

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ПРОЕКЦИИ БЛИЖАЙШЕЙ ТОЧКИ В МЕТОДЕ X-FEM

© 2019 г. *Е.Б. Савенков, В.Е. Борисов, Б.В. Критский*

ФГУ Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

e.savenkov@gmail.com, narelen@gmail.com, boris.v.kritskiy@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ, проект № 15-11-00021.

DOI: 10.1134/S0234087919060029

В настоящее время метод X-FEM (eXtended Finite Elements) является распространенным обобщением классического метода конечных элементов для решения задач механики деформируемого твердого тела при наличии крупномасштабных трещин. Основным достоинством метода является возможность использования расчетных сеток, не согласованных с геометрией трещин, и возможность точного учета сингулярных асимптотик решения в окрестности фронта трещины. Одним из ключевых компонентов метода является способ представления срединной поверхности трещины в алгоритме метода. В качестве последнего традиционно используется неявный метод представления поверхности на основе метода множеств уровня. Такой подход является эффективным, робастным и позволяет проводить расчет в случае эволюционирующих трещин. В работе предлагается вариант метода X-FEM, в котором для представления срединной поверхности трещины используется метод проекции ближайшей точки и который, на взгляд авторов, имеет ряд преимуществ перед традиционным вариантом. В работе представлен короткий обзор классического варианта метода X-FEM. Подробно описаны алгоритм предлагаемого варианта метода и его отличия от традиционного, сформулированы его преимущества. Рассмотрены вопросы вычисления интегралов от функций, заданных на поверхности, описываемой проектором ближайшей точки, локального восстановления функций уровня в окрестности точки поверхности или ее края, вычисления локальных базисов на поверхности и ее крае. Описаны алгоритмические детали метода X-FEM с представлением поверхности на основе проекции ближайшей точки. В заключении приводятся результаты тестовых расчетов, демонстрирующих алгоритмические особенности метода и работоспособность предложенного алгоритма.

Ключевые слова: МКЭ, X-FEM, метод проекции ближайшей точки.

UTILIZATION OF CLOSEST POINT PROJECTION SURFACE REPRESENTATION IN EXTENDED FINITE ELEMENT METHOD

E.B. Savenkov, V.E. Borisov, B.V. Kritsky

Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS

Currently X-FEM approach is widely used computational technique for solution of solid mechanics problems given a number of large scale fractures. Its main advantage is a possibility to use computational meshes which do not fit fractures midsurface geometry and possibility for an exact accounting for singular asymptotic of the solution in the neighborhood of the fractures fronts. One of the key components of the method is representation of the fractures midsurface in the algorithm. Usually implicit representation is used based on the level set method. Such approach is efficient and robust and allows to perform simulation in the presence with evolutionary fractures. In this paper we present a variant of the X-FEM approach which utilizes fracture midsurface representation based on closest point projection method and provides, up to authors' opinion, certain benefits comparably to the classical X-FEM. We provide a short overview of the X-FEM technique. The proposed algorithm is described in details and its advantages are formulated. We consider questions of numerical integration of function defined at closest point projection surfaces, local recovery of the level set function and computation of local bases in the neighborhood of the points at the surface and its boundary. Algorithmic details of the proposed method are described. Finally we present some numerical results which demonstrate application of the proposed algorithm and its capabilities.

Key words: hydraulic fracture problem, poroelastic medium, incomplete coupling principle.

1. Введение

В настоящее время «расширенный» метод конечных элементов (eXtended Finite Elements Method, X-FEM) является одним из эффективных способов решения задач, содержащих разрывы того или иного рода, отнесенные к внутренним границам расчетной области. Метод был предложен в работах [1, 2] для решения задач теории упругости при наличии крупномасштабных трещин и в настоящее время активно развивается, см., например, [3,4]. Отличительными особенностями метода, обеспечивающими его эффективность, являются возможность расчета задач в случае не согласованной с расчетной сеткой геометрии трещины и точного учета в конечномерном решении сингулярных асимптотик решения в окрестности фронта трещины.

Метод основан на дополнении стандартного конечно-элементного базиса специальными дополнительными базисными функциями, которые позволяют корректно описать разрывные на срединной поверхности трещины поля перемещений, напряжений и деформаций. Подробное описание метода для решения задач теории упругости приведено в [5, 6].

Одним из ключевых компонентов метода X-FEM является способ представления поверхности трещины в конечномерной задаче, который должен обеспечивать удобство вычисления всех необходимых для реализации метода величин (например, матрицы жесткости задачи). В современных вариантах метода для этого чаще всего используется метод множеств уровня (level set method, [7]), предложенный в контексте метода X-FEM в [8]. По-

пулярность последнего подхода обусловлена тем, что он дает удобные и эффективные средства для описания эволюции трещины [5,6].

В соответствии с методом множеств уровня срединная поверхность трещины в момент времени t описывается парой определенных в пространстве скалярных функций $\phi(\mathbf{x}, t)$ и $\psi(\mathbf{x}, t)$ так, что

$$\mathcal{F}_t = \{\mathbf{x} \in \mathcal{F}^3 : \phi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \psi(\mathbf{x}, t) \leq 0\}, \quad (1)$$

где t – время. Другими словами, в фиксированный момент времени t срединная поверхность трещины задается как часть множества уровня ноль функции $\phi(\mathbf{x}, t)$, ограниченной изоповерхностью функции $\psi(\mathbf{x}, t)$. Для проведения расчетов удобно, чтобы функции ϕ и ψ являлись знаковыми расстояниями (от точки пространства до поверхности), определенными в некоторой небольшой окрестности Ω поверхности \mathcal{F} . При этом движение края поверхности задается полем скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, описывающим эволюцию функций ϕ и ψ . Для пересчета значений функций ϕ и ψ применяются уравнения типа Гамильтона–Якоби. Основным недостатком такого метода является сложность реализации: в частности, для описания эволюции поверхности требуется согласованное множественное решение уравнений типа Гамильтона–Якоби относительно функций ϕ и ψ с целью обеспечить сохранение ортогональности градиентов функций ϕ и ψ , свойств знаковых расстояний и т.д., см. [5,6,8].

В настоящей работе для описания геометрии поверхности предлагается использовать подход, основанный на методе проекции ближайшей точки. В контексте задач моделирования развития трещин он является таким же общим, как и метод поверхностей уровня, однако обладает рядом преимуществ в том случае, когда состояние среды (граничные условия) на боковых поверхностях («берегах») трещины само по себе определяется решением некоторых уравнений, дополнительных по отношению к уравнениям во вмещающей среде [9].

Альтернативный подход, отчасти близкий использованному в настоящей работе, описан в [10]. В нем поверхность задается с помощью так называемых «векторных поверхностей уровня» («vector level sets»), представляющих собой пару функций, первая из которых является оператором проектирования точки на поверхность в смысле ближайшего расстояния, а вторая определяет ориентацию поверхности. Вместе с тем в описанном подходе применяется полигональное представление поверхности. В ходе эволюции поверхности сначала обновляется ее полигональное представление, которое затем используется для построения проекторов и функций уровня.

В отличие от этого подхода в настоящей работе не используется поли-

гональное представление поверхности, а значения операторов проектирования в ходе ее эволюции вычисляются непосредственно. При этом сама поверхность и задающие ее поверхности уровня при необходимости могут быть восстановлены локально. В этом смысле предложенный в настоящей работе подход является более гибким и по своей сути близок к методам представления поверхности как «облака точек» («point cloud surfaces», см., например, [11]).

В работе представлены основные понятия метода проекции ближайшей точки и метода X-FEM. Указывается способ вычисления всех необходимых компонентов конечномерной задачи метода X-FEM при использовании метода проекции ближайшей точки, приводятся результаты тестовых расчетов. В силу того, что основной целью настоящей работы является описание интеграции метода X-FEM и метода проекции ближайшей точки, вопросы, связанные с эволюцией поверхности трещины (в том числе соответствующие алгоритмы метода) в настоящей работе не рассматриваются. Соответствующие алгоритмы описаны в [12].

2. Метод проекции ближайшей точки

Рассмотрим основные понятия метода ближайшей точки [13]. Пусть \mathcal{F} – гладкая поверхность с краем, вложенная в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . Термин «гладкая» здесь и далее отражает тот факт, что множество \mathcal{F} является образом гладкого отображения ограниченной замкнутой подобласти двумерной плоскости \mathbb{R}^2 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 . При этом будем считать, что используемые отображения имеют любое требуемое число производных. Также положим, что поверхность \mathcal{F} целиком расположена внутри пространственной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Пусть для произвольной точки $\mathbf{x} \in \Omega$ (здесь и далее используются евклидовы нормы):

$$\mathbf{x}_{\text{cp}} = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|.$$

Точку \mathbf{x}_{cp} будем называть проекцией точки \mathbf{x} на поверхность \mathcal{F} в смысле наименьшего расстояния, а соответствующий оператор проектирования будем обозначать \mathbf{P} , $\mathbf{x}_{\text{cp}} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$. Оператор \mathbf{P} является векторнозначным; он отображает область Ω на поверхность \mathcal{F} , рассматриваемую как подмножество в $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. В случае когда поверхность и ее край являются гладкими, а область Ω – «достаточно маленькая», оператор \mathbf{P} однозначно определен, то есть каждая точка области Ω однозначно проектируется в единственную точку на поверхности.

Если для поверхности \mathcal{F} можно задать функцию знакового расстояния $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$ (т.е. \mathcal{F} – ориентированная поверхность без края), то для оператора

\mathbf{P} справедливо представление $\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})\nabla d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$. Можно показать, что проектор \mathbf{P} однозначно описывает поверхность \mathcal{F} как множество своих неподвижных точек: $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{P}(\mathbf{x})\}$.

В дальнейшем нам понадобится различать точки области Ω , которые проектируются во внутренние точки поверхности \mathcal{F} или на ее край $\partial\mathcal{F}$. Для этого рассмотрим вспомогательный оператор $\tilde{\mathbf{P}}$, который определим как [9]:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}). \quad (2)$$

Из простых геометрических соображений (см. рис.1) следует, что для точек \mathbf{x} , проекции которых принадлежат краю поверхности

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам \mathcal{F} , значения проекторов $\tilde{\mathbf{P}}$ и \mathbf{P} совпадают, то есть

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (4)$$

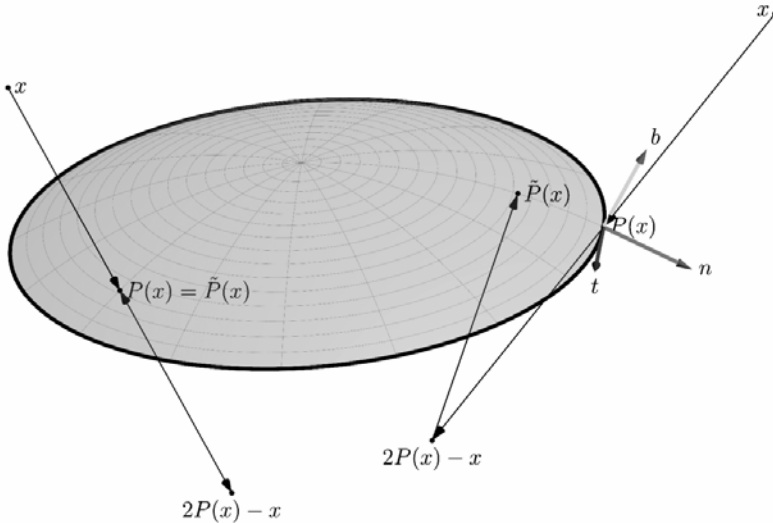


Рис.1. К определению операторов \mathbf{P} и $\tilde{\mathbf{P}}$.

Вместе с описанным выше способом описания поверхности \mathcal{F} в дальнейшем нам понадобится способ представления функций, заданных на этой поверхности. В силу того, что никаких локальных координат на поверхности \mathcal{F} не вводится, удобно использовать «неявный» способ их представления. А именно, функцию на поверхности будем задавать как след на ней функции, заданной в области Ω .

Удовлетворяющее последнему свойству продолжение функции, заданной на поверхности, в область Ω может быть построено различными способами. Удобным и используемым в дальнейшем способом является ее про-

должение с помощью оператора \mathbf{P} . А именно: для произвольной функции u , заданной на поверхности, ее продолжение $\varepsilon[u]$ в Ω определим как $\varepsilon[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P}(\mathbf{x}))$, $\mathbf{x} \in \Omega$. Построенное таким образом продолжение постоянно вдоль отрезков, соединяющих точку области Ω и ее проекцию. Это позволяет удобным способом вычислять производные функций на поверхности, а также дифференциальные операторы более высокого порядка.

С точки зрения реализации метода X-FEM любой способ представления поверхности должен обеспечивать возможность его использования в дискретном случае, в том числе давать возможность вычисления на крае поверхности и в его окрестности локальных векторных базисов и связанных с фронтом трещины координат, давать возможность интегрировать заданные на поверхности функции. В последующих разделах эти вопросы рассмотрены применительно к методу проекции ближайшей точки.

Дискретная модель поверхности. Пусть в области Ω , содержащей поверхность \mathcal{F} , задана расчетная сетка, ячейки которой являются тетраэдрами. Полученную триангуляцию будем считать регулярной (то есть пересечение двух различных тетраэдров может являться пустым множеством, узлом сетки, ее ребром или гранью). Соответствующую дискретную область обозначим как Ω_h . Предполагается, что сетка является достаточно мелкой, так что характерный шаг h сетки много меньше радиусов главных кривизн поверхности и радиуса кривизны ее края.

Узлы сетки обозначим как \mathbf{x}_i , $i=1, N$, N – число узлов сетки. Отнесем к каждому узлу сетки базисную функцию $\phi_i = \phi_i(\mathbf{x})$. Будем использовать непрерывные кусочно-линейные базисные функции, для которых $\phi_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера, а внутри ячеек сетки ϕ_i продолжены линейно.

В дискретном случае оператор проектирования \mathbf{P}^h задается своими значениями $\mathbf{P}_i^h = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i)$ в узлах сетки. Для вычисления оператора проектирования \mathbf{P}^h в произвольной точке области используется ранее введенная система базисных функций. Если $\mathbf{x} \in \Omega_h$ – произвольная точка области Ω_h , ω – тетраэдр, в котором она расположена, $\{\xi_k\}_{k=1}^4$ – ее барицентрические координаты относительно вершин тетраэдра ω , то проекцией точки \mathbf{x} считается точка

$$\mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^4 \xi_k(\mathbf{x}) \mathbf{P}_k^h.$$

Построенные аппроксимации проектора \mathbf{P}^h позволяют естественным образом построить аппроксимации проектора $\tilde{\mathbf{P}}^h$ в соответствии с (2).

Пусть \mathbb{I} – множество всех узлов сетки. Определим его подмножества $\mathbb{I}_{d,b}$, $\mathbb{I} = \mathbb{I}_d \cup \mathbb{I}_b$, $\mathbb{I}_d \cap \mathbb{I}_b = \emptyset$, соответствующие узлам, которые проектируются во внутренние точки поверхности и на ее край соответственно:

$$\mathbb{I}_d = \left\{ \mathbf{x}_i \in \mathbb{I} : \left\| \mathbf{x}_i - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x}_i) \right\| \leq \varepsilon \right\}, \quad \mathbb{I}_b = \mathbb{I} \setminus \mathbb{I}_d,$$

где $0 < \varepsilon \ll h$ – малый вещественный параметр, h – характерный размер тетраэдра сетки.

Интегрирование по поверхности. Рассмотрим вопросы интегрирования функций на поверхностях, заданных проектором «ближайшей точки». Обсудим вычисление интегралов вида

$$G = \int_{\mathcal{F}} g(\mathbf{x}) d\mathcal{F}.$$

Рассмотрим сразу дискретный случай. Как и ранее, будем считать, что поверхность расположена внутри некоторой сеточной области Ω_h . Пусть $\Gamma_h = \partial\Omega_h$ – ее граница, образованная объединением граней T_i сетки. При известном разбиении области Ω_h множество Γ_h легко может быть определено как множество граней, инцидентных одному и только одному тетраэдру триангуляции.

Представим Γ_h в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств: $\Gamma_h = \Gamma_h^+ \cup \Gamma_h^- \cup \Gamma_h^0$, где Γ_h^0 состоит из граней, все узлы которых проектируются на фронт (то есть являются элементами множества \mathbb{I}_b), а Γ_h^+ и Γ_h^- – множества остальных граней, причем все грани из множества Γ_h^+ (Γ_h^-) лежат по одну сторону от поверхности.

Заметим теперь, что:

- все узлы граней из Γ_h^0 проектируются на край поверхности. Площади треугольников, вершины которых являются проекциями вершин треугольников из Γ_h^0 , пренебрежимо малы при стремлении шага сетки h к нулю;
- оператор проектирования (как непрерывный, так и дискретный), ограниченный на множества Γ_h^\pm , является сюръекцией на поверхность \mathcal{F} ;
- в случае, когда прямая, проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней, пересекает границы множества Γ_h^\pm по одному разу, треугольные сетки, заданные на Γ_h^\pm , порождают треугольные сетки на поверхности \mathcal{F} (возможно, с вырожденными ячейками нулевой площади). Узлы этих сеток образованы проек-

циями вершин треугольников из Γ_h^\pm , при этом два узла этой сетки считаются связанными ребром, если им связаны соответствующие узлы в Γ_h^\pm .

Для вычисления интегралов от функций, заданных на поверхности, будем использовать «поверхностную» сетку Γ_h , при этом для вычисления приближенного значения интеграла по одному треугольнику будем использовать одноточечную квадратурную формулу.

При таком подходе не возникает необходимости в явном представлении в алгоритме описанных выше сеток на поверхности \mathcal{F} – суммирование по треугольникам такой сетки можно проводить в цикле по всем треугольникам, образующим множество Γ_h . При этом вклад от треугольников, принадлежащих множеству Γ_h^0 , будет исчезающе мал при $h \rightarrow 0$, а вклад от поверхностей Γ_h^\pm будет (асимптотически) удваиваться.

Если прямая, проходящая через произвольную точку на поверхности и ориентированная единичной нормалью к ней, пересекает границы множества Γ_h^\pm более одного раза, проекции сеток Γ_h^\pm уже не будут образовывать корректную сетку на \mathcal{F} в силу того, что проекции отдельных треугольников могут иметь непустое пересечение. В этом случае приведенная выше схема вычислений должна быть скорректирована. А именно, необходимо учитывать взаимную ориентацию внешней нормали к грани и направление проектирования, например, ее центра.

Так, рассмотрим некоторую грань (треугольник) ω_k , образованную узлами сетки $\mathbf{x}_{k,1}$, $\mathbf{x}_{k,2}$ и $\mathbf{x}_{k,3}$. Соответственно, четвертый узел тетраэдра будем обозначать $\mathbf{x}_{k,4}$. Тогда нормаль к грани определяется выражением $\mathbf{n}_k = \Delta_{12} \times \Delta_{23} / \|\Delta_{12} \times \Delta_{23}\|$, $\Delta_{ij} = \mathbf{x}_{k,i} - \mathbf{x}_{k,j}$, где « \times » обозначает векторное произведение в \mathbb{R}^3 . Направление нормали можно определить по взаимной ориентации рассчитанной нормали и вектора, соединяющего центр грани и его проекцию. Так, вектор нормали \mathbf{n}_k будет являться вектором внешней нормали, если $(\mathbf{P}^h(\mathbf{x}_c) - \mathbf{x}_c) \cdot \mathbf{n}_k < 0$, $\mathbf{x}_c = (\mathbf{x}_{k,1} + \mathbf{x}_{k,2} + \mathbf{x}_{k,3})/3$. В дальнейшем будем считать, что это условие выполняется. Таким образом, приходим к следующему выражению для вычисления интеграла по поверхности:

$$2G \approx \frac{1}{4} \sum_{T_k \in \Gamma_h} \tilde{g} \left(\frac{\mathbf{P}_{k,1}^h + \mathbf{P}_{k,2}^h + \mathbf{P}_{k,3}^h}{3} \right) \left\| \left(\mathbf{P}_{k,1}^h - \mathbf{P}_{k,2}^h \right) \times \left(\mathbf{P}_{k,2}^h - \mathbf{P}_{k,3}^h \right) \right\|,$$

где \tilde{g} – какое-либо продолжение функции g с поверхности в область Ω . Если $\tilde{g} = \varepsilon[g]$, то имеем $\tilde{g}(\mathbf{P}(\mathbf{x})) = \tilde{g}(\mathbf{x})$, и выражение для приближенного вычисления интеграла соответственно упрощается.

Множитель 2 перед интегралом возникает за счет того, что фактически интеграл вычисляется дважды – при обходе треугольников из Γ_h^+ и Γ_h^- .

Расчет локальных базисов на поверхности и ее крае. Введем еще один оператор проектирования \mathbf{P}_f , представляющий собой оператор проектирования в смысле кратчайшего расстояния на край поверхности:

$$\mathbf{P}_f(\mathbf{x}) = \arg \min_{\tilde{\mathbf{x}} \in \partial \mathcal{F}} \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|.$$

Оператор \mathbf{P}_f корректно (в смысле единственности проекции) определен в некоторой достаточно малой окрестности края $\partial \mathcal{F}$ поверхности \mathcal{F} . Соответствующую окрестность будем обозначать как Ω_f .

Будем считать, что $\Omega_f \subset \Omega$ и область Ω_f содержит все точки области Ω , которые проектируются на край поверхности в смысле критериев (3) и (4). Пусть Ω^+ – подобласть областей Ω и Ω_f , состоящая из точек, которые проектируются на край поверхности, см. рис.2. Следовательно, (а) в подобласти Ω^+ определены все три оператора \mathbf{P} , $\tilde{\mathbf{P}}$ и \mathbf{P}_f , и (б) образы операторов \mathbf{P} и \mathbf{P}_f , действующих на области Ω^+ , совпадают между собой и с множеством точек края $\partial \mathcal{F}$ поверхности.

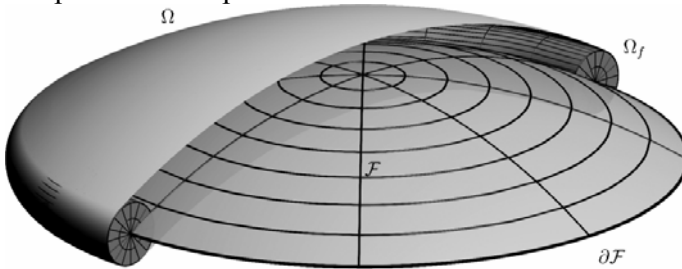


Рис.2. Области Ω и Ω_f .

Если обозначить через Ω^+ множество точек Ω , проектирующихся на край поверхности, то множество Ω_f может быть выбрано в виде $\Omega_f = \Omega^+ \cup \left\{ \{2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}, \mathbf{x} \in \Omega^+\} \cap \Omega \right\}$, то есть получено «зеркальным» отражением множества Ω^+ относительно края поверхности. Этот же алгоритм может быть применен и для построения области $\Omega_{f,h}$ в дискретной постановке.

Рассмотрим теперь вопрос о построении локальных базисов на поверхности и ее крае. Во всех точках проекций $\mathbf{P}_i^h = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}_i)$ узлов сетки из множества \mathbb{I}_d вектор единичной нормали к поверхности может быть определен как

$$\mathbf{n}_i = \mathbf{n}(\mathbf{P}_i^h) = (\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h) / \|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|, \quad (5)$$

при этом направления векторов \mathbf{n}_i для всех узлов сетки, лежащих «по одну сторону» от поверхности \mathcal{F} , совпадают. В том случае когда поверхность «слабо искривлена», то есть ее радиус кривизны существенно больше диаметра самой поверхности, ориентация поверхности может быть однозначно задана выбором вектора \mathbf{N} (не зависящего от точки поверхности и области Ω). В этом случае для узла сетки \mathbf{x}_i , $i \in \mathbb{I}_d$, положение узла и ориентация нормали \mathbf{n}_i могут быть определены путем вычисления знака произведения $\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_i$.

Тогда во всех узлах из множества \mathbb{I}_d может быть восстановлено значение аппроксимации функции $\phi(\mathbf{x})$ знакового расстояния до поверхности:

$$\phi_i^h = \phi^h(\mathbf{x}_i) = \text{sign}(\mathbf{N} \cdot \mathbf{n}_i) \|\mathbf{x}_i - \mathbf{P}_i^h\|.$$

В произвольной точке области, проектирующейся на поверхность (но не на ее край), вектор единичной нормали в точке проекции и значение функции знакового расстояния могут быть восстановлены интерполяцией. Если $\{\xi_i\}_{i=1}^4$ – барицентрические координаты точки \mathbf{x} относительно тетраэдра, в котором она расположена, то имеем:

$$\mathbf{x}_p = \mathbf{P}^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{P}_i^h \xi_i, \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{n}_i \xi_i, \quad \phi^h(\mathbf{x}_p) = \sum_{i=1}^4 \phi_i^h \xi_i,$$

где \mathbf{n}_i определены согласно (5).

Рассмотрим теперь аналогичные вопросы для точек, проекция которых попадает на край $\partial\mathcal{F}$ поверхности. Пусть \mathbf{n} – вектор в точке края поверхности, который является нормальным к ее краю и лежит в касательной плоскости поверхности. Для произвольной точки \mathbf{x} области Ω_f («трубчатой» окрестности края поверхности) определим аппроксимацию вектора \mathbf{n} в точке проекции $\mathbf{x}_p = \mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_f(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{n}^h = \left(\mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x}) \right) / \left\| \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}^h(\mathbf{x}) \right\|.$$

Очевидно, этот вектор аппроксимирует точное значение вектора нормали \mathbf{n} с точностью $\mathcal{O}\left(\left\| \mathbf{P}_f(\mathbf{x}) - \tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \right\|\right)$. Если «диаметр» трубчатой окрестности Ω_f линейно уменьшается с уменьшением шага расчетной сетки (например, «диаметр» окрестности ограничен фиксированным числом шагов сетки), то $\left\| \mathbf{n} - \mathbf{n}^h \right\| = \mathcal{O}(h)$, $h \rightarrow 0$. Аппроксимации векторов \mathbf{t}^h и \mathbf{b}^h , касательного к

краю и нормального к краю и к поверхности в точке \mathbf{x}_p , могут быть вычислены как

$$\mathbf{t}^h = \mathbf{n}^h \times \mathbf{p}, \quad \mathbf{p} = \left(\mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) \right) / \left\| \mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}) \right\|, \quad \mathbf{b}^h = \mathbf{t}^h \times \mathbf{n}^h.$$

Приведенные выше построения иллюстрирует рис.1.

Таким образом, в каждой точке проекции может быть построен локальный ортогональный базис векторов. Ориентация этого базиса может быть определена, если известен не зависящий от точки поверхности «глобальный» вектор \mathbf{N} , задающий ориентацию поверхности.

Введенный базис позволяет определить в каждом перпендикулярном фронту трещины «сечении» трубчатой окрестности Ω_f локальные декартовы и полярные координаты по правилу:

$$X = \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}, \quad Y = \mathbf{b} \cdot \mathbf{r}, \quad r = \|\mathbf{r}\|, \quad \theta = \text{atan2}(Y, X), \quad \mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{P}_f^h(\mathbf{x}),$$

где функция atan2 определена всюду, кроме точки $x=0, y=0$, и возвращает лежащее в интервале $(-\pi, +\pi)$ значение полярного угла вектора \mathbf{r} в базисе (\mathbf{n}, \mathbf{b}) , см. рис.1 и 3. Функции, задающие поверхность и ее край как множества уровня ноль (см. (1)), могут быть восстановлены как $\phi(\mathbf{x}) = Y(\mathbf{x})$, $\psi(\mathbf{x}) = X(\mathbf{x})$.

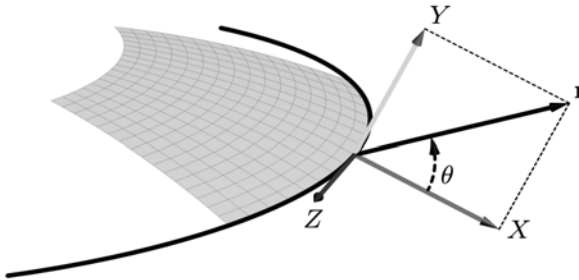


Рис.3. Локальные координаты в окрестности фронта трещины.

3. Постановка задачи теории упругости

В настоящем разделе рассмотрена постановка линейной задачи теории упругости, на примере которой далее будет продемонстрировано применение метода X-FEM.

Задача рассматривается в пространственной области Ω , целиком содержащей трещину, геометрия которой описывается срединной поверхностью \mathcal{F} , $\mathcal{F} \subset \Omega$. Поверхность трещины будем считать двухсторонней со сторонами \mathcal{F}^\pm и единичными внешними нормальными \mathbf{n}^\pm .

В квазистационарной постановке рассматриваемая модель состоит из одного уравнения закона сохранения импульса:

$$\nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0, \quad (6)$$

где \mathbf{T} – тензор напряжений Коши, $\mathbf{T} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$, $\mathbf{C} = \text{const}$ – тензор четвертого ранга упругих коэффициентов, \mathbf{b} – вектор объемной плотности внешних сил, $\mathbf{E} = [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T] / 2$ – тензор деформаций.

На боковых поверхностях трещины будем считать заданными динамические граничные условия (Неймана), которые имеют вид $\mathbf{T}^\pm \cdot \mathbf{n}^\pm = -p_f \mathbf{n}^\pm$. На внешней границе области Ω будем считать заданными подходящие граничные условия Дирихле (заданные перемещения) или Неймана (заданные нормальные напряжения).

Рассмотрим слабую постановку задачи. Будем считать, что поле перемещений \mathbf{u} принадлежит пространству гладких векторных полей в области Ω , $\mathbf{u} \in V = V(\Omega)$, которые могут иметь разрыв на срединной поверхности $\mathcal{F} \subset \Omega$ трещины. Пусть Γ – внешняя граница области Ω . Таким образом, «полная» граница области Ω состоит из трех «кусков»: внешней границы Γ и боковых поверхностей трещины \mathcal{F}^\pm .

Для простоты далее будем считать, что на внешней границе области заданы однородные граничные условия Дирихле для перемещений, т.е. $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0}$.

Умножим уравнение (6) на произвольную функцию $\delta \mathbf{u} \in V$ и проинтегрируем по области Ω . Тогда с использованием соответствующей формулы Грина получим следующую слабую постановку задачи (6): определить векторное поле $\mathbf{u} \in V$ такое, что справедливо

$$\mathbb{A}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) + \langle \mathbf{t}_n, [[\delta \mathbf{u}]] \rangle = (\mathbf{b}, \delta \mathbf{u}), \quad \forall \delta \mathbf{u} \in V. \quad (7)$$

В последнем выражении $\mathbf{t}_n = -p_f \mathbf{n}$, $[[\cdot]] = (\cdot)^+ - (\cdot)^-$,

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathcal{F}} \varphi \psi d\mathcal{F}, \quad (u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega,$$

билинейная форма $\mathbb{A}_{\mathbf{u}}$ определена как

$$\forall \mathbf{u} \in V, \delta \mathbf{u} \in V: \quad \mathbb{A}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}(\mathbf{u}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta \mathbf{u}) d\Omega. \quad (8)$$

4. Конечномерные аппроксимации и метод X-FEM

«Стандартные» аппроксимации. Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (7) необходимо ввести конечномерные аппроксимации пространства V , которые будем обозначать верхним индексом h , $V^h \subset V$.

В соответствии с методом конечных элементов расчетная область Ω приближается сеточной областью Ω_h , которая является объединением ко-

нечных элементов ω_i , $i = \overline{1, N_e}$, где N_e – число конечных элементов. В дальнейшем положим, что область Ω – многогранник и $\Omega = \Omega_h$. В качестве конечных элементов будем рассматривать тетраэдры. Будем считать, что разбиение Ω_h области Ω на конечных элементы – правильное, то есть два конечных элемента либо не пересекаются, либо имеют общую вершину (узел), либо общее ребро, либо общую грань.

Базисные функции метода конечных элементов для аппроксимации всех требуемых полей будем относить к узлам \mathbf{x}_i , $i = \overline{1, N_n}$, расчетной сетки Ω_h . Будем использовать кусочно-линейные базисные функции: $N_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$, внутри тетраэдра N_i продолжены линейно. Отметим, что к одному узлу может быть отнесено более одной степени свободы решения (более одного неизвестного). Соответственно, и число базисных функций, отнесенных к узлу, может быть больше единицы.

Аппроксимация билинейной формы, входящей в слабую постановку задачи (7), строится стандартным способом. К каждому из узлов конечного элемента отнесены три компоненты поля перемещений. Тогда вектор узловых значений элемента имеет вид

$$\{\mathbf{u}^{(e)}\} = \left[u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}, \dots, u_x^{(4)}, u_y^{(4)}, u_z^{(4)} \right]^T \in \mathbb{R}^{12 \times 1},$$

где $u_\alpha^{(i)}$ – значение компонента $\alpha = \overline{1, 3}$ векторного поля перемещений в узле $i = \overline{1, 4}$ конечного элемента. Здесь и далее величины в квадратных скобках $[\cdot]$ обозначают матрицы, величины в фигурных скобках $\{\cdot\}$ – вектор-столбцы.

Пусть теперь $[\Phi] = [N_1 \mathbf{I}, \dots, N_4 \mathbf{I}] \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$ – матрица базисных функций, $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ – единичная матрица. Тогда поле перемещений внутри конечного элемента ω_e имеет вид $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})|_{\omega_e} = [\Phi] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\} \in \mathbb{R}^3$.

В силу того, что тензоры деформаций и напряжений являются симметричными, будем представлять их в виде 6-мерных вектор-столбцов вида

$$\{\mathbf{T}\} = \left[T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}, T_{yz}, T_{xz}, T_{xy} \right]^T \in \mathbb{R}^6,$$

$$\{\mathbf{E}\} = \left[E_{xx}, E_{yy}, E_{zz}, 2E_{yz}, 2E_{xz}, 2E_{xy} \right]^T \in \mathbb{R}^6.$$

Перемещения и деформация связаны следующим матричным дифференциальным оператором: $\{\mathbf{E}\} = [\mathbf{D}] \cdot \mathbf{u}^{(e)} = [\mathbf{D}] \cdot [\Phi] \cdot \{\mathbf{u}^{(e)}\}$, где

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \partial_x & 0 & 0 & \partial_y & \partial_z & 0 \\ 0 & \partial_y & 0 & \partial_x & 0 & \partial_z \\ 0 & 0 & \partial_z & 0 & \partial_x & \partial_y \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{6 \times 3}.$$

Закон Гука, связывающий напряжения и деформации, в матричных обозначениях имеет вид $\{\mathbf{T}\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\mathbf{E}\}$, где $[\mathbf{C}]$ – матрица упругих коэффициентов. В частном случае изотропной среды матрица $[\mathbf{C}]$ имеет вид

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 6},$$

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad (C_{11} - C_{12})/2 = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где E – модуль Юнга среды, ν – коэффициент Пуассона.

Наконец, подынтегральное выражение билинейной формы (8) примет вид

$$\mathbf{E}(\mathbf{u}^{(e)}) : \mathbf{C} : \mathbf{E}(\delta\mathbf{u}^{(e)}) = \{\delta\mathbf{u}^{(e)}\}^T \left([\mathbf{\Phi}]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{\Phi}] \right) \{\mathbf{u}^{(e)}\}.$$

Пусть теперь

$$\mathbb{A}^{(k)} = \int_{\omega_k} \left([\mathbf{\Phi}]^T \cdot [\mathbf{D}]^T \cdot [\mathbf{C}] \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{\Phi}] \right) d\Omega \in \mathbb{R}^{12 \times 12} \quad (9)$$

– локальная матрица жесткости конечного элемента ω_k . Пусть $\mathcal{I}^{(k)}$ – множество глобальных номеров локальных степеней свободы i ($i = \overline{1, 12}$) конечного элемента номер k . Зададим для каждого конечного элемента матрицы проекторы, сопоставляющие полному вектору неизвестных вектор неизвестных, отнесенных к одному элементу с номером k по правилу:

$$\mathbf{P}_{il}^{(k)} = \begin{cases} 1, & l \in \mathcal{I}^{(k)}, \\ 0, & l \notin \mathcal{I}^{(k)}, \end{cases} \quad i = \overline{1, 12}, \quad l = \overline{1, N_u}; \quad \mathbf{P}^{(k)} \in \mathbb{R}^{12 \times N_u},$$

где $N_u = 3N_n$ – число степеней свободы для описания поля перемещений.

Вектор неизвестных, соответствующий одному конечному элементу с номером k , имеет вид $\{\mathbf{u}^{(k)}\} = [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot \{\mathbf{u}^h\}$, где $\{\mathbf{u}^h\} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$ – полный вектор неизвестных.

Тогда значения билинейной формы \mathbb{A} на элементах конечномерного пространства $V_{\mathbf{u}}$ имеют вид

$$\mathbb{A}(\mathbf{u}, \delta \mathbf{u}) = \{\mathbf{u}^h\}^T \cdot [\mathbb{A}^h] \cdot \{\delta \mathbf{u}^h\}, \quad \mathbb{A}^h = \sum_{k=1}^{N_e} [\mathbf{P}^{(k)}] \cdot [\mathbb{A}^{(k)}] \cdot [\mathbf{P}^{(k)}]^T, \quad (10)$$

где $\mathbb{A}^{(k)}$ – матрица жесткости конечного элемента с номером k , вычисляемая в соответствии с (9). Соотношение (10) является формализацией стандартного алгоритма сборки матрицы жесткости из матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Для вычисления значений матрицы $\mathbb{A}^{(k)}$ выражение (9) интегрируется численно с использованием квадратурных формул нужного порядка, см., например, [14].

Пространства функций для разрывных полей. В рассматриваемой постановке поля перемещений, напряжений и деформаций терпят разрыв на срединной поверхности трещины. Величина этого разрыва априорно неизвестна и определяется решением задачи. В настоящем разделе описан способ построения соответствующих конечномерных пространств V^h и базиса в них для случая, когда срединная поверхность трещины не согласована с расчетной конечноэлементной сеткой, заданной в области Ω_h . Такой подход удобен тем, что не требует в обязательном порядке перестройки расчетной сетки при развитии трещины.

В соответствии с методом X-FEM конечномерная аппроксимация решения состоит из следующих частей: стандартные, непрерывные аппроксимации гладкой части решения; дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поля перемещений (для конечных элементов, которые срединная поверхность трещины делит на две несвязанные части); дополнительные базисные функции для аппроксимации разрыва поля перемещений в окрестности фронта трещины (для конечных элементов, которые содержат фронт трещины, при этом срединная поверхность трещины *не* делит элемент на две несвязанные части).

Пусть, как и ранее, \mathcal{F} – срединная поверхность трещины, \mathcal{I} – множество узлов сетки. Будем считать, что узлу i соответствует базисная функция $N_i(\mathbf{x})$. В соответствие со взаимным расположением трещины и узлов сетки разобьем все множество узлов сетки на три подмножества. К множеству \mathcal{I}_t отнесем такие узлы i , что носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечение с фронтом $\partial \mathcal{F}$ трещины:

$$\mathcal{I}_t = \{i \in \mathcal{I} : \text{supp } N_i(\mathbf{x}) \cap \partial\mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

К множеству \mathcal{I}_c отнесем такие узлы i , что носитель соответствующей базисной функции $N_i(\mathbf{x})$ имеет непустое пересечение со срединной поверхностью \mathcal{F} трещины, при этом узел не входит в множество \mathcal{I}_t :

$$\mathcal{I}_c = \{i \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{I}_t : \text{supp } N_i(\mathbf{x}) \cap \mathcal{F} \neq \emptyset\}.$$

Последнее множество дополняет первые два до полного множества узлов $\mathcal{I}_s = \mathcal{I} \setminus (\mathcal{I}_t \cup \mathcal{I}_c)$. По построению множества $\mathcal{I}_{t,c,s}$ попарно не пересекаются, их объединение равняется полному множеству узлов \mathcal{I} .

В соответствии с методом X-FEM представление решения имеет вид

$$\begin{aligned} u_\alpha^h(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathcal{I}_s} N_i(\mathbf{x}) u_\alpha^{(i)} + \sum_{i \in \mathcal{I}_c} N_i^*(\mathbf{x}) [H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)] a_\alpha^{(i)} + \\ & + \sum_{k=1}^m \sum_{i \in \mathcal{I}_t} N_i^*(\mathbf{x}) [B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)] b_{\alpha,i}^{(k)}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $N_i(\mathbf{x})$ – стандартная базисная функция, соответствующая узлу i ; $u_\alpha^{(i)}$ – соответствующее узловое значения компонента α поля перемещений; $N_i^*(\mathbf{x})$ – вообще говоря, произвольные отнесенные к узлам сетки достаточно гладкие функции, задающие разбиение единицы в окрестности трещины (обычно принимают $N_i^*(\mathbf{x}) = N_i(\mathbf{x})$); $B^k(\mathbf{x})$ – некоторый набор функций, описывающий асимптотику поля перемещений в окрестности фронта трещины; $H(\mathbf{x})$ – функция, описывающая разрывный характер решения в окрестности срединной поверхности трещины.

В представлении (11) первая сумма является аппроксимацией гладкой компоненты решения, вторая служит для представления разрывной компоненты решения в окрестности срединной поверхности \mathcal{F} трещины, третья – для представления разрывной и сингулярной компоненты решения в окрестности фронта $\partial\mathcal{F}$ трещины.

В качестве функции $H(\mathbf{x})$ проще всего взять функцию типа функции Хевисайда, принимающую постоянные значения 0 и 1 по разные стороны от срединной поверхности трещины, $H(\mathbf{x}) = h(\varphi(\mathbf{x}))$, где $h(x)$ – обычная функция Хевисайда скалярного аргумента, $\varphi(\mathbf{x})$ – функция знакового расстояния, задающая срединную поверхность \mathcal{F} трещины.

Набор функций $B^k(\mathbf{x})$, $k = \overline{1, m}$, предназначен для описания как асимптотического поведения решения в окрестности фронта трещины, так и его разрывного характера. Для рассматриваемой модели и в системе координат, приведенной на рис.3, они имеют вид

$$\mathbf{V}(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin(\theta/2), \sqrt{r} \cos(\theta/2), \sqrt{r} \sin(\theta/2) \sin(\theta), \sqrt{r} \cos(\theta/2) \sin(\theta) \right\}.$$

Вычисление матрицы жесткости отдельного элемента, содержащего узлы, в которых заданы дополнительные базисные функции

$$\Psi_i(\mathbf{x}) = N_i^*(\mathbf{x})(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_i)), \quad \Psi_i^{(k)} = N_i^*(\mathbf{x})(B^k(\mathbf{x}) - B^k(\mathbf{x}_i)),$$

выполняется аналогично ситуации без использования дополнительных базисных функций: в вектор узловых значений конечного элемента добавляются дополнительные степени свободы,

$$\left\{ \mathbf{u}^{(e)} \right\} = \left[u_x^{(1)}, u_y^{(1)}, u_z^{(1)}, \dots, u_x^{(4)}, u_y^{(4)}, u_z^{(4)}, a_x^{(1)}, a_y^{(1)}, a_z^{(1)}, \dots, b_{x,1}^{(1)}, b_{y,1}^{(1)}, b_{z,1}^{(1)}, \dots \right]^T,$$

а в матрицу $[\Phi]$ – соответствующие новым степеням свободы блоки-столбцы размерности 3×3 вида $[\Phi_i] = \Psi_i \mathbf{I}$, $[\Phi_i^{(k)}] = \Psi_i^{(k)} \mathbf{I}$. Дальнейшая процедура ничем не отличается от рассмотренной ранее.

5. Особенности реализации метода X-FEM/СРР

Рассмотрим теперь особенности реализации метода X-FEM с использованием проекции ближайшей точки («closest point projection», СРР) для представления срединной поверхности трещины.

В соответствии с изложенным в предыдущем разделе описанием метода X-FEM, для его реализации необходимы (а) возможность определения взаимного расположения конечных элементов и срединной поверхности трещины и ее фронта; (б) алгоритм вычисления локальных полярных координат (r, θ) точки в окрестности фронта; (в) возможность интегрирования заданных на срединной поверхности трещины полей по поверхности трещины. Последние два вопроса были подробно рассмотрены в разд. 2.

Для решения первой задачи могут быть использованы два подхода. Первый из них предполагает, что в окрестности трещины в соответствии с указанным в разд. 2 способом локально восстанавливаются функции ϕ и ψ , задающие геометрию трещины своими поверхностями уровня ноль. Далее взаимное положение срединной поверхности трещины, ее фронта и конечного элемента определяется аналогично тому, как это происходит в классическом варианте метода X-FEM, а именно: на основе знаков значений функций ϕ и ψ . Так, например, считается, что конечный элемент имеет непустое пересечение положительной меры со срединной поверхностью, если значения функции ϕ в узлах конечного элемента отличны от нуля и имеют разные знаки.

Второй способ предполагает использование лишь значений проектора в узлах. В этом случае считается, что срединная поверхность трещины и за-

данный конечный элемент пересекаются, если векторы проекций узлов на срединную поверхность трещины имеют различные направления относительно вектора, задающего ориентацию поверхности (то есть существуют по крайней мере два узла, такие что скалярное произведение векторов проекций в них отрицательно). Для определения конечного элемента, содержащего фронт трещины, можно использовать аналогичный критерий: конечный элемент содержит фронт трещины, если существуют три узла тетраэдра, векторы проекций которых «сонаправлены» (в смысле знака скалярного произведения), а четвертый – направлен в противоположном им направлении (опять же, в смысле знака скалярного произведения соответствующих векторов).

6. Примеры расчетов

В качестве задачи для демонстрации работоспособности предложенной методики рассматривается задача о стационарной круговой трещине («pen-pu shaped») [15], возникающей в однородной упругой среде при ее одноосном нагружении на бесконечности. Схематично она представлена на рис.4, где p обозначает величину нагружения, a – радиус трещины, нагружение осуществляется вдоль оси Oy .

Аналитическое решение данной задачи записывается в виде [15]

$$u_r(r, y) = -\frac{\nu pr}{E} + \frac{(1+\nu)pr}{\pi E} \left[(1-2\nu) \left(\frac{a(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2} - \arcsin \frac{a}{l_2} \right) + \frac{2a^2 |y| (a^2 - l_1^2)^{1/2}}{l_2^2 (l_2^2 - l_1^2)} \right], \quad (12)$$

$$u_y(r, y) = \frac{py}{E} + \frac{2(1+\nu)p}{\pi E} \left[2(1-\nu) \left(\frac{y}{|y|} (a^2 - l_1^2)^{1/2} - y \arcsin \frac{a}{l_2} \right) + y \arcsin \frac{a}{l_2} - \frac{ay(l_2^2 - a^2)^{1/2}}{l_2^2 - l_1^2} \right], \quad (13)$$

где $r = \sqrt{x^2 + z^2}$, $u_x = u_r \sin \phi$, $u_z = u_r \cos \phi$ и $2l_{1,2} = \sqrt{(a+r)^2 + y^2} \mp \sqrt{(a-r)^2 + y^2}$.

Расчетная область представляет собой куб со стороной $L = 5$ м, в центре которого в плоскости $y = L/2$ расположена срединная поверхность трещины, имеющая форму диска радиусом $a = 1$ м. Величина нагружения составляет $p = 300$ атм. Использовались значения коэффициент Пуассона $\nu = 0.25$ и модуля Юнга $E = 1.5 \times 10^{10}$ Н/м².

Расчеты проводились на трех адаптивных тетраэдральных сетках, имеющих сгущение в окрестности срединной поверхности трещины и отличаю-

щихся степенью измельчения ячеек. Их параметры представлены в табл.1. Часть элементов расчетной сетки № 3, обладающей наилучшей степенью измельчения, представлена на рис.5.

Табл.1. Параметры расчетных сеток.

номер сетки	число узлов	число элементов
1	7983	43523
2	17932	104981
3	27410	162486

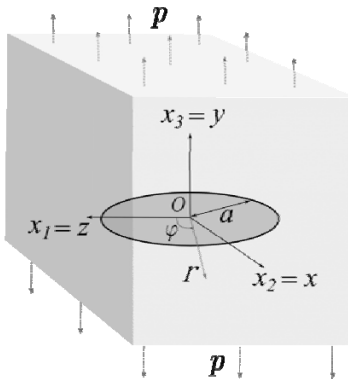


Рис.4. Схематичный вид задачи о круговой трещине.

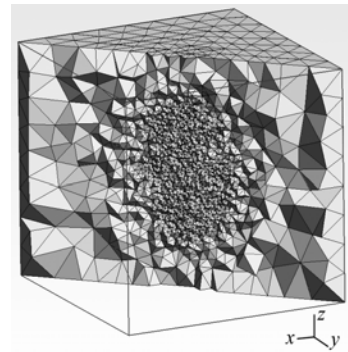


Рис.5. Часть элементов расчетной сетки № 3.

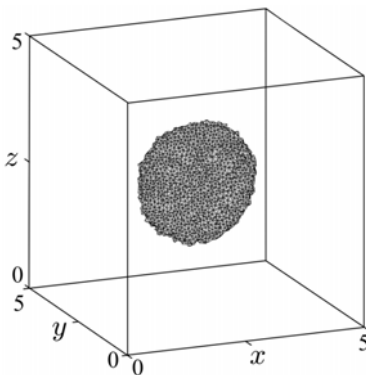


Рис.6. Область в окрестности срединной поверхности трещины, в которой определен проектор ближайшей точки.

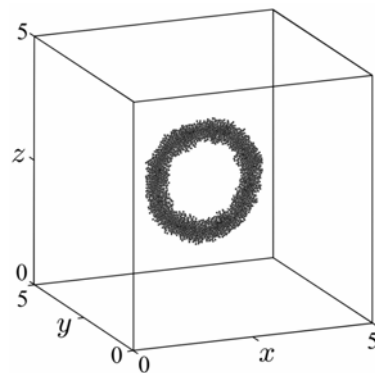


Рис.7. Визуализация проектора ближайшей точки на фронт трещины.

В предложенном алгоритме геометрия трещины описывается с помощью оператора проекции ближайшей точки. В случае конечномерной задачи этот проектор задается в узлах расчетной конечноэлементной сетки и сопоставляет каждому узлу сетки его проекцию на срединную поверхность

трещины. В силу того, что указанный проектор является гладким отображением лишь локально, в небольшой окрестности срединной поверхности трещины, в реализации имеет смысл определять его только для множества узлов тетраэдров триангуляции, образующих первые несколько слоев «вокруг» трещины. На рис.6 показано такое множество тетраэдров (конечных элементов). На рис.7 дополнительно приведена визуализация действия проектора ближайшей точки на фронт трещины. Указанные структуры данных являются одними из основных в используемом подходе: они применяются при построении аппроксимаций методом X-FEM и при описании эволюции срединной поверхности трещины.

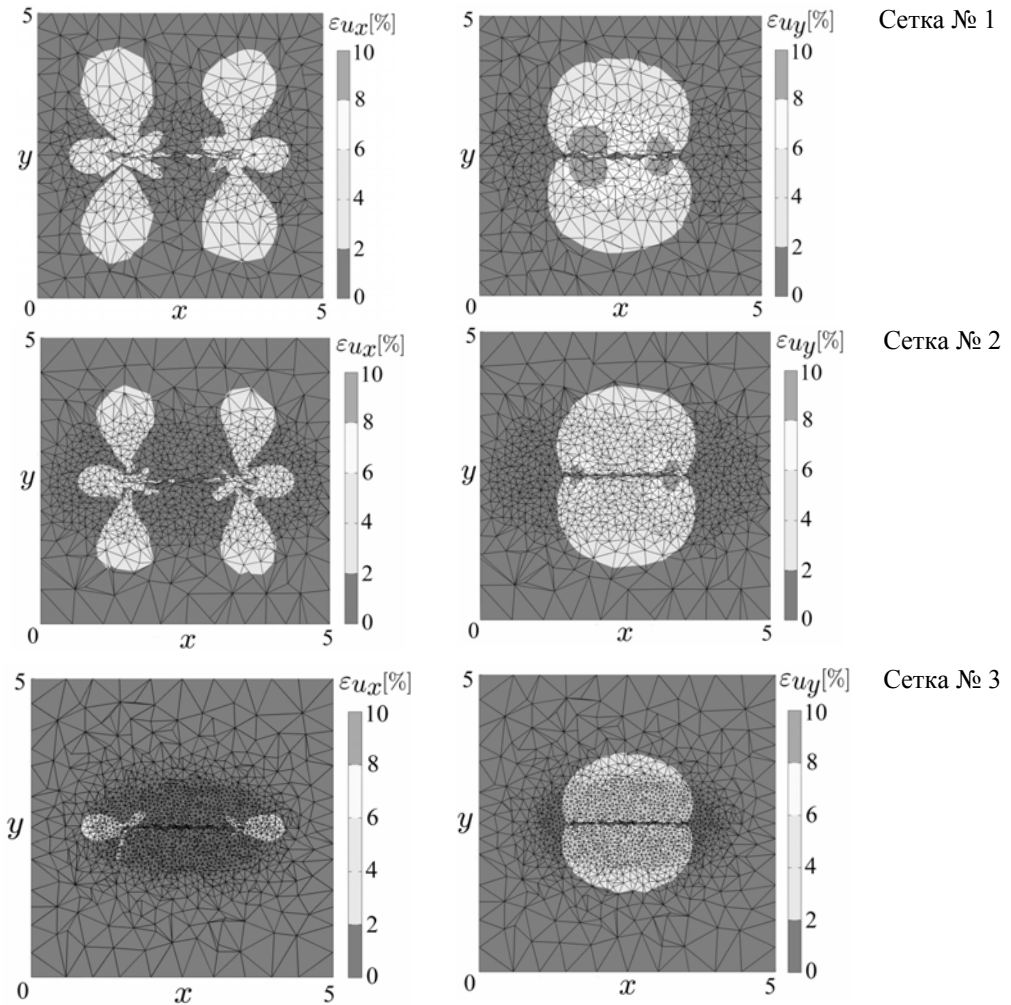


Рис.8. Относительная ошибка полей u_x и u_y в плоскости $z = L/2$.

На рис.8 показаны относительные ошибки численного решения в сравнении с точным (с использованием для оценки сеточной нормы в пространстве l_2) для компонент u_x и u_y поля перемещений на всех трех сетках (распределение компоненты u_z с точностью до перестановки осей и погрешности решения совпадает с распределением u_x). Четко виден аналог сеточной сходимости, когда при уменьшении характерного линейного размера тетраэдров в окрестности срединной поверхности трещины ошибка убывает.

Рассмотрим теперь ряд расчетов, в которых трещина эволюционирует. Для этого сначала кратко рассмотрим модель эволюции трещины.

Пусть $t \geq 0$ – времениподобный параметр, с увеличением которого поверхность эволюционирует. Обозначим через \mathcal{F}_t рассматриваемую поверхность в момент времени t . Будем считать, что при $t_1 \geq t_2$ выполняется условие $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$. Другими словами, семейство поверхностей, соответствующих большим моментам времени, содержится внутри поверхности, соответствующей любому большему моменту времени. Будем считать, что (а) в каждый момент времени t в рассматриваемом интервале поверхность \mathcal{F}_t целиком содержится внутри области Ω и (б) эволюция поверхности \mathcal{F} является «гладкой», то есть поверхность в каждый момент времени может быть гладко и взаимно-однозначно отображена, например, на диск единичного радиуса в \mathbb{R}^2 . В частности, в ходе эволюции у \mathcal{F} не должны появляться самопересечения и т.д.

В этом случае семейство поверхностей $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ может быть представлено как объединение начальной поверхности $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}_0$ и следа «движения» ее криволинейного края, $\mathcal{F}_t = \{\mathcal{F}_0 \cup \gamma(t') \mid 0 \leq t' \leq t\}$, где $\gamma(t) \equiv \partial \mathcal{F}_t$ – край поверхности \mathcal{F}_t в момент времени t .

В дальнейшем будем считать, что в каждый момент времени на линии $\gamma(t)$ задано векторное поле «скорости» $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} \in \gamma(t)$, описывающее ее эволюцию. Т.о., движение (лагранжевой) точки границы описывается уравнением $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ с начальным условием $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{x}_0 \in \gamma(0)$. Будем считать, что поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ является гладкой функцией точки $\mathbf{x} \in \gamma(t)$ в каждый фиксированный момент времени t и для каждой фиксированной (лагранжевой) точки границы является гладкой функцией времени.

В каждый момент времени будем описывать поверхность \mathcal{F} с помощью оператора проекции ближайшей точки. Построение алгоритма вычисления этого оператора (точнее, его аппроксимаций) в каждый момент времени при его известном значении в предыдущие моменты времени и заданной скорости \mathbf{v} подробно рассмотрено в [12].

На рис.9 и 10 показаны решения задачи с подвижной трещиной в после-

довательные моменты времени. В силу того, что основная цель данного эксперимента – проверка надежности работы алгоритма X-FEM/CP, для задания движения трещины использовалась явная зависимость скорости точек фронта трещины от точки пространства и момента времени. Так как задача рассматривается в квазистационарной постановке (уравнения закона сохранения импульса не содержат производные по времени), время фактически является формальным монотонно возрастающим параметром.

В первом случае, см. рис.9, трещина развивается вдоль оси Ox . Поле скорости имеет вид $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = v_x(x, t) \mathbf{e}_x$, $v_x(x, t) = (1/1800) \text{sign}(x - x_c)$, где (x_c, y_c, z_c) – координаты центра расчетной области в начальный момент времени.

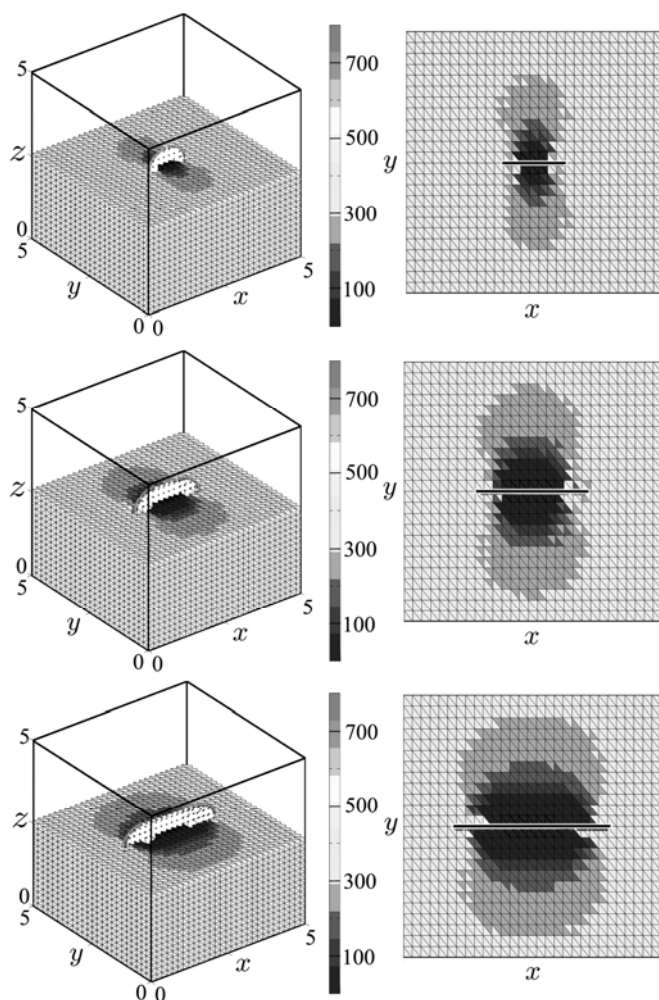


Рис.9. Распределение компоненты T_{yy} поля полных напряжений в различные моменты времени (сверху–вниз), случай 1.

Во втором случае, см. рис.10, заданное выражения для скорости движения точек фронта трещины имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_x, v_y, v_z)^T, \quad v_x = \left((1 + \exp(-2(x - x_c)))^{-1} - 1 \right) / 4,$$

$$v_y = 0.2(y - y_c), \quad v_z = -2.0(y - y_c) + 0.4(h(z - z_c) - 1)$$

и приводит к искривлению срединной поверхности трещины.

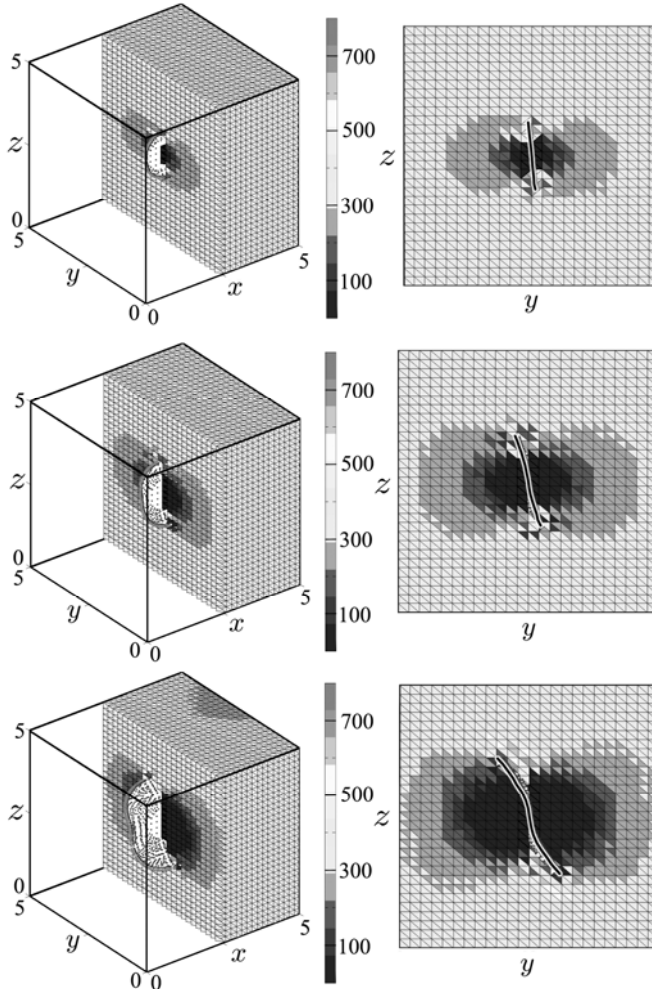


Рис.10. Распределение компоненты T_{yy} поля полных напряжений в различные моменты времени (сверху–вниз), случай 2.

Показанные рисунки демонстрируют качественно верное решение задачи. Анализ численной сходимости в рассматриваемых примерах не проводился. На рисунках показана лишь часть расчетной области.

7. Заключение

В работе предложен алгоритм X-FEM/СРР – вариант «расширенного» метода конечных элементов (X-FEM) для расчета задач теории упругости с учетом крупномасштабных трещин, геометрия которых не согласована с геометрией расчетной сетки. Предложенный подход обладает возможностями, не уступающими традиционному варианту метода X-FEM, в котором для представления поверхности применяется метод проекций уровня. В частности, срединная поверхность трещины может представлять собой произвольную достаточно гладкую поверхность с краем. Описан алгоритм метода, его отличия от традиционных вариантов, использующих представление поверхности на основе метода множеств уровня.

Представлены результаты расчетов задачи напряженно-деформированного состояния упругой среды со стационарной круговой трещиной при одноосном нагружении среды на бесконечности. Проведено сравнение результатов расчетов на трех адаптивных сетках с различным уровнем измельчения и данных известного аналитического решения, продемонстрировано приемлемое совпадение. Результаты расчетов показали практическую возможность применения и работоспособность предложенного метода X-FEM/СРР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *T. Belytschko, T. Black.* Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1999, v.45, p.601–620.
2. *N. Moës, J. Dolbow, T. Belytschko.* A finite element method for crack growth without remeshing // *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 1999, v.46, p.131–150.
3. *T.P. Fries, T. Belytschko.* The extended/generalized finite element method: An overview of the method and its applications // *Intern. J. Numer. Methods Engrg.*, 2012, v.84, p.253–304.
4. *T.P. Fries, N. Moës (editors), A. Zilian.* The extended finite element method. Special issue // *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 2011, v.86, p.403–666.
5. *A. Gravouil, N. Moës, T. Belytschko.* Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part II: Level set update // *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 2002, v.53, p.2569–2586.
6. *N. Moës, A. Gravouil, T. Belytschko.* Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets – Part I: Mechanical model // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2002, v.53, p.2549–2568.
7. *S.J. Osher, R.P. Fedkiw.* *Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces.* Springer-Verlag, 2002.
8. *M. Stolarska, D. Chopp, N. Moës, T. Belytschko.* Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2001, v.51, p.943–960.
9. *C.B. Macdonald, J. Brandman, S.J. Ruuth.* Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // *J. Comp. Phys.*, 2011, v.230, p.7944–7956.

10. *G. Ventura, E. Budyn, T. Belytschko*. Vector level sets for description of propagating cracks in finite elements // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2003, v.58, p.1571–1592.
11. *M. Berger, A. Tagliasacchi, L. Seversky, P. Alliez, J. Levine, A. Sharf, C. Silva*. State of the Art in Surface Reconstruction from Point Clouds // *EUROGRAPHICS 2014 / S. Lefebvre and M. Spagnuolo*. STAR – State of The Art Report, 2014.
12. *А.В. Иванов, Е.Б. Савенков*. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // *Научная Визуализация*, 2017, т.9, №2, с.64–81.
англ. пер.: *A.V. Ivanov, E.B. Savenkov*. Simulation and visualization of the dynamics of a surface with a movable boundary on a stationary unstructured mesh // *Scientific Visualization*, 2017, v.9, № 2, p.64–81.
13. *T. März, C.B. Macdonald*. Calculus on surfaces with general closest point functions // *SIAM J. Numer. Anal.*, v.50, № 6, p.3303–3328.
14. *O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor*. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, 2005.
15. *A.F. Bower*. *Applied Mechanics of Solids*. CRC Press, 2009.

Поступила в редакцию 14.05.2018

После доработки 14.05.2018

Принята к публикации 18.06.2018