градиентов от потоковых переменных и за счёт этого немного снижающая вычислительную стоимость.

4. Вычисление градиентов

Ключевое место в схемах на основе метода коррекции потоков занимает процедура вычисления градиентов от физических переменных в сеточных узлах не менее чем со вторым порядком аппроксимации. Хорошо известны две процедуры, отвечающие этому требованию.

Наиболее простым способом вычисления узлового градиента со вторым порядком является вычисление градиента от интерполяционного многочлена, полученного методом наименьших квадратов (Least Squares method, LSM). Пусть требуется вычислить градиент в узле G . В качестве шаблона выбирается, например, совокупность узлов, соединённых с узлом G не более чем двумя рёбрами. Этот метод обладает двумя критическими недостатками. Во-первых, возможно вырождение системы уравнений нахождение коэффициентов многочлена. Легко создать такую сетку искусственно; на практике же это иногда случается в граничных или приграничных узлах, где соседей 2-го порядка меньше, чем для внутренних узлов. Во-вторых, в пристеночных областях для моделирования высокорейнольдсовых течений используется анизотропная сетка. Если граница области криволинейная, то построение интерполяционных полиномов методом наименьших квадратов было бы корректным, если бы базисные функции были полиномами от переменных в криволинейной, связанной с границей системе координат. Если же использовать многочлены в декартовых координатах, то такой подход может приводить к очень большому числу обусловленности системы и, как следствие, катастрофическим ошибкам.

Чтобы избежать этих проблем, в [8] предложено вычислять градиенты по спектральным элементам. В этом случае расчётная сетка должна представлять собой результат однократного естественного (см. рис.1) измельче-

ния некоторой другой расчётной сетки, элементы которой называются спектральными. Если измельчение проводилось в k раз по линейному размеру, то спектральные элементы называются элементами k -го порядка. Спектральный треугольный элемент 2-го порядка содержит 6 узлов, что позволяет на них однозначно определить многочлен вида $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ по значениям переменных в узлах. Четырёхугольный спектральный элемент 2-го порядка содержит 9 узлов, что позволяет однозначно определить многочлен вида $ax^2y^2 + bx^2y + cx^2 + dxy^2 + exy + fx + gy^2 + hy + k$. Аналогично, спектральный тетраэдральный элемент 2-го порядка содержит 10 узлов, пирамидальный – 14 узлов, призматический – 18 узлов, гексаэдральный – 27 узлов, что также позволяет однозначно определить многочлен с соответствующим набором одночленов [14]. Определив многочлен, можно определить и градиент от него. Далее, градиент в узле определяется как среднее от градиентов в этом узле по всем спектральным элементам, содержащим этот узел, с весом, равным объёму спектрального элемента. В [8] показано, что использование спектральных элементов 3-го порядка приводит к неустойчивости около границ расчётной области, поэтому нужно использовать спектральные элементы именно 2-го порядка.

Метод вычисления градиентов с использованием спектральных элементов имеет два недостатка. Во-первых, расчётная сетка обязательно должна быть получена измельчением другой, «спектральной» сетки. В области с криволинейной границей процедура измельчения сетки содержит технические трудности, связанные с тем, что граничные узлы измельчённой сетки должны быть смещены с рёбер и граней «спектральной» сетки на границу истинной расчётной области. При наличии анизотропного пристеночного слоя такое смещение может привести к выворачиванию элементов и поэтому потребовать смещения и части внутренних узлов. Во-вторых, на равномерной сетке схема получается неоднородной: часть сеточных узлов являются вершинами спектральных элементов, а часть – не являются таковыми, и поэтому в них по-разному вычисляются градиенты.

Несмотря на указанные выше недостатки, метод вычисления градиентов по спектральным элементам (быть может, с использованием strand-технологии) к настоящему моменту казался оптимальным. Однако, как будет показано ниже, неоднородность схемы, вызванная неоднородным способом вычисления градиентов, может приводить к частичному исчезновению численной диссипации и, как следствие, некорректному поведению решения.

5. Тестирование: линейная задача с периодическими условиями

Рассмотрим модельную задачу для уравнения переноса $\partial u/\partial t + \partial u/\partial x = 0$ с начальными условиями $u(0, x) = \exp(-\alpha x^2)$ при $\alpha = \ln 2 / (0.03)^2$ и периодическими граничными условиями $u(t, -1/2) = u(t, 1/2)$. В качестве меры ошибки выберем максимум модуля разности численного решения на момент времени $T_{\max} = 20$ и точного решения на этот момент времени.

Будем использовать расчётную сетку с шагами $h_{1/2} = h_{3/2} = h_{\min}$, $h_{5/2} = h_{7/2} = h_{\max}$, $h_{9/2} = h_{11/2} = h_{\min}$ и т.д., см. рис.4. Обозначим $K = h_{\max}/h_{\min}$, $h = (h_{\max} + h_{\min})/2$.



Рис.4. Расчётные сетки для одномерных тестов. Сверху вниз: $K=1$, $K=1.2$, $K=2$.

Для интегрирования по времени будем использовать метод Рунге–Кутты 5-го порядка точности с CFL=0.5. Будем использовать следующие схемы на основе метода коррекции потоков: 1) стационарный метод коррекции потоков (2-го порядка точности), 2) неконсервативная модификация Nishikawa [26], 3) неконсервативная модификация Pincock [25], 4) схема UFC. Для схемы UFC рассматривается два способа вычисления градиентов: путём дифференцирования интерполяционного многочлена Лагранжа 2-го порядка и с использованием спектральных элементов; для остальных схем используется только первый вариант. Результаты сопоставим с полученными по схемам EBR3 и SEBR5 [4].

Результаты всех расчётов на равномерных сетках и неравномерных сетках при $K=1.2$ и $K=2$ сведены на рис.5. На равномерной сетке результаты по схеме UFC накладываются на метод Pincock. Анализируя результаты, можно сделать следующие выводы.

1. На всех сетках, включая равномерную, стационарный метод коррекции потоков показывает второй порядок точности. Использование неконсервативных схем с нестационарным членом в форме как Nishikawa [28], так и Pincock [8], улучшает порядок точности до 3-го, причём использование нестационарного члена в форме Nishikawa обеспечивает в несколько раз меньшую величину численной ошибки.

2. На равномерных сетках, как и ожидалось, схемы EBR3 и SEBR5 показывают, соответственно, 3-й и 5-й порядок точности. Схема UFC с 3-точечной аппроксимацией градиента обладает третьим порядком точности. Использование спектральных элементов для вычисления градиентов позволяет получить четвёртый порядок точности. Объяснение этого факта непро-

стое и будет изучено в дальнейшем. Четвёртый порядок точности на равномерной сетке, с одной стороны, обеспечивает более высокую точность, но, с другой стороны, вызывает опасения, поскольку старший член (член 4-го порядка) накапливаемой со временем ошибки – фазовый, а не диссипативный.

3. На неравномерных одномерных сетках все варианты схемы UFC, схемы EBR3 и SEBR5 обладают 1-м порядком аппроксимации и 2-м порядком точности. Однако величины численной ошибки существенно меньше, чем у стационарного метода коррекции потоков, обладающего 2-м порядком аппроксимации.

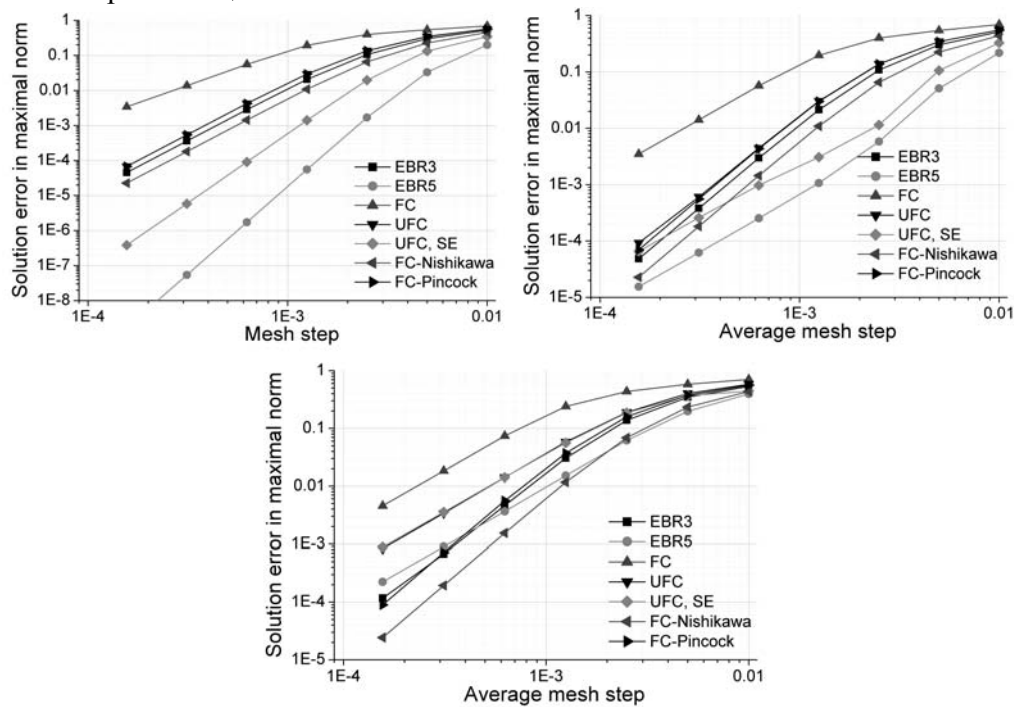


Рис.5. Точность различных FC- и EBR-схем на одномерном уравнении переноса. а) равномерная сетка, б) неравномерная сетка с $K=1.2$, в) неравномерная сетка с $K=2$.

Результаты тестирования на многомерных линейных задачах с периодическими условиями читатель может найти в [13]. На неструктурированной сетке оба способа вычисления градиентов – при помощи спектральных элементов и на основе метода наименьших квадратов – как и в случае одномерной неравномерной сетки, дают близкие результаты. На трансляционно-инвариантной сетке использование спектральных элементов даёт более точные результаты, но, в отличие от одномерного случая, не приводит к повышению порядка точности до четвёртого.

6. Тестирование: потенциальное обтекание сферы

Теперь рассмотрим задачу о потенциальном обтекании сферы. Расчёт будем проводить в рамках уравнений Эйлера для идеального газа при числе Маха фонового потока $M = 0.01$. Расчёт проводится во внешности сферы радиуса $R = 0.5$ с центром в начале координат; внешние границы расчётной области удалены достаточно далеко, чтобы они не влияли на решение. На поверхности сферы ставятся условия непротекания. В начальный момент времени задаётся однородный поток, он же держится на внешних границах расчётной области. Точное решение задачи при использовании гидродинамического обезразмеривания в пренебрежении членами порядка $O(M^4)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u &= 1 - R^3(3x^2 - r^2) / r^5; \\ v &= -3R^3xy / (2r^5); \\ w &= -3R^3xz / (2r^5); \\ p &= c^2 / \gamma + p', \quad p' = (1 - u^2 - v^2 - w^2) / 2; \\ \rho &= 1 + p' / c^2, \end{aligned}$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а $c = \sqrt{\gamma \bar{p} / \bar{\rho}}$ – скорость звука в невозмущённом потоке.

Хорошо известно, что при обтекании цилиндра в двумерной постановке может устанавливаться не только безциркуляционное обтекание, но и циркуляционное обтекание с любой величиной циркуляции (см., например, [29]). Аналогичный эффект имеет место и при обтекании сферы. Чтобы избежать этого, расчётная сетка с характерным шагом h строилась следующим образом. Вначале в четверти расчётной области ($y > 0, z > 0$) строилась сетка, имеющая характерную длину ребра $2h$ на поверхности сферы и разбег с коэффициентом 1.5. Затем сетка отражалась относительно плоскостей $y = 0$ и $z = 0$. После этого сетка измельчалась вдвое, чтобы иметь спектральные элементы, и узлы, которые должны лежать на поверхности сферы, смещались на неё. Можно считать, что после измельчения коэффициент разбега сетки от границы становился равным $\sqrt{1.5}$. Однако расчёты показали, что, несмотря на симметричность сетки, арифметическая погрешность накапливалась со временем и приводила к нарушению симметричности течения. Поэтому на каждом шаге по времени течение искусственно симметризовалось.

Для более оптимального выбора численной диссипации вместо решения задачи о распаде разрыва по формуле (5) использовалась схема Роу с предобуславливателем Е. Turkel [30], см. также [6, 31].

Результаты расчётов в сечении $z=0$ при $y>0$ на сетке с $h=0.04$ приведены на рис.6. Тонкими чёрными линиями отмечены изолинии точного, а серыми толстыми – численного решения для p' . Поток направлен слева направо. Поскольку численное решение стационарное, расчёты по схеме UFC дали бы в точности тот же результат, что и при помощи стационарного метода коррекции потоков, и поэтому не проводились.

Видно, что на передней стороне сферы изолинии точного и численного решений накладываются друг на друга, а на задней стороне сферы численное решение по давлению несколько меньше точного. Это является обычным результатом численной диссипации. Опыт автора показывает, что в этой задаче определяющую роль играет диссипация в одной-двух слоях ячеек вблизи сферы. Из рис.6 видно, что у схемы SEBR5 диссипация меньше, чем у метода коррекции потоков с полиномиальными градиентами (FC-poly), но больше, чем у метода коррекции потоков с градиентами по спектральным элементам (FC-SE). Более подробные результаты расчётов на последовательности сеток приведены в табл.1.

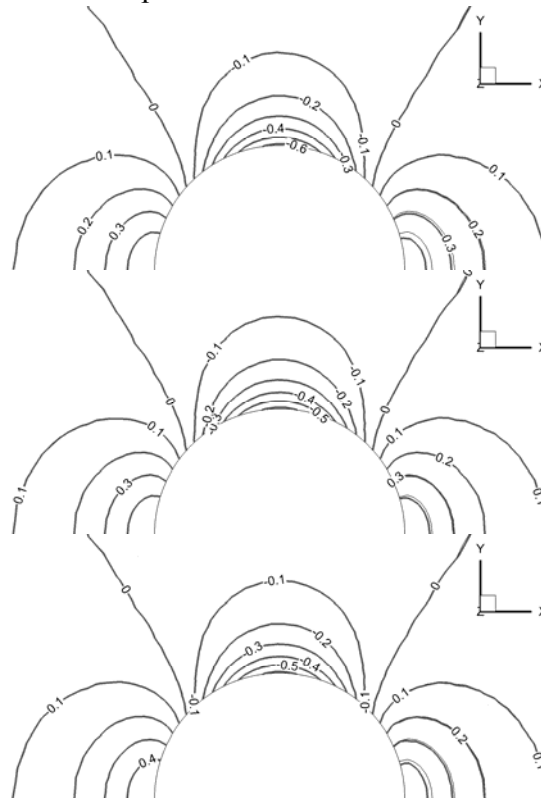


Рис.6. Изолинии пульсации давления в сечении $z=0$, $y>0$ на сетке с $h=0.04$ в сравнении с точным решением. Сверху вниз: FC с полиномиальными градиентами, FC с градиентами по спектральным элементам, EBR5.

Таблица 1. Численная ошибка решения задачи об обтекании сферы.

h	Схема	CD (точное знач. 0)	ρ' на передней и задней точках сферы (точное значение $5 \cdot 10^{-5}$)		макс. ошибка по ρ'	макс. ошибка по u	макс. ошибка по v
0.04	FC-SE	$7.49 \cdot 10^{-4}$	$5.060 \cdot 10^{-5}$	$4.614 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-2}$	$2.57 \cdot 10^{-2}$	$3.86 \cdot 10^{-2}$
	FC-poly	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$5.031 \cdot 10^{-5}$	$4.450 \cdot 10^{-5}$	$4.05 \cdot 10^{-2}$	$5.11 \cdot 10^{-2}$	$5.59 \cdot 10^{-2}$
	SEBR5	$1.87 \cdot 10^{-3}$	$4.959 \cdot 10^{-5}$	$4.540 \cdot 10^{-5}$	$3.37 \cdot 10^{-2}$	$3.78 \cdot 10^{-2}$	$4.93 \cdot 10^{-2}$
0.02	FC-SE	$1.49 \cdot 10^{-4}$	$5.023 \cdot 10^{-5}$	$4.930 \cdot 10^{-5}$	$7.63 \cdot 10^{-3}$	$1.31 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-2}$
	FC-poly	$1.70 \cdot 10^{-4}$	$5.013 \cdot 10^{-5}$	$4.861 \cdot 10^{-5}$	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$	$2.03 \cdot 10^{-2}$
	SEBR5	$3.47 \cdot 10^{-4}$	$4.982 \cdot 10^{-5}$	$4.845 \cdot 10^{-5}$	$1.17 \cdot 10^{-2}$	$1.48 \cdot 10^{-2}$	$2.47 \cdot 10^{-2}$
0.01	FC-SE	$3.48 \cdot 10^{-5}$	$5.019 \cdot 10^{-5}$	$5.146 \cdot 10^{-5}$	$1.30 \cdot 10^{-2}$	$1.99 \cdot 10^{-2}$	$8.86 \cdot 10^{-2}$
	FC-poly	$1.52 \cdot 10^{-5}$	$5.019 \cdot 10^{-5}$	$5.021 \cdot 10^{-5}$	$6.01 \cdot 10^{-3}$	$6.42 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$
	SEBR5	$3.67 \cdot 10^{-5}$	$4.997 \cdot 10^{-5}$	$4.977 \cdot 10^{-5}$	$5.94 \cdot 10^{-3}$	$6.48 \cdot 10^{-3}$	$8.68 \cdot 10^{-3}$

Из табл.1 видно, что решение по методу коррекции потоков с полиномиальными градиентами и по схеме SEBR5 сходится к точному примерно со скоростью $O(h)$. Первый порядок сходимости по максимумам ошибки связан с потерей точности рёберных схем на границе. Более высокая скорость сходимости коэффициента сопротивления является неожиданным результатом. Однако при использовании градиентов по спектральным элементам решение вблизи задней точки сферы оказывается неверным. Поскольку заниженное давление вблизи задней точки сферы обычно является следствием избыточной численной вязкости, можно предположить, что завышенная плотность является следствием недостаточной численной вязкости.

7. Тестирование: гладкий двумерный вихрь

Теперь рассмотрим задачу о двумерном стационарном вихре в рамках уравнений Эйлера. Профиль азимутальной скорости был задан в виде $u_\phi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r}{r^2 + a^2}$. Давление и плотность определялись из условия стационарности вихря $\partial p / \partial r = \rho u_\phi^2 / r$ и постоянства энтропии с учётом граничных условий на бесконечности $\rho_\infty = 1$, $p_\infty = 1/\gamma$. Поскольку циркуляция $\Gamma(r) = 2\pi r u_\phi(r) = \Gamma(1 - a^2/(r^2 + a^2))$ является монотонно возрастающей функцией, по критерию Рэлея [32] это вихрь устойчив к радиальным возмущениям. Радиус вихря был задан равным $a = 0.001$, а циркуляция на бесконечности – $\Gamma = 0.0005$, что соответствует максимальной окружной скорости вихря $u_{\phi, \max}(r) \approx 0.0398$.

Расчёты проводились на последовательности из пяти расчётных сеток. Сетка строилась при помощи генератора GMSH [33] следующим образом. В круге радиуса a строилась квазиравномерная неструктурированная треугольная сетка с характерной длиной ребра $2h$, где $h = a/N$, и N – условное

количество узлов на радиус вихря. Далее в круге радиуса $10a$ шаг сетки увеличивался с коэффициентом 1.05 и ограничивался размером $5h$. Вне этого круга шаг увеличивался с коэффициентом 1.2 без ограничения на максимальный шаг. Полученная при этом сетка измельчалась естественным образом (каждый треугольник делился на четыре).

Внешняя граница расчётной области – куба со стороной 2 – удалена достаточно далеко от области интереса. На ней держались все физические переменные в соответствии с точным решением.

Результаты расчётов на момент времени $t_{\max} = 0.02$ сведены в табл.2. «no data» означает, что расчёт не проводился.

Таблица 2. Численная ошибка решения задачи о покоящемся вихре.

Тип ошибки	Количество узлов на радиус вихря	Steady FC, SE	Steady FC, poly	UFC, SE	UFC, poly	EBR3	EBR5
Макс. ошибка по давлению	5	$6.12 \cdot 10^{-5}$	$1.51 \cdot 10^{-4}$	$6.11 \cdot 10^{-5}$	$1.66 \cdot 10^{-4}$	$1.84 \cdot 10^{-4}$	$9.88 \cdot 10^{-5}$
	10	$1.31 \cdot 10^{-5}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$1.32 \cdot 10^{-5}$	$2.31 \cdot 10^{-5}$	$4.43 \cdot 10^{-5}$	$2.21 \cdot 10^{-5}$
	20	$2.48 \cdot 10^{-6}$	$2.99 \cdot 10^{-6}$	$2.45 \cdot 10^{-6}$	$2.47 \cdot 10^{-6}$	$6.92 \cdot 10^{-6}$	$6.44 \cdot 10^{-6}$
	40	$4.25 \cdot 10^{-7}$	$3.81 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^{-7}$	$3.79 \cdot 10^{-7}$	$1.82 \cdot 10^{-6}$	$1.91 \cdot 10^{-6}$
	80	$1.12 \cdot 10^{-7}$	$1.05 \cdot 10^{-7}$	$9.85 \cdot 10^{-8}$	$9.07 \cdot 10^{-8}$	$5.61 \cdot 10^{-7}$	$5.62 \cdot 10^{-7}$
Макс. ошибка по скорости u	5	$5.37 \cdot 10^{-4}$	$2.20 \cdot 10^{-3}$	$5.24 \cdot 10^{-4}$	$2.48 \cdot 10^{-3}$	$2.63 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-4}$
	10	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$3.39 \cdot 10^{-4}$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$3.61 \cdot 10^{-4}$	$5.71 \cdot 10^{-4}$	$2.08 \cdot 10^{-4}$
	20	$1.59 \cdot 10^{-5}$	$4.88 \cdot 10^{-5}$	$1.59 \cdot 10^{-5}$	$4.36 \cdot 10^{-5}$	$8.77 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-5}$
	40	$4.08 \cdot 10^{-6}$	$5.43 \cdot 10^{-6}$	$3.98 \cdot 10^{-6}$	$5.39 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$1.48 \cdot 10^{-5}$
	80	$8.51 \cdot 10^{-7}$	$8.50 \cdot 10^{-7}$	$8.55 \cdot 10^{-7}$	$8.54 \cdot 10^{-7}$	$2.87 \cdot 10^{-6}$	$3.22 \cdot 10^{-6}$

Анализируя результаты расчётов, можно сделать следующие выводы. Во-первых, результаты расчётов, полученные по схеме UFC, почти не отличаются от результатов, полученных при помощи стационарного метода коррекции потоков при использовании тех же градиентов. Этот результат ожидаем, поскольку точное решение задачи является стационарным. Во-вторых, порядок точности схемы FC лежит между 2 и 3. Это также ожидаемо, поскольку стационарный метод коррекции потоков обладает 2-м порядком аппроксимации; повышенная наблюдаемая скорость сходимости (до 3-го порядка) на стационарных задачах также наблюдалась ранее [7–9]. В-третьих, метод коррекции потоков обеспечивает меньшую от 1 до 4 раз ошибку при использовании градиентов, основанных на спектральных элементах, чем при использовании полиномиальных градиентов. Этот результат выше наблюдался на примере одномерного уравнения переноса. В-четвёртых, схема EBR5 на грубых сетках превосходит по точности не толь-

ко схему EBR3, но и схему FC с полиномиальными градиентами, однако на подробных сетках результаты по схемам EBR3 и EBR5 близки и существенно хуже, чем даваемые методом коррекции потоков. Этот эффект связан с преобладанием для схем EBR ошибки, пропорциональной второй производной от решения; эта составляющая хаотически меняется от узла к узлу, ограничена константой, не растущей со временем, но при малых временах счёта она преобладает и на неструктурированных сетках убывает медленнее всего при измельчении сетки. В одномерном случае анализ структуры ошибки проведён в [34].

Подводя итог, на проведённом тесте наилучший результат обеспечивает метод коррекции потоков с использованием спектральных элементов. Однако сравнительная характеристика схем изменится, если мы увеличим время счёта: вместо $t_{\max} = 0.02$ будем проводить расчёт до $t_{\max} = 1$. Проведение тестов в этой постановке на последовательности сеток потребовало бы существенных временных затрат, поэтому ограничимся сеткой с разрешением 20 узлов на радиус вихря. Результаты расчётов по схеме EBR и FC с полиномиальными градиентами показывают разглаживание профиля азимутальной скорости, то есть численную диссипацию вихря. Этот результат является физически корректным; если диссипация является избыточной, она может быть уменьшена измельчением сетки и, в некоторой степени, уменьшением параметра δ в формуле (5).

Иная картина получается при расчёте по схемам FC и UFC с градиентами по спектральным элементам. Вначале возникает радиальная неустойчивость: профиль азимутальной скорости приобретает паразитные осцилляции, экспоненциально нарастающие со временем, и к $t \sim 0.7$ они становятся заметны на фоне начального вихря, см. рис.7. Примерно при $t \sim 0.9$ становится отчётливо видно нарушение осевой симметрии течения, и к $t \sim 1$ ядро вихря полностью разрушается. К моменту времени $t \sim 4$ решение практически полностью «забывает» своё начальное состояние. Результаты по схемам FC и UFC в целом совпадают, немного меняется лишь момент развала вихря.

Таким образом, специфический характер диссипации 4-го порядка, присущий схеме UFC-SE и наблюдавшийся выше на линейных задачах, на задаче о вихре приводит к неверному решению, хотя оно и не «разваливается» в привычном понимании при возникновении неограниченно растущих численных осцилляций. Поскольку на стационарных задачах дополнительные диссипативные члены, присущие стационарному методу коррекции потоков, зануляются, эта схема обладает тем же недостатком. Вероятно, эта проблема является неустранимым недостатком вычисления градиентов, основанных на спектральных элементах второго порядка. При использовании

спектральных элементов 3-го или более высокого порядка во внутренних узлах этого эффекта не наблюдается, однако, как было отмечено в [8], возникает неустойчивость на границе расчётной области.

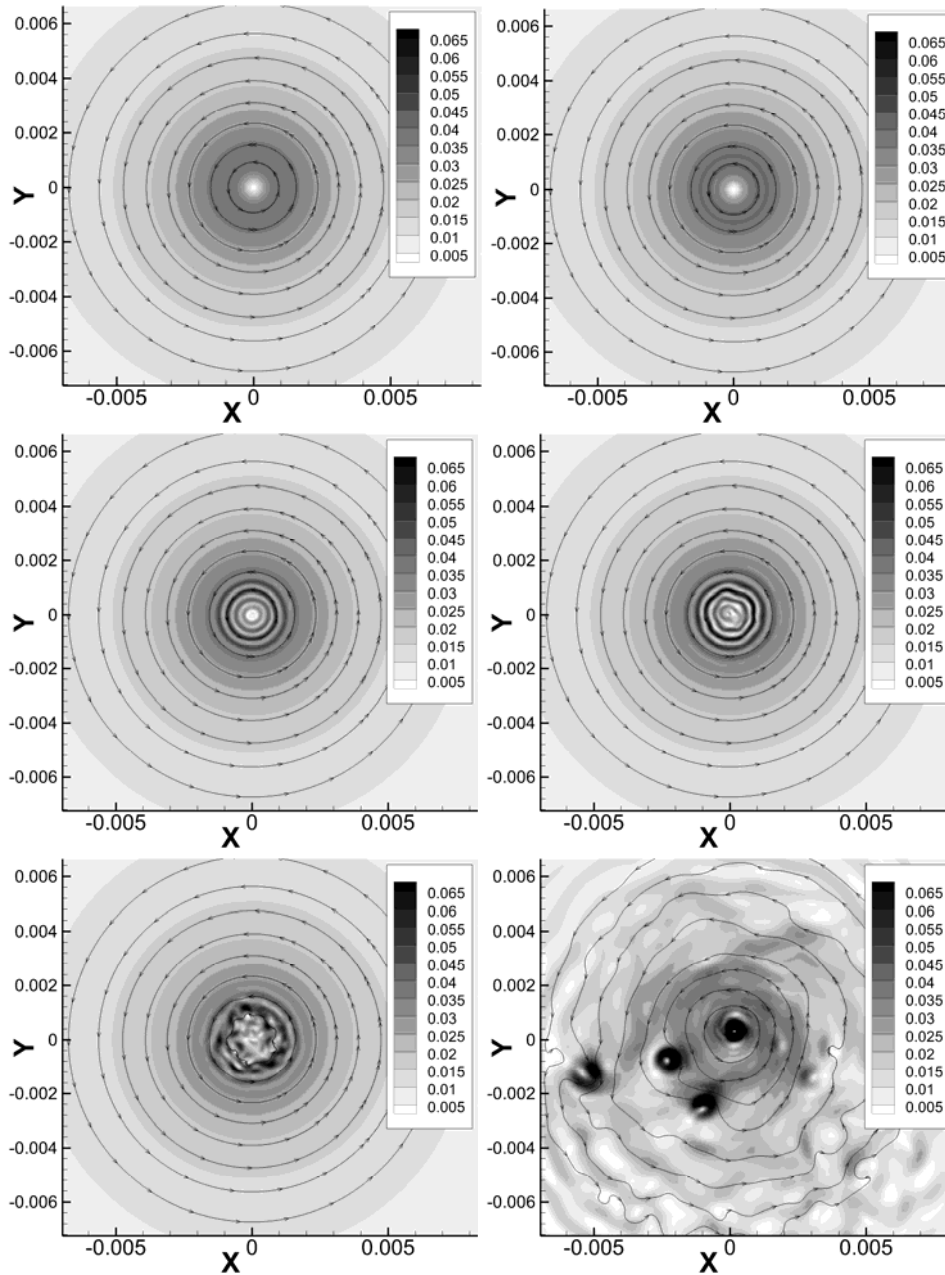


Рис.7. Распад вихря при расчёте по схеме FC с градиентами по спектральным элементам. Сверху вниз и слева направо: $t = 0.5$, $t = 0.7$, $t = 0.9$, $t = 0.95$, $t = 1.0$, $t = 3.0$. Цвет соответствует модулю скорости.

8. Задачи с разрывными решениями

Поскольку основное развитие метода коррекции потоков было направлено на создание неконсервативной схемы для гладких нестационарных решений, показывающей третий порядок точности на неструктурированных сетках [8–12], вопросу применимости метода коррекции потоков для решения задач с разрывными решениями уделялось мало внимания. В этом направлении можно отметить работу [11]; в ней рассматриваются стационарные задачи, на которых метод коррекции потоков является консервативным.

Для решения задач с разрывами в методе коррекции потоков используются ограничители наклона, так же, как и в других рёберно-ориентированных схемах. Они заключаются в том, что в (6) значения α_{GK} и α_{KG} выбираются меньшими 1. В [11] был предложен ограничитель

$$\alpha_{GK} = 1 - \left| \frac{u_K - u_G}{\max\{|u_K| + |u_G|, 10^{-20}\}} \right|^3, \quad u_i = 2(\mathbf{r}_K - \mathbf{r}_G) \cdot (\nabla \mathbf{Q})_i - (\mathbf{Q}_K - \mathbf{Q}_G). \quad (8)$$

Также рассмотрим другой ограничитель:

$$\alpha_{GK} = 1 - \left| \max\{l_K, l_G\} \right|^3, \quad l_i = \frac{(u_K - u_G) - (\partial u / \partial e)_G}{\max\{|u_K - u_G| + |(\partial u / \partial e)_G|, 10^{-20}\}}, \quad (9)$$

где $(\partial u / \partial e)_G$ – это производная по направлению ребра GK , умноженная на длину этого ребра и рассчитанная с использованием данных в узле G и значения, интерполированного на продолжение этого ребра по аналогии со схемой EBR3 [4]. Хотя в [11] ограничитель предлагается применять к консервативным переменным \mathbf{Q} , мы будем применять (8) и (9) к характеристическим переменным \mathbf{SQ} , где матрица \mathbf{S} определена (2). Подробное описание такой реконструкции характеристических переменных см. в [5].

В этом разделе мы ограничимся двумя тестами. В качестве первого теста выберем задачу об обтекании прямого уступа в канале сверхзвуковым потоком [35]. Начальными данными является однородный поток с параметрами $\rho = 1.4$, $p = 1$, $u = 3$, $v = 0$. Расчёт проводится до времени $t_{\max} = 4$. Будем проводить расчёты этой задачи на очень подробной неструктурированной сетке, а именно, с характерным шагом $h = 1/320$, чтобы можно было наиболее явно увидеть преимущество схем более высокой точности. Сетка построена генератором GMSH [33].

На рис.8 представлены результаты расчётов по схемам EBR-minmod, FC с ограничителями (8) и (9) и EBR-WENO. Во всех расчётах для их стабилизации использовалось переключение на поток Русанова на рёбрах, хотя бы один узел которых лежит на границе. Для схемы EBR-WENO была включена искусственная вязкость с искусственной теплопроводностью [36].

Из рисунка видно, что ограничитель (9) позволяет добиться меньшей искусственной диссипации на контактном разрыве в верхней части расчётной области, чем ограничитель (8).

Теперь рассмотрим задачу с бесконечно гладким решением, чтобы оценить влияние ограничителей. Выберем фоновое поле $\bar{\rho} = 1, \bar{\mathbf{u}} = 0, \bar{p} = 1/\gamma$ и наложим на него пульсации, в начальный момент времени равные

$$\rho'(0, \mathbf{r}) = p'(0, \mathbf{r}) = 10^{-4} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_{ijk} \exp \left(-\ln 2 \left(\frac{\mathbf{r} - 12.5(i\mathbf{e}_x + j\mathbf{e}_y + k\mathbf{e}_z)}{6} \right)^2 \right),$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ – единичные векторы по соответствующим направлениям, а $p_{ijk} = 1$, если $(i+j+k)$ – чётное, и 0 иначе.

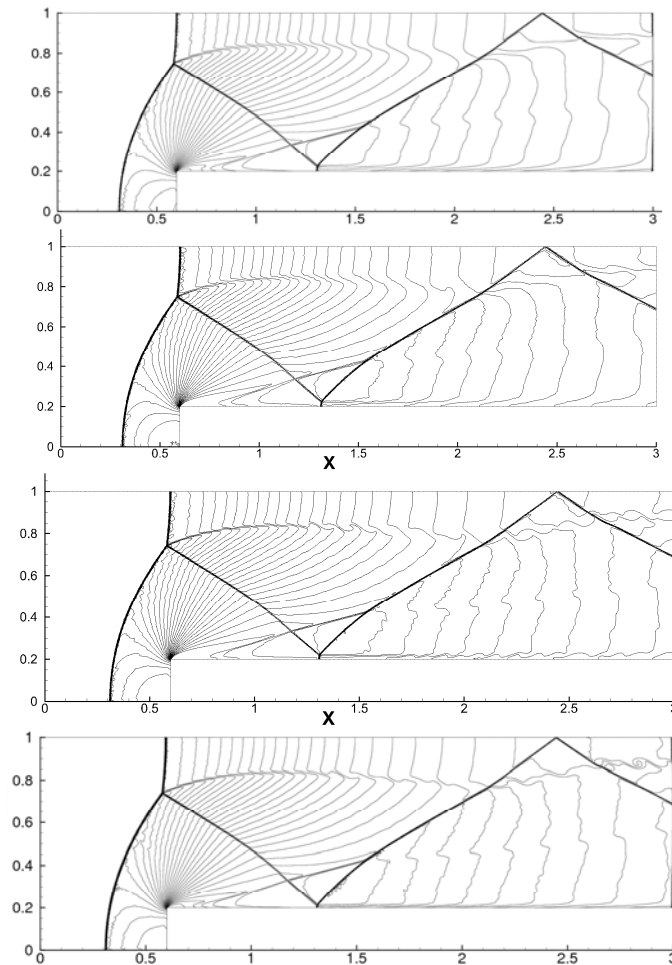


Рис.8. Решение задачи об обтекании уступа в канале на неструктурированной сетке. Сверху вниз: EBR-minmod, FC с ограничителем (8), FC с ограничителем (9), EBR-WENO5.

Расчёт проведём в кубе с ребром 25 и периодическими условиями по всем направлениям до времени $t_{\max}=20$. Ограничимся случаем декартовой сетки. Результаты сведены в табл.3. Видно, что предложенный ограничитель в среднем позволяет добиться на 30-40% меньшей ошибки, чем (8), однако результат остаётся в разы хуже, чем полученный по схеме EBR-WENO5.

Таблица 3. Численная ошибка решения акустической задачи на декартовой сетке.

Тип ошибки	Шаг сетки	Steady FC, ограничитель (8)	Steady FC, ограничитель (9)	UFC, ограничитель (8)	UFC, ограничитель (9)	EBR-WENO5
Макс. ошибка по давлению	1	$5.59 \cdot 10^{-6}$	$4.01 \cdot 10^{-6}$	$6.92 \cdot 10^{-6}$	$4.76 \cdot 10^{-6}$	$3.08 \cdot 10^{-7}$
	0.5	$1.50 \cdot 10^{-6}$	$1.05 \cdot 10^{-6}$	$1.44 \cdot 10^{-6}$	$1.06 \cdot 10^{-6}$	$1.86 \cdot 10^{-8}$
	0.25	$6.38 \cdot 10^{-7}$	$8.37 \cdot 10^{-7}$	$9.71 \cdot 10^{-7}$	$3.72 \cdot 10^{-7}$	$4.34 \cdot 10^{-9}$

9. Заключение

В настоящей работе рассмотрены различные модификации метода коррекции потоков. Особое внимание было уделено способу вычисления градиентов в сеточных узлах со вторым порядком аппроксимации.

На линейных задачах было замечено, что нестационарный метод коррекции потоков при использовании градиентов, рассчитанных с использованием спектральных элементов, даёт меньшую численную ошибку в сравнении с другими модификациями и другими рёберно-ориентированными схемами. Но за кажущимся повышением точности скрывается потеря диссипации и, как следствие, ошибочность решения. В частности, на вихре, который должен быть устойчивым к радиальным возмущениям, эти возмущения нарастают и, в конечном счёте, приводят к разрушению вихря.

Если же использовать градиенты от интерполяционных полиномов, построенных методом наименьших квадратов, то многочисленные эксперименты показывают, что нестационарный метод коррекции потоков даёт результаты, очень близкие к рассчитанным по схеме EBR5. Вычислительная стоимость этих схем также сопоставима: время, затрачиваемое на один шаг у метода коррекции потоков, в 0.85–1.5 раза выше, чем у EBR5. Это значение варьируется в зависимости от модификаций; замеры проводились при решении двумерных уравнений Эйлера.

Проведённые выше расчёты задачи об обтекании прямого уступа показывают, что метод коррекции потоков полностью совместим с ограничителями наклонов и с их помощью успешно справляется с задачами с разрывными решениями. Но на гладких решениях использование этих ограничителей сказывается на точности сильнее, чем в схемах с квазиодномерной реконструкцией. Численная ошибка, полученная методом коррекции потоков

с различными ограничителями, лишь немногим лучше схемы с ограничителем MinMod. Ещё большую точность даёт схема EBR-WENO. Таким образом, на задачах с разрывными решениями схемы с квазиодномерной реконструкцией предпочтительнее.

Основной задачей, стоявшей перед настоящей работой, являлось решение вопроса о выборе основной рёберно-ориентированной схемы, используемой для расчётов в программном коде NOISEtte [37]. Проведённые расчёты тестовых задач позволяют сделать вывод о том, что в настоящее время такой схемой стоит считать схему семейства EBR. Возможно, у метода коррекции потоков есть дальнейший потенциал развития в направлении неконсервативных схем. Этот вопрос является темой дальнейшего исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *B. Stoufflet, J. Periaux, F. Fezoui, A. Dervieux.* Numerical simulation of 3-D hypersonic Euler flows around space vehicles using adapted finite elements // AIAA Paper No. 87-0560.
2. *T.J. Barth.* Numerical aspects of computing high Reynolds number flows on unstructured meshes // AIAA Paper No. 91-0721.
3. *B. Koobus, F. Alauzet, A. Dervieux.* Numerical algorithms for unstructured meshes, In Book: Computational Fluid Dynamics, F. Magoules (Editor), CRC Press, 2011, p.131-203.
4. *I. Abalakin, P. Bakhvalov, T. Kozubskaya.* Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes // International journal for numerical methods in fluids, 2016, v.81, №6, p.331–356.
5. *Pavel Bakhvalov, Tatiana Kozubskaya.* EBR-WENO scheme for solving gas dynamics problems with discontinuities on unstructured meshes // Comput. Fluids, 2017, 157, p.312-324.
6. *И.В. Абалакин, В.Г. Бобков, Т.К. Козубская.* Разработка метода расчета течений с малыми числами Маха на неструктурированных сетках в программном комплексе NOISEtte // Матем. моделирование, 2017, т.29, № 4, с.101-112;
Ilya Abalakin, Vladimir Bobkov, Vladimir Kozubskaya. Implementation of the Low Mach Number Method for Calculating Flows in the NOISEtte Software Package // Math. Mod. and Comp. Simul., 2017, 9(6), p.689-697.
7. *A. Katz, V. Sankaran.* An efficient correction method to obtain a formally third-order accurate flow solver for node-centered unstructured grids // J. Sci. Comput., 2012, 51 (2), p.375–393.
8. *B. Pincock, A. Katz.* High-order flux correction for viscous flows on arbitrary unstructured grids // J. Sci. Comput., 2014, 61 (2), p.454–476.
9. *C.D. Work, A.J. Katz.* Aspects of the flux correction method for solving the Navier–Stokes equations on unstructured meshes // AIAA paper No.2015-0834.
10. *A. Katz, D. Work.* High-order flux correction/finite difference schemes for strand grids // Journal of Computational Physics, 2015, 282, p.360–380.
11. *O. Tong, Y. Yanagita, R. Shaap, S. Harris, A. Katz.* High-Order strand grids methods for shock-turbulence interaction // AIAA paper No. 2015-2283.
12. *H. Nishikawa.* Accuracy-preserving Source Term Quadrature for Third-Order Edge-Based Discretization // Journal of computational physics, 2017, 344, p.595–622.

13. *P. Bakhvalov, T. Kozubskaya*. Modification of Flux Correction method for accuracy improvement on unsteady problems // *J. Comput. Phys.*, 2017, 338, p.199–216.
14. *П.А. Бахвалов*. Реализация метода коррекции потоков на гибридных неструктурированных сетках // Препринт ИПМ, 2017, №38, 28 с.
P.A. Bakhvalov. Realizatsiya metoda korrektsii potokov na gibridnyh nestrukturovannih setkah. – М.: IPM RAN, 2017, preprint №38, 28 s.
15. *T.J. Barth*. A 3-D upwind Euler solver for unstructured meshes // *AIAA Paper No 91-1548*.
16. *П.А. Бахвалов, Т.К. Козубская*. О построении реберно-ориентированных схем, обеспечивающих точность на линейной функции, для решения уравнений Эйлера на гибридных неструктурированных сетках // *ЖВММФ*, 2017, т.57, № 4, с.92-111;
Pavel Bakhvalov, Tatiana Kozubskaya. Construction of Edge-Based 1-Exact Schemes for Solving the Euler Equations on Hybrid Unstructured Meshes // *Comp. Math. Math. Phys.*, 2017, 57(4), p.680–697.
17. *H. Nishikawa*. Beyond Interface Gradient. A General Principle for Constructing Diffusion Schemes // *AIAA Paper No. 2010-5093*.
18. *А.Г. Куликовский, Н.В. Погорелов, А.Ш. Семенов*. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. – М: Физматлит, МАИК, Наука/Интерпериодика, 2001, 607 с.;
A.G. Kulikovskiy, Nikolai V. Pogorelov, A.Yu. Semenov. Mathematical Aspects of Numerical Solution of Hyperbolic Systems // *Taylor Francis Inc, United States (2000)*.
19. *P.L. Roe*. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes// *Journal of Computational Physics*, 1981, v.43, №2, p.357–372.
20. *H. Luo, J.D. Baumt, R. Lohner*. Edge-Based Finite Element Scheme for the Euler Equations // *AIAA Journal*, 1994, v.32, No. 6.
21. *P. Eliasson*. EDGE, a Navier-Stokes solver for unstructured grids, Tech. Rep. FOI-R-0298-SE, FOI Swedish defence research agency // *Division of Aeronautics, FFA, SE-172 90 STOCKHOLM (December 2001)*.
22. *Y. Nakashima, N. Watanabe, H. Nishikawa*. Hyperbolic Navier-Stokes solver for three-dimensional flows // *AIAA Paper No. 2016-1101*.
23. *H. Nishikawa*. Alternative formulations for first-, second-, and third-order hyperbolic Navier-Stokes schemes // *AIAA Paper No. 2015-2451*.
24. *C. Debiez, A. Dervieux*. Mixed-element-volume MUSCL methods with weak viscosity for steady and unsteady flow calculations // *Computers and Fluids*, 2000, 29 (1), p.89–118.
25. *C. Debiez, A. Dervieux, K. Mer, B. Nkonga*. Computation of unsteady flows with mixed finite volume/ finite element upwind methods // *International journal for numerical method in fluids*, 1998, 27, p.193–206.
26. *B. Diskin, J.-L. Thomas*. Notes on accuracy of finite-volume discretization schemes on irregular grids // *Applied Numerical Mathematics*, 2010, v.60, no. 3, p.224–226.
27. *П.А. Бахвалов*. О порядке точности реберно-ориентированных схем на сетках специального вида // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, 2017, № 79, 32 с.;
P.A. Bakhvalov. О порядке tochnosti reberno-orientirovannyh shem na setkah spetsial'nogo vida – М.: IPM RAN, 2017, preprint №79, 32 s.
28. *H. Nishikawa*, Divergence formulation of source term // *Journal of Computational Physics*, 2012, 231, p.6393–6400.
29. *Л.Г. Лойцянский*. Механика жидкости и газа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950;

- L.G. Loitsyansky. Mechanics of Liquids and Gases // Pergamon Press, Oxford, UK, 1966, 804 p.*
30. *E. Turkel. Preconditioning Techniques in Computational Fluid Dynamics // Annual Review of Fluid Mechanics, 1999, v.31, 385-416.*
31. *H. Guillard, C. Viozat C. On the behaviour of upwind schemes in the low Mach number limit // Computers and Fluids, 1999, v.28, №1, p.63-86.*
32. *С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, В.Л. Окулов. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003, 504 с.; S.V. Alekseenko, P.A. Kuibin, V.L. Okulov. Theory of Concentrated Vortices. Springer-Verlag. – Berlin Heidelberg: 2007. 487 p.*
33. *C. Geuzaine, J.-F. Remacle. Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, 1997.*
34. *П.А. Бахвалов. Метод нестационарного корректора для анализа точности линейных полудискретных схем // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2018, № 123, 38 с.; P.A. Bakhvalov. Metod nestatsionarnogo korrektora dlya analiza tochnosti lineinyh poludiskretnykh shem. – М.: ИПМ РАН, 2018, preprint №123, 38 s.*
35. *P. Woodward, P. Colella. The Numerical Simulation of Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks // Journal of computational physics, 1984, v.54, p.115–173.*
36. *И.Ю. Тагирова, А.В. Родионов. Применение искусственной вязкости для борьбы с «карбункул»-неустойчивостью в схемах типа Годунова // Математическое моделирование, 2015, т.27, с.47–64; I.Y. Tagirova, A.V. Rodionov. Application of the artificial viscosity for suppressing the carbuncle phenomenon in Godunov-type schemes // Math. Models. Comput. Simul., 2015; 27, p.47–64.*
37. *И.В. Абалакин, П.А. Бахвалов, А.В. Горобец, А.П. Дубень, Т.К. Козубская. Параллельный программный комплекс NOISETTE для крупномасштабных расчетов задач аэродинамики и аэроакустики // Вычислительные методы и программирование, 2012, т.13, с.110-125; I.V. Abalakin, P.A. Bakhvalov, A.V. Gorobets, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya. Parallelnyi programnyi kompleks NOISETTE dlia krupnomasshtabnykh raschetov zadach aerodinamiki i aeroakustiki // Vychislitelnye metody i programmirovaniye, 2012, t.13, s.110-125.*

Поступила в редакцию 20.08.2018

После доработки 20.08.2018

Принята к публикации 22.10.2018