

## **ВОЛНЫ В ЦЕНТРИФУГИРОВАННОМ СЛОЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ С ИНЕРЦИОННОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

© 2019 г. *И.Н. Солдатов, Н.В. Ключева*

Институт проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород  
erfv@inbox.ru, igorsdtv@yandex.ru

DOI: 10.1134/S0234087919060017

Предложена модель для описания волновых движений флотирующей вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей полость быстро вращающегося кругового цилиндра. Флотирующая жидкость – это жидкость с инерционной поверхностью, образуемой плавающими на свободной поверхности и не взаимодействующими между собой частицами, обладающими малой массой. Исследованы гироскопические волны во флотирующей жидкости, образующей центрифугированный слой на твердой стенке полости ротора.

Ключевые слова: флотирующая вязкая жидкость, устойчивость, инерционные (гироскопические) волны.

### **WAVES IN A CENTRIFUGED LAYER OF A ROTATING VISCOUS FLUID WITH AN INERTIAL SURFACE**

*I.N. Soldatov, N.V. Klyueva*

Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhny Novgorod

A model for describing wave motions of a flotation, viscous, non-compressible fluid partially filling the cavity of a rapidly rotating circular cylinder is proposed. Flotation fluid is a fluid with an inertial surface formed by small mass particles floating on a free surface without interaction. Gyroscopic waves in a centrifuged flotation fluid layer on a solid wall of the rotor cavity are studied.

Key words: flotation viscous fluid, stability, inertial (gyroscopic) waves.

### **Введение**

Для описания потенциальных волновых движений свободной поверхности жидкости с частицами твердого вещества, которые, плавая на поверхности, обладают некоторой массой и пренебрежимо мало взаимодейст-

вуют друг с другом в процессе колебаний, в работе Petters A.S. [1] была предложена модель жидкости с инерционной поверхностью, иначе называемой флотирующей жидкостью. Позднее потенциальные движения идеальной флотирующей жидкости рассматривались в работах Mandal B.N. [2], Габова С.А. с соавт. [3-6] и других. Первоначально модель жидкости с инерционной поверхностью использовалась при описании динамических явлений поверхности северных морей, покрытых сплошным ковром из крошки битого льда.

Широкий класс вихревых движений был обойден вниманием исследователей. Между тем, движение жидкости нельзя считать потенциальным в таких технических устройствах как центрифуги и сепараторы, где нередко приходится сталкиваться с флотацией легких частиц на поверхности жидкости. В роторных системах течение жидкости изначально сильно закручено.

Влияние вязкости в роторных системах оказывается очень важным. При отсутствии осевого течения жидкости вязкость может ослаблять стабилизирующую роль кориолисовой силы [7], что четко проявляется при небольших отношениях поверхностного натяжения к центробежной силе. Помимо аспекта, связанного с гидродинамической устойчивостью, есть другой, связанный с неустойчивостью всей роторной системы. Вязкость обеспечивает появление касательной компоненты силы, действующей со стороны жидкости на стенки ротора и ведущей, при определенных условиях, к возникновению неустойчивости роторной системы с жидкостью [8].

В первом разделе работы мы даём вывод неклассических граничных условий на свободной поверхности вязкой флотирующей жидкости в поле гироскопической и центробежной сил. Влиянием поверхностного натяжения и силы тяжести пренебрегаем.

Во втором разделе находим решение линеаризованной задачи о распространении инерционных волн во флотирующей жидкости, находящейся в полости равномерно вращающегося цилиндра. Для случая невязкой жидкости приводим запись дисперсионного уравнения в компактной форме.

В третьем разделе исследуем дисперсионные свойства инерционных волн, распространяющихся в центрифугированном слое вращающейся флотирующей жидкости, и даём оценку предельной погонной плотности плавающих частиц, выше которой может наблюдаться рост амплитуды нормальных мод.

## 1. Основные уравнения

1. Рассмотрим несжимаемую вязкую жидкость, образующую в невозмущенном состоянии центрифугированный слой толщины  $a - b$  на стенке

бесконечного цилиндра кругового сечения радиуса  $a$ , быстро вращающегося вокруг оси симметрии с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  (рис.1). Считая скорость вращения большой  $\Omega^2 a / g \gg 1$  ( $g$  – ускорение свободного падения), влиянием силы тяжести пренебрегаем. На свободной поверхности слоя легкие мелкие флотирующие частицы образуют тонкую пленку с плотностью распределения вещества  $\rho_s = \text{const}$  в невозмущенном состоянии.

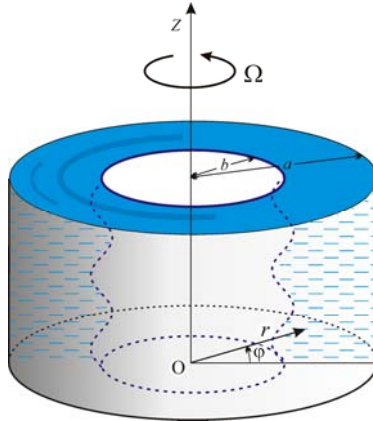


Рис. 1.

Движение несжимаемой вязкой жидкости в системе координат, вращающейся вместе с цилиндром, описывается уравнениями

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p - \frac{\rho}{2} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})^2 \right) + 2\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega} + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где  $\mathbf{v}$  – вектор скорости,  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор,  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – кинематическая вязкость.

Ниже будем использовать вращающуюся цилиндрическую систему координат  $Or\varphi z$  с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии цилиндра (и коллинеарной вектору угловой скорости  $\boldsymbol{\Omega}$ ). Размером и взаимодействием плавающих частиц будем пренебрегать, считая образуемую ими пленку на поверхности бесконечно тонкой. Влиянием поверхностного натяжения также пренебрежем.

Обозначим через  $h(t, \varphi, z)$  отклонение от свободной поверхности жидкости от значения при невозмущенном вращении жидкости как твердого тела  $r = b$ , так что уравнение возмущенной свободной поверхности запишется в виде

$$F(t, r, \varphi, z) = r - b - h(t, \varphi, z) = 0, \quad (2)$$

а кинематическое граничное условие –

$$\frac{\partial h}{\partial t} = u - \frac{v}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi} - w \frac{\partial h}{\partial z}, \quad (3)$$

где  $u, v, w$  – радиальная, азимутальная и аксиальная компоненты вектора скорости  $\mathbf{v} = (u, v, w)^T$ .

Если кинематическое условие не меняется при переходе от обычной жидкости к флотирующей, то динамическое условие претерпевает существенные изменения. При волновых движениях жидкости происходят изгибания свободной поверхности (цилиндрической в невозмущенном состоянии), сопровождающиеся, вообще говоря, изменением площади малых участков поверхности. Полагая, что эти малые участки  $\Delta S$  имеют массу, примем, что масса участков не меняется при волновой деформации поверхности:

$$\rho_s \Delta S = \rho'_s \Delta S', \quad (4)$$

где  $\rho_s$ ,  $\Delta S$  – поверхностная плотность и площадь элемента невозмущенной поверхности соответственно. Те же величины, но относящиеся к возмущенной поверхности, снабжены штрихами. Из (4) следует

$$\rho'_s = \rho_s q^{-1/2}, \quad (5)$$

где  $q$  – детерминант метрического тензора,

$$q = \left( 1 + 2 \frac{h}{b} - \frac{h_\phi^2 + h_z^2}{b^2} \right) \left( 1 + h_z^2 \right) - \left( \frac{h_\phi h_z}{b} \right)^2, \quad h_\phi = \partial h / \partial \phi, \quad h_z = \partial h / \partial z.$$

Для элемента поверхности  $\Delta S'$  из второго закона Ньютона следует

$$\rho'_s \Delta S' \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r})^2 - 2 \mathbf{v} \times \mathbf{\Omega} \right) = p_a \mathbf{n} \Delta S' + \sigma_{\mathbf{n}} \Delta S'$$

при  $F(t, r, \phi, z) = 0$ , где  $p_a$  – давление в воздушной полости,  $\sigma_{\mathbf{n}} = -p_{\mathbf{n}} + 2\mu(\mathbf{n} \nabla) \mathbf{v} + \mu \mathbf{n} \times \text{curl } \mathbf{v}$  – вектор напряжений на площадке с нормалью  $\mathbf{n}$ ,  $p$  – давление в жидкости под свободной поверхностью,  $\mu = \rho \nu$  – динамическая вязкость. Сокращая на  $\Delta S'$  и используя очевидные преобразования, включающие замену  $\mathbf{n}$  выражением  $\nabla F / |\nabla F|$ , получим динамическое граничное условие на свободной инерционной поверхности

$$\frac{\rho_s}{\sqrt{q}} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{1}{2} \nabla (\Omega \times \mathbf{r})^2 - 2\mathbf{v} \times \Omega \right) |\nabla F| =$$

$$= (p_a - p) \nabla F + 2\mu (\nabla F \cdot \nabla) \mathbf{v} + \mu \nabla F \times \text{curl } \mathbf{v},$$
(6)

где  $\nabla F = \left( 1, -\frac{1}{r} \frac{\partial h}{\partial \phi}, -\frac{\partial h}{\partial z} \right)$ .

Граничные условия на твердой стенке  $r = a$  являются математическим выражением физического условия прилипания

$$\mathbf{v} = 0. \tag{7}$$

2. Далее мы рассмотрим линеаризованную задачу. Поскольку в выбранной системе координат при твердотельном вращении жидкости скорость её частиц равна нулю, то уравнения движения после линеаризации приобретают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + 2\mathbf{v} \times \Omega + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{8}$$

Линеаризуем граничные условия и перенесем их с возмущенной свободной поверхности  $r = b + h(\phi, z, t)$  на поверхность жидкости при стационарном вращении  $r = b$ . При переносе учтем, что для малых возмущений величина  $h$  мала, невозмущенное давление является квадратичной функцией от  $r$ :  $p_0(r) = p_a + \rho_s \Omega^2 b + \rho \Omega^2 (r^2 - b^2) / 2$ . Обозначим через  $p'(t, r, \phi, z) = p(t, r, \phi, z) - p_0(r)$  – малое отклонение от давления  $p_0(r)$  при твердотельном вращении. Давление в возмущенном течении под свободной поверхностью, а также детерминант метрического тензора, можно представить в виде следующих разложений по малому параметру  $h$ :

$$p(b + h(\phi), \phi, t) = p' \Big|_{r=b} + p_a + \rho_s \Omega^2 b + \rho \Omega^2 b h(\phi, t) + o(h),$$

$$q^{1/2} = 1 + h / b + o(h).$$

Штрих далее опускаем. Без уменьшения общности  $p_a$  можно считать равным нулю.

После простых преобразований получим следующие линеаризованные динамические граничные условия на поверхности  $r = b$ :

$$\rho_s \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \right) = -p - (2\rho_s + \rho b) \Omega^2 h + 2\mu \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\rho_s \left( \frac{\partial v}{\partial t} + 2\Omega u \right) = \rho_s \Omega^2 \frac{\partial h}{\partial \phi} + \mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right), \quad (9)$$

$$\rho_s \frac{\partial w}{\partial t} = \rho_s \Omega^2 b \frac{\partial h}{\partial z} + \mu \left( \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z} \right).$$

Заметим, что без учёта изменения плотности при изгибаниях свободной инерционной поверхности мы получили бы те же линеаризованные уравнение, но с другим значением одного из коэффициентов.

Кинематическое условие (3) после линеаризации приобретает вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} - u = 0 \quad (r = b). \quad (10)$$

В случае невязкой жидкости граничные условия на инерционной поверхности приобретают очень простую форму

$$\rho_s \left( \frac{\partial u}{\partial t} - 2\Omega v \right) = -p - (2\rho_s + \rho b) \Omega^2 h, \quad \frac{\partial h}{\partial t} - u = 0 \quad (r = b). \quad (11)$$

## 2. Инерционные (гироскопические) моды

Ограничимся рассмотрением инфинитезимальных гармонических волн  $\sim e^{-i\omega t}$ . Далее используем безразмерные переменные  $r' = r/a$ ,  $z' = z/a$ ,  $t' = t\Omega$ ,  $\tau = \phi/\Omega$ ,  $\delta = b/a$ ,  $\mathbf{v}' = \mathbf{v}/(\Omega a)$ ,  $h' = h/a$ ,  $p' = p/(\rho\Omega^2 a^2)$ ,  $P = \rho_s/(\rho a)$ ,  $E = v/(\Omega a^2)$ . Штрихи будем опускать.

Как показано в [9], система уравнений (8) допускает точные решения

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_m(r) e^{i(-\omega t + kz + m\phi)}, \quad p = p_m(r) e^{i(-\omega t + kz + m\phi)}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

где  $\mathbf{v}_m = (u_m, v_m, w_m)^T$ , выражение для аксиальной амплитуды  $w_m$  представляет собой простую суперпозицию шести функций Ганкеля

$$w_m = \sum_{j=1}^3 w_{m,j}, \quad w_{m,j} = C_{2j-1} H_m^{(1)}(\lambda_j r) + C_{2j} H_m^{(2)}(\lambda_j r), \quad (13)$$

выражения для остальных амплитуд  $u_m$ ,  $v_m$ ,  $p_m$  немного сложнее:

$$u_m = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{im(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} + \frac{ik}{\lambda_j} w_{m-1,j} \right), \quad (14)$$

$$v_m = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} w_{m,j} - \frac{\kappa_j}{\lambda_j} w_{m-1,j} \right), \quad p_m = - \sum_{j=1}^3 \left( \frac{2}{\kappa_j} w_{m,j} \right),$$

$\kappa_j$  ( $j=1,2,3$ ) – корни уравнения

$$\tau\kappa + 2k + iE\kappa^3 = 0, \quad (15)$$

$\lambda_j^2 = \kappa_j^2 - k^2$ ,  $H_m^{(1)}(z)$  и  $H_m^{(2)}(z)$  – функции Ганкеля первого и второго рода соответственно;  $C_1, \dots, C_6$  – константы,  $\kappa_j$  ( $j=1,2,3$ ) – параметры, характеризующие завихренность течения:

$$\kappa_1 = \frac{s}{6E}(-1+i\sqrt{3}) - \frac{\tau}{2s}(i+\sqrt{3}), \quad \kappa_2 = \frac{s}{3E} + i\frac{\tau}{s}, \quad \kappa_3 = -\frac{s}{6E}(1+i\sqrt{3}) - i\frac{\tau}{2s}(1-i\sqrt{3}),$$

где  $s = \left(27ik + 3\sqrt{3i\tau^3 E^{-1} - 81k^2}\right)^{1/3} E^{2/3}$ . Параметр завихренности  $\kappa_1$  является наименьшим по модулю и связан с крупномасштабным полем, параметры  $\kappa_2$  ( $\text{Im}\kappa_2 > 0$ ) и  $\kappa_3$  ( $\text{Im}\kappa_3 < 0$ ) связаны с пограничными слоями. Заметим, что  $E$  (число Экмана) для роторных систем, как правило, очень мало. Для  $\kappa_j$  при малом  $E$  и  $\tau$  вне малой окрестности нуля можно записать следующие приближенные выражения:

$$\kappa_1 = -\frac{2}{\tau}k + i\frac{8E}{\tau^4}k^3 + o(E),$$

$$\kappa_j = (-1)^{j+1} \sqrt{\frac{|\tau|}{2E}} (-\text{sign}(\tau) + i) - 2k\tau^{-1} + o(E^{-1/2}), \quad j=2,3. \quad (16)$$

С различием параметров  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  связано формирование двойного пограничного слоя. При малых значениях  $E$  параметры  $\kappa_2$  и  $\kappa_3$  мало отличаются по модулю друг от друга.

Используя вытекающее из (10) соотношение  $h = i(u/\tau)$ , исключим  $h$  из граничных условий (9) на свободной поверхности  $r = \delta$

$$-i((2P + \delta)/\tau - P\tau)u + 2Pv - p + 2E\frac{\partial u}{\partial r} = 0,$$

$$\left[-(m/\tau + 2)P + imE\delta^{-1}\right]u - (E\delta^{-1} - i\tau P)v + E\frac{\partial v}{\partial r} = 0, \quad (17)$$

$$k(-P\delta/\tau + iE)u + iP\tau w + E\frac{\partial w}{\partial r} = 0.$$

Подставляя решение (12)-(15) в граничные условия (7) и (17), получим

$$\mathbf{AC} = 0, \quad (18)$$

где  $\mathbf{C}=(C_1, \dots, C_6)^T$ ,  $\mathbf{A}=(a_{kj})$  –  $6 \times 6$  матрица с элементами

$$a_{11} = \frac{im(\kappa_1 - k)}{\lambda_1^2} H_m^{(1)}(\lambda_1) + \frac{ik}{\lambda_1} H_{m-1}^{(1)}(\lambda_1)$$

и т.д. Из условия разрешимости однородной системы (18) относительно  $C_j$  следует дисперсионное соотношение

$$\det \mathbf{A} = 0, \quad (19)$$

связывающее безразмерную циклическую частоту, азимутальное волновое число  $m$  и аксиальное волновое число  $k$ . Это уравнение в развернутом виде мы не приводим из-за его громоздкости.

В случае невязкой жидкости уравнение (15), связывающее  $\kappa$  с аксиальным волновым числом  $k$ , становится линейным

$$\kappa = -2k / \tau$$

и  $\lambda^2 = \gamma^2 k^2$ ,  $\gamma^2 = 4\tau^{-2} - 1$ . Заметим, что  $4\tau^{-2} - 1 > 0$ , поскольку распространение инерционных волн возможно, как хорошо известно, только при  $|\tau| < 2$ . Выражения (13)–(15) для амплитуд аксиальной, радиальной и азимутальной скоростей сильно упрощаются

$$\hat{w}_m = C_1 J_m(|k|\gamma r) + C_2 Y_m(|k|\gamma r),$$

$$\hat{u}_m = is \left( -\frac{m(2+\tau)}{\tau|k|\gamma^2 r} \hat{w}_m + \frac{1}{\gamma} \hat{w}_{m-1} \right), \quad \hat{v}_m = s \left( -\frac{m(2+\tau)}{\tau|k|\gamma^2 r} \hat{w}_m + \frac{2}{\tau\gamma} \hat{w}_{m-1} \right), \quad \hat{p}_m = \frac{\tau}{k} \hat{w}_m,$$

где  $J_m(|k|\gamma r)$ ,  $Y_m(|k|\gamma r)$  – функции Бесселя  $m$ -го порядка первого и второго рода соответственно,  $s = \text{sign}(k)$ . Из граничных условий на твердой стенке  $u = 0$  ( $r = 1$ ) и на свободной поверхности (11) следует дисперсионное уравнение

$$D_0(\tau, k) + P \cdot D_P(\tau, k) = 0, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} D_0 &= (\alpha J_m(|k|\gamma) + \gamma^{-1} J_{m-1}(|k|\gamma)) \times \\ &\times \left[ \tau^{-1} (\alpha \delta^{-1} Y_m(|k|\gamma \delta) + \gamma^{-1} Y_{m-1}(|k|\gamma \delta)) - \tau |k|^{-1} Y_m(|k|\gamma \delta) \right] - \\ &- (\alpha Y_m(|k|\gamma) + \gamma^{-1} Y_{m-1}(|k|\gamma)) \times \\ &\times \left[ \tau^{-1} (\alpha \delta^{-1} J_m(|k|\gamma \delta) + \gamma^{-1} J_{m-1}(|k|\gamma \delta)) - \tau |k|^{-1} J_m(|k|\gamma \delta) \right], \end{aligned}$$



$$D_P = - \left( \alpha J_m(|k|\gamma) + \gamma^{-1} J_{m-1}(|k|\gamma) \right) \times \left[ (2\tau^{-1} - \tau) \left( \alpha \delta^{-1} Y_m(|k|\gamma\delta) + \gamma^{-1} Y_{m-1}(|k|\gamma\delta) \right) + \right. \\ \left. + 2\alpha \delta^{-1} Y_m(|k|\gamma\delta) + 4\gamma^{-1} \tau^{-1} Y_{m-1}(|k|\gamma\delta) \right] + \left( \alpha Y_m(|k|\gamma) + \gamma^{-1} Y_{m-1}(|k|\gamma) \right) \times \\ \times \left[ (2\tau^{-1} - \tau) \left( \alpha \delta^{-1} J_m(|k|\gamma\delta) + \gamma^{-1} J_{m-1}(|k|\gamma\delta) \right) + \right. \\ \left. + 2\alpha \delta^{-1} J_m(|k|\gamma\delta) + 4\gamma^{-1} \tau^{-1} J_{m-1}(|k|\gamma\delta) \right],$$

$$\alpha = -m(2 + \tau) / (\tau |k| \gamma^2).$$

Когда наличием плавающих частиц на поверхности можно пренебречь  $P=0$ , уравнение (20) сводится к уравнению  $D_0(\tau, k)=0$ , рассматривавшемуся в [9].

### 3. Влияние инерционной поверхности на дисперсию мод

Для каждой частоты  $\tau$  из интервала  $(-2, 2)$  существует бесконечное (счетное) множество корней дисперсионного уравнения (20), которым соответствуют распространяющиеся инерционные моды. Осесимметричным волнам соответствует нулевое азимутальное волновое число  $m=0$ . Дисперсионные кривые с  $m \neq 0$  на интервале  $\tau \in [0, 2)$  симметричны кривым для волн с  $-m$  на интервале  $\tau \in (-2, 0]$ . Наиболее интересно, имея ввиду роторные системы, исследование волновых движений с  $m = \pm 1$ . На рис.2 показаны зависимости действительных частей безразмерных аксиальных волновых чисел  $k$  нескольких низших мод от отношения частот  $\tau$  при  $m=1$ ,  $\delta=0.7$ ,  $E=0$  и двух различных  $P$ :  $P=0$  (сплошные кривые) и  $P=0.5$  (пунктирные кривые). Параметр  $P$  во втором случае взят большим для наглядности изменений, происходящих с дисперсионными кривыми под влиянием флотирующих частиц на поверхности. В правой части рис.2 (при  $\tau > 0$ ) расположены ветви, соответствующие инерционным модам, распространяющимся в прямом (положительном) направлении оси  $z$ , совпадающей с осью вращения, а в левой части – модам, распространяющимся ретроградно. Влияние инерционной поверхности проявляется наиболее сильно на низших модах (т.е. на модах, у которых дисперсионные кривые расположены ближе к оси абсцисс).

Расчёты показывают, что при  $E < 10^{-6}$  – числе Экмана, характеризующем отношение сил вязкости к силе Кориолиса, дисперсионные кривые мало отличаются от подобных кривых при  $E=0$  и соответствующем  $P$ , если параметр  $P$  мал. Естественно, что нормальные инерционные моды, распространяющиеся в вязкой жидкости, становятся затухающими, т.е. у волнового числа появляется мнимая часть, положительная при достаточно малых  $P$ . Когда инерционные свойства свободной поверхности не учитываются  $P=0$ ,

коэффициенты затухания у всех мод монотонно увеличиваются по абсолютной величине с увеличением  $|\tau|$  от нуля до 2. Хорошо известно [7], что при наличии такого дестабилизирующего фактора, как поверхностное натяжение, вязкость не всегда играет стабилизирующую роль. В рассматриваемом случае не учитываются эффекты поверхностного натяжения, но дестабилизирующее влияние, как показывают численные эксперименты, может оказывать инерционная поверхность вязкой жидкости.

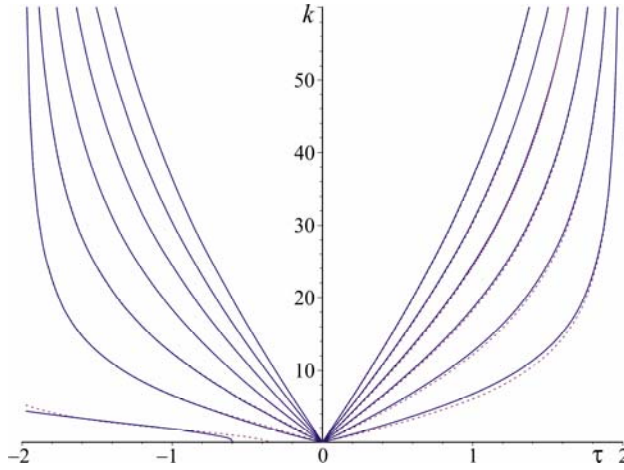


Рис. 2.

Примем, что гироскопические моды с азимутальным волновым числом  $m$  каким-либо образом перенумерованы, и для моды с номером  $n$  используем обозначение  $\mathbf{v}_{mn} = \hat{\mathbf{v}}_{mn} e^{-i\tau t + ikz + im\phi}$ . Уравнение (8) с граничными условиями (9) перепишем, для удобства изложения, в следующем безразмерном виде:

$$-i\tau \mathbf{v}_{mn} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + 2\mathbf{v}_{mn} \times \mathbf{n}_z, \quad (21)$$

$$\mathbf{v}_{mn} = 0 \quad (r=1), \quad (22)$$

$$i\tau h_{mn} - \mathbf{v}_{mn} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T} \quad (r=\delta), \quad (23)$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = -p_{mn} \mathbf{I} + 2E\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{e} = (\nabla \mathbf{v}_{mn} + (\nabla \mathbf{v}_{mn})^T) / 2$ ,  $\mathbf{n}_z = \boldsymbol{\Omega} / |\boldsymbol{\Omega}|$ ,  $\mathbf{n} = \nabla F / |\nabla F|$ ,  $\mathbf{T} = (\delta h_{mn} + P[2h_{mn} - i\tau u_{mn} - 2v_{mn}], P(2u_{mn} - imh_{mn} - i\tau v_{mn}), P(-i\delta kh_{mn} - i\tau w_{mn}))$ .

Умножим уравнение (21) на комплексно сопряженный вектор  $\mathbf{v}_{mn}^* = \hat{\mathbf{v}}_{mn}^* e^{i\tau^* t - ikz - im\phi}$ , причем мы полагаем аксиальное волновое число  $k$  вещественной величиной, а циклическую частоту  $\tau = \tau_r + i\tau_i$  – комплексной.

Звездочка обозначает комплексное сопряжение. Ниже номер моды  $n$  мы будем опускать. После умножения получим

$$-i\tau \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^* = (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v}_m^* + 2(\mathbf{v}_m \times \mathbf{n}_z) \mathbf{v}_m^* . \quad (24)$$

Преобразуем первый член в правой части уравнения (24), к следующему виду:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{v}_m^* = \nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}_m^*) - 2E \mathbf{e} \mathbf{e}^* .$$

Проинтегрируем (24) по трубчатому объёму, занимаемому жидкостью в цилиндре произвольной длины  $\ell$  :

$$-i\tau \int_V \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^* dV = \int_V (\nabla \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{v}_m^*)) dV - 2 \int_V (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_m^*) \mathbf{n}_z dV - 2E \int_V \mathbf{e} \mathbf{e}^* dV . \quad (25)$$

Рассматриваемый объем жидкости ограничивают 4 поверхности: свободная поверхность  $S_\delta$  ( $r = \delta$ ) центрифугированного слоя, внутренняя поверхность жесткого цилиндра ( $r = 1$ ) и два плоских поперечных сечения  $z = 0$  и  $z = \ell$ . Преобразовав первый интеграл в правой части (25) в интеграл по поверхности, перепишем (25) в виде

$$-i\tau \int_V \mathbf{v}_m \mathbf{v}_m^* dV = \int_{S_\delta} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_e \mathbf{v}_m^* dS - 2 \int_V (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_m^*) \mathbf{n}_z dV - 2E \int_V \mathbf{e} \mathbf{e}^* dV , \quad (26)$$

где  $\mathbf{n}_e$  – единичный вектор внешней нормали ( $\mathbf{n}_e = -\mathbf{n}$  на свободной поверхности). В формуле (26) от поверхностного интеграла остался только интеграл по свободной поверхности  $S_\delta$ , поскольку интегралы по поперечным сечениям в случае вещественного  $k$  взаимно сокращаются, а интеграл по поверхности цилиндра  $r = 1$  равен нулю в силу граничного условия (22). Заметим, что второй член в правой части (26)

$$\int_V (\mathbf{v}_m \times \mathbf{v}_m^*) \mathbf{n}_z dV = \int_V (u_m v_m^* - v_m u_m^*) dV = \int_V (u_m v_m^* - (u_m v_m^*)^*) dV$$

– чисто мнимая величина.

Первое слагаемое в правой части (26), проведя простые преобразования, запишем в виде суммы трех интегралов

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{S_\delta} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}_e \mathbf{v}_m^* dS = & - \int_{S_\delta} \mathbf{T} \mathbf{v}_m^* dS = -i \int_{S_\delta} [\tau^* (\delta + 2P) h_{mn} h_{mn}^* - P \tau v_{mn} \mathbf{v}_m^*] dS - \\ & - 2P \int_{S_\delta} [u_{mn} v_{mn}^* - (u_{mn} v_{mn}^*)^*] dS + iP \int_{S_\delta} [h_{mn} (m v_{mn}^* + \delta k w_{mn}^*)] dS. \end{aligned} \quad (27)$$

Последний интеграл в (27), используя уравнение неразрывности для подын-

тегрального выражения  $imv^* / \delta + ikw^* = \partial u^* / \partial r + u^* / \delta$ , представим в виде

$$iP \int_{S_\delta} [h_{mn}(mv_{mn}^* + \delta kw_{mn}^*)] dS = iP \frac{\delta}{\tau} \int_{S_\delta} u_{mn} \frac{\partial u_{mn}^*}{\partial r} dS + i\tau^* P \int_{S_\delta} h_{mn} h_{mn}^* dS. \quad (28)$$

В итоге после небольших преобразований уравнения (26) с использованием (27), (28) и выделения действительной части получим следующее выражение:

$$\tau_i \left\{ \left[ \int_V \mathbf{v}_{mn} \mathbf{v}_{mn}^* dV + \int_{S_\delta} ((\delta + 3P)h_{mn} h_{mn}^* + P\mathbf{v}_{mn} \mathbf{v}_{mn}^*) dS \right] + \right. \\ \left. + P \frac{\delta}{|\tau|^2} \operatorname{Re} \int_{S_\delta} u_{mn} \frac{\partial u_{mn}^*}{\partial r} dS \right\} = -2E \int_V \mathbf{e} \mathbf{e}^* dV, \quad (29)$$

где  $\tau_i = \operatorname{Im}(\tau)$  – мнимая часть безразмерной частоты  $\tau$ .

В случае классических граничных условий  $P = 0$  уравнение (29) редуцируется до следующего простого соотношения:

$$\tau_i \left\{ \int_V \mathbf{v}_{mn} \mathbf{v}_{mn}^* dV + \delta \int_{S_\delta} h_{mn} h_{mn}^* dS \right\} = -2E \int_V \mathbf{e} \mathbf{e}^* dV. \quad (30)$$

Правая часть уравнения (30) – величина отрицательная, сомножитель в фигурных скобках в левой части – положительная величина, следовательно,  $\tau_i < 0$ , т.е. инерционные моды не могут расти и твердотельное вращение вязкой несжимаемой жидкости в круговом цилиндре устойчиво относительно инфинитезимальных гармонических волновых возмущений.

Но в случае флотирующей жидкости по виду уравнения (29) судить об устойчивости твердотельного вращения сложнее: нельзя исключить, что последний член в левой части уравнения (29) при каких-то параметрах не может стать отрицательным и по абсолютному значению больше суммы первых трех слагаемых. Возникновение неустойчивости, т.е. появление малого положительного  $\tau_i$ , возможно лишь при выполнении неравенства

$$\operatorname{Re} \left[ u_{mn} \frac{\partial u_{mn}^*}{\partial r} \right]_{r=\delta} < - \frac{|\tau|^2}{2\pi\delta P \ell} \int_V \mathbf{v}_{mn} \mathbf{v}_{mn}^* dV - \left[ \frac{\delta + 3P}{\delta P} u_{mn} u_{mn}^* + \frac{|\tau|^2}{\delta} \mathbf{v}_{mn} \mathbf{v}_{mn}^* \right]_{r=\delta}.$$

Нас интересует возникновение неустойчивости для высоких скоростей вращения, т.е. малых  $\tau_r$ , когда первым и последним членами в правой части последнего неравенства можно пренебречь. Тогда условие возникновения неустойчивости сводится к

$$\operatorname{Re} \left[ u_{mn} \frac{\partial u_{mn}^*}{\partial r} \right]_{r=\delta} < - \left( \frac{1}{P} + 3 \frac{1}{\delta} \right) \left[ u_{mn} u_{mn}^* \right]_{r=\delta}. \quad (31)$$

Заметим, что выражение для радиальной компоненты скорости (14) можно записать несколько иначе:

$$u_m = \sum_{j=1}^6 \tilde{u}_{m,j} = i \sum_{j=1}^6 \left( \frac{m(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r} + \frac{k}{\lambda_j} f_{m,j}(k) \right) \tilde{w}_{m,j}, \quad (32)$$

где  $\tilde{w}_{m,j}(r) = C_j H_m^{(1+\theta((-1)^j))}(\lambda_{(j+\theta((-1)^{j+1})/2} r)$ , ( $j=1, \dots, 6$ ),  $\theta(x)$  – функция Хевисайда ( $\theta(x)=0, x \leq 0, \theta(x)=1, x > 0$ ),  $f_{m,j} = \tilde{w}_{m-1,j} / \tilde{w}_{m,j}$ . Дифференцируя  $u_m$  из (32) по  $r$ , получим выражение для  $\partial u_m / \partial r$ :

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = i \sum_{j=1}^6 \left[ - \left( \frac{m(m+1)(\kappa_j - k)}{\lambda_j^2 r^2} + k \right) + \frac{m\kappa_j - k}{\lambda_j r} f_{m,j}(k) \right] \tilde{w}_{m,j}. \quad (33)$$

Используя (32), формулу (33) преобразуем к виду

$$\frac{\partial u_m}{\partial r} = \chi_m \cdot \tilde{u}_m, \quad (34)$$

где  $\chi_m = (\chi_{m,1}, \dots, \chi_{m,6})$ ,  $\chi_{m,j} = - \frac{(m+1)}{\delta} \left( 1 + \frac{[\delta \lambda_j k - m f_{m,j}(\kappa_j + k)] \lambda_j \delta}{(m+1)(m(\kappa_j - k) + \delta \lambda_j k f_{m,j})} \right)$ ,  $\tilde{u}_m = (\tilde{u}_{m,1}, \dots, \tilde{u}_{m,6})^T$ .

Из (34) с использованием неравенства Коши-Буняковского следует

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial r} \right\| \leq \|\chi_m\| \cdot \|\tilde{u}_m\|, \quad (35)$$

где  $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ . Нас интересует оценка производной при  $r = \delta$ . Если центрифугированный слой не является настолько тонким, что противоположные пограничные слои перекрываются, то вкладом в  $\|\tilde{u}_m(b)\|$  двух очень малых слагаемых, описывающих пограничный слой на твердой стенке  $r=1$ , можно пренебречь. Для грубой оценки вместо (35) проще использовать неравенство

$$\left\| \frac{\partial \hat{u}_m}{\partial r} \right\| < N \|\chi\| \|\tilde{u}_m\|,$$

где  $|\chi| = \max_{j=1, \dots, 6} |\chi_{m,j}|$ ,  $N = 4$ . Отметим, что при малом числе Экмана  $E$  можно воспользоваться приближенным равенством

$$\chi_{m,j} \sim \left( \frac{(mf_{m,j} - \delta k)\lambda_j}{m + \delta kf_{m,j}} - \frac{m+1}{\delta} \right)$$

или, учитывая, что  $|\lambda_1| \ll |\lambda_j|_{j=2,3}$ ,  $f_{m,j}|_{j=2,3} \approx i$  более грубым приближенным неравенством  $|\chi| \leq |\lambda|$ , где  $|\lambda| = \max_{j=2,3} |\lambda_j| \approx \sqrt{|\tau|/E}$ .

Используя последнее неравенство и неравенство (31), после простых преобразований получаем, что неустойчивость может возникнуть, если значение параметра  $P$  превысит  $\delta / (4|\lambda|\delta + 3)$ :  $P > \delta / (4|\lambda|\delta + 3)$ . Последнее неравенство, воспользовавшись формулой (16), можно преобразовать к виду  $P > P_* = \delta\sqrt{E} / (4\sqrt{|\tau|\delta + 3\sqrt{E}})$  или  $\rho_s > \rho_* = \rho b\sqrt{E} / (4\sqrt{|\tau|\delta + 3\sqrt{E}})$ . Численные эксперименты показали, что с ростом  $P$  ( $P > P_*$ ) вначале неустойчивость возникает у низшей (длинноволновой) моды, а затем последовательно становятся неустойчивыми моды с более высокими номерами.

## Заключение

Предложена модель вихревых движений вязкой жидкости с инерционной поверхностью, образуемой плавающими на свободной поверхности и не взаимодействующими между собой частицами, обладающими малой массой. Получено решение линеаризованной задачи и исследовано влияние инерционной поверхности на дисперсионные свойства инерционных волн. Твердотельное вращение центрифугированного слоя вязкой жидкости является устойчивым к малым гармоническим возмущениям, если погонная плотность инерционной поверхности достаточно мала.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Petters A.S.* The effect of a floating mat on water waves // *Comm. Pure and Appl. Math.*, 1950, v.3, №4, p.319-354.
2. *Mandal B.N.* Water waves generated by disturbance at an inertial surface // *Appl. Sci. Res.*, 1988, v.5, №1, p.67-73.
3. *Габов С.А.* О существовании установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // *ЖВМ и МФ*, 1988, т.28, №10, с.1507-1519;  
*Gabov S.A.* O sushchestvovanii ustanovivshikhsia voln konechnoi amplitudy na poverkhnosti flotiruiushchei zhidkosti // *ZhVM i MF*, 1988, t.28, № 10, s.1507-1519.

4. *Габов С.А., Тверской М.Б.* О вычислении параметров установившихся волн конечной амплитуды на поверхности флотирующей жидкости // Математическое моделирование, 1989, т.1, №2, с.109-118;  
*Gabov S.A., Tverskoi M.B.* O vychislenii parametrov ustanovivshikhsia voln konechnoi amplitudy na poverkhnosti flotiruiushchei zhidkosti // Matematicheskoe modelirovanie, 1989, t.1, №2, s.109-118.
5. *Габов С.А., Тверской М.Б.* Течение флотирующей жидкости конечной глубины при наличии переменного давления на свободной поверхности // Математическое моделирование, 1989, т.1, №3, с.110-122;  
*Gabov S.A., Tverskoi M.B.* Tечenie flotiruiushchei zhidkosti konechnoi glubiny pri naliczii peremennogo davleniia na svobodnoi poverkhnosti // Matematicheskoe modelirovanie, 1989, t.1, №3, s.110-122.
6. *Габов С.А., Свешников А.Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости. – М.: ВИНТИ, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ, 28, 1990, с.3-86;  
*Gabov S.A., Sveshnikov A.G.* Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruiushchei zhidkosti. – М.: VINITI, Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal., 28, 1990, s.3-86.
7. *Coppola G., Semeraro O.* Interfacial instability of two rotating viscous immiscible fluids in a cylinder // Phys. Fluids, 2011, v.23, 064105.
8. *Дерендяев Н.В.* Устойчивость вращения роторных систем, содержащих жидкость. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2014, 154 с.;  
*Derendiaev N.V.* Ustoichivost vrashcheniia rotornykh sistem, sodержashchikh zhidkost. – Nizhnii Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo universiteta, 2014, 154 s.
9. *Солдатов И.Н.* Гироскопические волны во вращающемся слое жидкости // Прикладная механика и техническая физика, 2008, т.49, №2, с.15-20;  
*Soldatov I.N.* Gyroscopic waves in a rotating liquid layer // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2008, v.49, №2, p.167-171.

Поступила в редакцию 26.07.18

После доработки 26.07.18

Принята к публикации 19.11.18