

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОСОБЕННОСТИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В УПРУГОМ ТРУБОПРОВОДЕ

© 2019 г. *А.Н. Волобуев*

Самарский государственный медицинский университет, кафедра медицинской физики, Самара volobuev47@yandex.ru

DOI: 10.1134/S0234087919060030

Рассмотрен процесс течения жидкости в упругом трубопроводе с закрепленными концами. Показано, что в таком трубопроводе возможно возникновение автоколебаний стенки и потока жидкости или флаттера оболочечной моды. Представлено решение системы нелинейных гидродинамических уравнений, описывающих эти автоколебания, в элементарных функциях. Показано, что стоячие волны в упругом трубопроводе формируются не вследствие сложения прямой и обратной бегущих волн.

Ключевые слова: упругий трубопровод, нелинейная система, автоколебания, стоячие волны.

NONLINEAR FEATURES OF A FLUID FLOW IN THE ELASTIC PIPELINE

A.N. Volobuev

Samara State Medical University, Department of Medical Physics, Samara volobuev47@yandex.ru

Process of a fluid flow in the elastic pipeline with the fixed ends is considered. It is shown that in such pipeline probably occurrence of auto-oscillations of a wall and a fluid stream or flutter of a skin mode. The solution of a system of the nonlinear hydrodynamical equations describing these auto-oscillations in elementary functions is submitted. It is shown that standing waves in the elastic pipeline arise not owing to summation of direct and return running waves.

Key words: elastic pipeline, nonlinear system, auto-oscillations, standing waves.

1. Введение

Возникновение автоколебаний в упругом трубопроводе – важная гидродинамическая задача. Это связано с тем, что автоколебания часто приводят к нарушению нормального функционирования различных конструкций, в том числе и трубопроводов. В частности, такие колебания и, как следствие, вибрации, повышают гидравлическое сопротивление трубопроводов.

Гидро- или аэроупругая неустойчивость или флаттер – достаточно распространенное явление в природе и технике [1]. Это явление зачастую является причиной разрушения мостов, самолетов и т.д.

В трубопроводной системе флаттер или гидродинамическая неустойчивость по типу «поток – стенка» – это возникновение совместных высокочастотных автоколебаний упругой стенки и потока.

Флаттер в упругих трубопроводах может быть двух типов: балочной моды и оболочечной моды. Флаттер балочной моды возникает при истечении жидкости из открытого трубопровода. При этом конец упругого трубопровода, например, лежащего на земле, совершает беспорядочные колебания. В трубопроводной системе, в которой имеются упругие участки, закрепленные с обеих сторон, флаттер балочной моды возникнуть не может. Но может появиться флаттер оболочечной моды, связанный с колебаниями стенок трубопровода, по которому течет жидкость.

Течение в упругом трубопроводе – принципиально нестационарный процесс. Действительно, любое случайное увеличение скорости потока в каком-либо месте упругого трубопровода приводит к уменьшению в этом месте, вследствие «эффекта Бернулли», давления в потоке. За счет упругости трубопровода и действия закона Гука площадь поперечного сечения трубопровода также начинает уменьшаться, что еще больше увеличивает скорость потока. Возникает положительная обратная связь, приводящая к схлопыванию упругого трубопровода. Но необходимость прохождения определенного расхода жидкости раскрывает трубопровод. Процесс повторяется периодически. Возникают совместные автоколебания стенки трубопровода и потока в нем, т.н. неустойчивость типа «поток-стенка». Эти автоколебания проявляются в виде вибраций трубопроводов.

Процесс возникновения автоколебательного режима течения в упругом трубопроводе непосредственно не связан с наличием вязкости жидкости, поэтому будем рассматривать возникновение такого режима течения в идеальной жидкости, а влияние вязкости отметим в дальнейшем.

Возникновение автоколебательного режима течения описывается системой нелинейных уравнений гидродинамики, которая не сводится к известным нелинейным уравнениям [2].

2. Уравнения гидродинамики жидкости в упругом трубопроводе

Упругий участок трубопровода с закрепленными концами, по которому течет жидкость со скоростью V в направлении координаты X , показан на рис.1.

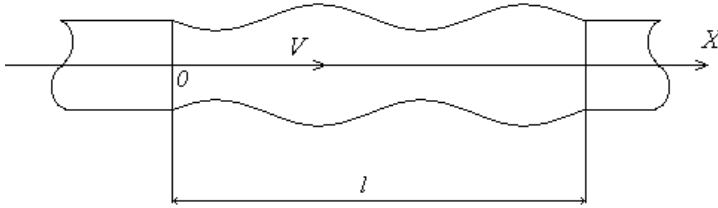


Рис.1. Упругий участок трубопровода.

Упругий участок трубопровода длиной l закреплен между жесткими участками. Используем уравнения гидродинамики, впервые предложенные при решении задачи Н.Е. Жуковского о гидравлическом ударе [3]. При постоянной плотности жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial(VS)}{\partial X} = 0, \tag{1}$$

где S – площадь сечения трубопровода, через которую течет жидкость, t – время. При отсутствии трения в жидкости уравнение импульса запишем в виде

$$\frac{d(SV)}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(PS)}{\partial X}, \tag{2}$$

где ρ – плотность жидкости, которую считаем постоянной, P – давление в жидкости. Система уравнений (1), (2) нелинейная. Используя уравнение неразрывности (1), преобразуем левую часть уравнения импульса (2):

$$\begin{aligned} \frac{d(SV)}{dt} &= V \frac{dS}{dt} + S \frac{dV}{dt} = V \left(\frac{\partial S}{\partial t} + V \frac{\partial S}{\partial X} \right) + S \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} \right) = \\ &= -VS \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right) + S \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial X} \right) = S \frac{\partial V}{\partial t}. \end{aligned} \tag{3}$$

Таким образом, уравнение импульса (2) можно записать в виде

$$S \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(PS)}{\partial X}. \tag{4}$$

Исследуем связь давления в жидкости P с параметрами потока. Запишем связь избыточного давления (над средним системным давлением) в жидкости с характеристиками потока и трубопровода, т.е. закон Гука, в виде [4]

$$P = D \frac{\Delta(dW)}{dW}, \quad (5)$$

где $dW = SdX$ – элемент объема упругого трубопровода, рис.2, D – упругость стенки трубопровода.

Различные варианты записи закона Гука, в том числе при медленном потоке в упругом трубопроводе, в задачах гидростатики упругих сосудов представлены в [5].

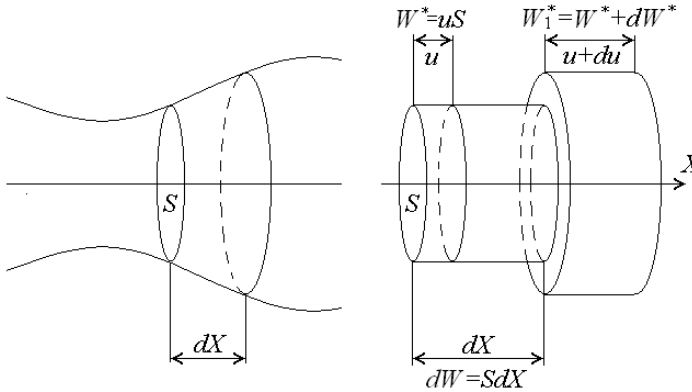


Рис.2. Деформация элемента объема трубопровода при течении жидкости.

На рис.2 величина u – это смещение элемента объема жидкости в процессе продольных колебаний относительно точки, движущейся с постоянной скоростью $V_0 = \text{const}$.

Допустим, что в процессе движения жидкости по трубопроводу изменения его площади сечения не происходит, но жидкость сжимается. Первоначальная длина элемента объема жидкости равна dX . В этом элементе объема площадь сечения S в начале участка dX переместилась на величину u . В следующем положении элемента объема в конце участка площадь сечения переместилась на величину $u + du$. Относительная деформация элемента объема равна $\varepsilon = \partial u / \partial X$.

В нашем случае несжимаемая жидкость течет по трубопроводу, сечение которого может изменяться. Вместо длины участка dX рассмотрим элемент объема $dW = SdX$, т.е. перейдем от линейной координаты X к объемной координате W . В объемной координате площадь сечения S в начале участка перемещается на величину $W^* = uS$. В конце участка площадь сечения перемещается на величину $W_1^* = W^* + dW^*$.

Относительная деформация ε элемента объема упругого трубопровода dW в процессе смещения жидкости вдоль него на расстояние u равна

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dW)}{dW} = \frac{W_1^* - W^*}{dW} = \frac{dW^*}{dW} = \frac{\partial(uS)}{S\partial X}. \quad (6)$$

При $S = \text{const}$ формула (6) переходит в обычное выражение для относительной деформации в твердом теле $\varepsilon = \partial u / \partial X$ [6].

Если в упругом трубопроводе возникли высокочастотные автоколебания стенки и потока, то на осредненное движение жидкости со скоростью V_0 накладывается колебательное движение со скоростью V_k , так что суммарная скорость

$$V = V_0 + V_k, \quad (7)$$

где колебательная составляющая скорости $V_k = \partial u / \partial t$.

Таким образом, из (5) и (6) следует, что избыточное давление в жидкости

$$P = D \frac{\partial(uS)}{S\partial X}. \quad (8)$$

Подставив (8) в (4), получаем нелинейное волновое уравнение

$$S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 (uS)}{\partial X^2}, \quad (9)$$

где учтено, что $c = \sqrt{D/\rho}$ – скорость распространения волны давления в упругом трубопроводе [7].

В уравнение неразрывности (1), если оно решается совместно с уравнением (9), входит только колебательная составляющая скорости жидкости. Это связано с тем, что общий расход через упругий трубопровод Q равен сумме среднего расхода $Q_0 = \text{const}$ и расхода за счет колебаний скорости $Q_k = V_k S_k$, т.е. $Q = Q_0 + Q_k$. Следовательно, уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} \left(S \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0. \quad (10)$$

3. Решение уравнений гидродинамики жидкости в эластичном трубопроводе

Рассмотрим решение нелинейной системы уравнений гидродинамики (9), (10) в виде стоячих волн. Известно, что стоячие волны могут возникать и в нелинейных системах [8].

Используем метод разделения переменных Фурье [9]. Представим неизвестные функции в виде

$$\begin{aligned} u &= F_1(X) \cdot \Phi_1(t); & S &= F_2(X) \cdot \Phi_2(t); \\ uS &= F_1(X) \cdot F_2(X) \cdot \Phi_1(t) \cdot \Phi_2(t) = F(X) \cdot \Phi(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Подставим (11) в (9) и, сократив на $\Phi_2(t)$, разделим переменные:

$$\frac{1}{\Phi_1} \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = c^2 \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dX^2} = -\omega^2 = \text{const}. \quad (12)$$

Получаем два уравнения:

$$\frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} + \omega^2 \Phi_1 = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 F}{dX^2} + k^2 F = 0, \quad (13)$$

где $k = \omega / c$ – волновое число, ω – циклическая частота волны.

Решение этих уравнений используем в виде

$$\Phi_1(t) = A_0 \sin(\omega t), \quad (14)$$

$$F(X) = A_1 \sin(kX), \quad (15)$$

где A_0, A_1, A_2 – постоянные величины. Начальные фазы тригонометрических функций примем равными нулю.

Функции $\Phi_2(t)$, $F_1(X)$ и $F_2(X)$ найдем из уравнения (10). Используя (11), получим

$$F_2 \frac{d\Phi_2}{dt} + \Phi_2 \frac{d\Phi_1}{dt} \frac{dF}{dX} = 0. \quad (16)$$

Уравнение (16) распадается на два уравнения:

$$\frac{1}{F_2} \frac{dF}{dX} = -\frac{1}{\Phi_2} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \Phi_1} = \Theta, \quad (17)$$

где Θ – постоянная величина. Решения уравнений (17) с учетом (15) имеют вид

$$\Phi_2 = A_2 \exp(-\Theta \Phi_1), \quad (18)$$

$$F_2 = \frac{A_1 k}{\Theta} \cos(kX). \quad (19)$$

Функция $F_1(X)$ находится из условия:

$$F_1 = \frac{F}{F_2} = \frac{\Theta}{k} \operatorname{tg}(kX). \quad (20)$$

Система функций (14), (18), (19), (20) позволяет получить решение системы уравнений (9), (10) в виде стоячих волн:

$$S = F_2 \Phi_2 = S_0 \cos(kX) \exp[-ku_0 \sin(\omega t)], \quad (21)$$

$$u = F_1 \Phi_1 = u_0 \operatorname{tg}(kX) \sin(\omega t), \quad (22)$$

$$V_k = \frac{\partial u}{\partial t} = u_0 \omega \operatorname{tg}(kX) \cos(\omega t), \quad (23)$$

где $S_0 = (A_1 A_2 k) / \Theta$, $u_0 = (\Theta A_0) / k$ – постоянные величины. Отметим, что величину u_0 нельзя считать амплитудным значением функции u , т.к. функция тангенса имеет сингулярность.

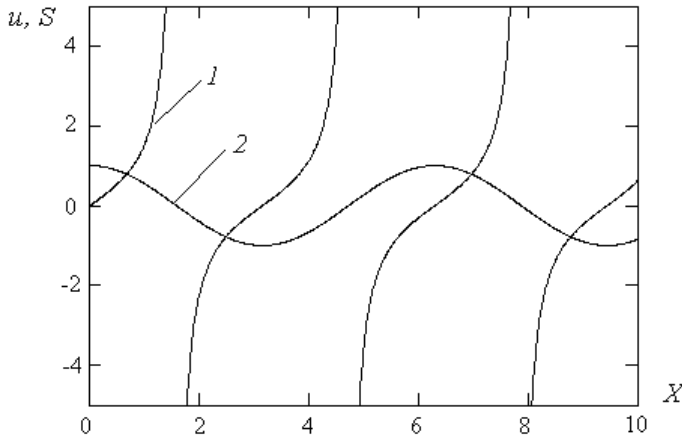


Рис.3. Стоячая волна, возникающая в уравнениях (9), (10). 1 – функция $u(X)$, 2 – функция $S(X)$.

На рис.3 показаны иллюстративные зависимости $u(X)$ и $S(X)$ в стоячей волне, являющейся решением системы уравнений (9), (10).

Давление в упругом трубопроводе определим исходя из соотношения (8):

$$P = D \frac{\partial(uS)}{S \partial X} = D \frac{\partial(F\Phi)}{F_2 \Phi_2 \partial X} = D \Theta \Phi_1. \quad (24)$$

Подставляя в (24) формулу (14), найдем давление в упругом участке трубопровода:

$$P = D \Theta A_0 \sin(\omega t). \quad (25)$$

Как и следовало ожидать, градиент давления (так как жидкость невязкая) получился равным нулю.

Если принять максимальную относительную деформацию площади сечения упругого трубопровода ε_{\max} и учесть, что амплитудное значение колебаний избыточного давления в трубопроводе $P_{\max} = D\varepsilon_{\max}$, то из (25) следует $\varepsilon_{\max} = \Theta A_0$. Следовательно, $u_0 = \varepsilon_{\max} / k$.

Рассмотрим более подробно физический смысл функций (21)–(23).

Площадь поперечного сечения упругого трубопровода величина положительная, поэтому в (21) необходимо использовать знак абсолютной величины для $\cos(kX)$. Абсолютную величину для $\operatorname{tg}(kX)$ в соответствии с уравнением неразрывности (10) нужно использовать и в уравнениях для перемещения (22) и скорости (23).

Таким образом, учитывая, что $k = \omega / c$, а также $u_0 = \varepsilon_{\max} / k$, систему функций (21)–(23) и (25) можно записать в виде

$$\begin{aligned} S &= S_0 \left| \cos\left(\frac{\omega}{c} X\right) \right| \exp[-\varepsilon_{\max} \sin(\omega t)], \\ u &= \varepsilon_{\max} \frac{c}{\omega} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c} X\right) \right| \sin(\omega t), \\ V &= V_0 + c\varepsilon_{\max} \left| \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{c} X\right) \right| \cos(\omega t), \\ P &= P_0 + D\varepsilon_{\max} \sin(\omega t), \end{aligned} \tag{26}$$

где P_0 – базовое системное давление в трубопроводе.

На рис.4 показаны расчетные графики изменения площади сечения упругого трубопровода и скорости жидкости в нем в зависимости от его длины в моменты времени, соответствующие $\sin(\omega t) = 0$ и $\cos(\omega t) = 1$, т.е. при $t = 2n\pi/\omega$, где $n=0, 1, 2, \dots$, построенные в соответствии с формулами (26). Для удобства построения по оси абсцисс взята величина $\omega X/c$. При расчете принималось $c\varepsilon_{\max} = 0.3$ м/с (скорость распространения волны давления $c = 8$ м/с), $S_0 = 0.016$ м², $V_0 = 0.5$ м/с.

Как видно из рис.4, в моменты схлопывания трубопровода, там, где $S = 0$, скорость жидкости возрастает до бесконечности. Это связано с тем, что формулы для скорости и площади сечения трубопровода относятся к невязкой жидкости. Такой же эффект имеет место, например, при рассмотрении вынужденных колебаний, когда амплитуда колебаний в резонансе

стремится к бесконечности при отсутствии сопротивления среды. Пунктиром показан реальный ход кривых с учетом вязкости жидкости.

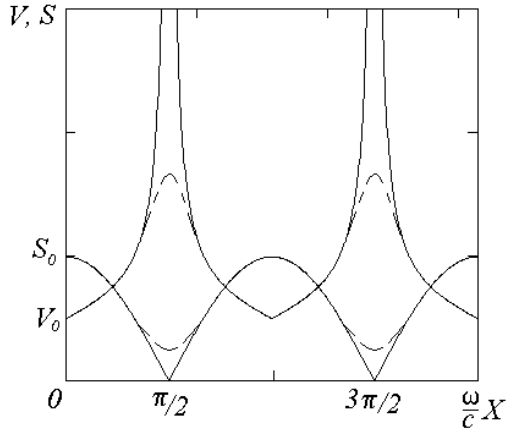


Рис.4. Автоколебания стенки и потока жидкости в упругом трубопроводе.

На основе решения краевой задачи найдем возможные частоты автоколебаний стенок упругого трубопровода, рис.1. Граничные условия на концах упругого участка трубопровода, исходя из формул (26), для любого момента времени используем при $X = 0$ и $X = l$. Полагаем, что в этих точках скорость жидкости $V = V_0 = \text{const}$, перемещение жидкости в колебательном процессе $u = 0$, площадь сечения трубопровода $S = S_0$.

Первое граничное условие при $X=0$ в формулах (26) удовлетворяется автоматически, т.к. начальные фазы тригонометрических функций (26), как указывалось ранее, были приняты равными нулю. Относительно площади сечения трубопровода необходимы пояснения. Максимальная относительная деформация площади сечения упругого участка трубопровода ε_{max} есть величина постоянная. Но на границах упругого участка $\varepsilon_{\text{max}}=0$, поэтому при $X=0$ и $X=l$ экспонента в (26) для площади сечения равна единице в любой момент времени. Величина ε_{max} имеет вид функции Хевисайда.

Второе граничное при $X = l$ позволяет найти возможные частоты автоколебаний упругих стенок трубопровода. Для любого момента времени из формул для перемещения u , скорости V и площади S находим $|\text{tg}(\omega l/c)| = 0$ и $|\cos(\omega l/c)| = 1$. Эти равенства удовлетворяются при условии $\omega l/c = n\pi$, где $n=0, 1, 2, \dots$, т.е. целое число. Следовательно, частота автоколебаний равна

$$v = nc / (2l). \tag{27}$$

Подставляя циклическую частоту $\omega = \pi c / l$ в (26), получаем частные решения уравнений (9), (10) при заданных граничных условиях.

Формула (27) показывает, что имеется множество гармоник в спектре автоколебаний упругого трубопровода. Амплитуды этих гармоник определяются свойствами вещества стенок трубопроводов, вязкостью и плотностью жидкости.

4. Отсутствие решений в виде бегущих волн в ограниченном участке упругого трубопровода

Покажем, что у системы (9), (10) нет решения в виде бегущих волн

$$S = S_A f_S(kX - \omega t), \quad V = V_A f_V(kX - \omega t), \quad (28)$$

где S_A и V_A – амплитудные значения бегущих волн.

Для нахождения решения системы (9), (10) в виде бегущих волн при условии, что стоячие волны (23) возникают как сумма прямых и обратных волн, необходимо решить функциональное уравнение [10] следующего вида:

$$V_A(f_V(kX - \omega t) + f_V(kX + \omega t)) = u_0 \omega \operatorname{tg}(kX) \cos(\omega t). \quad (29)$$

Решим вспомогательное функциональное уравнение:

$$V_A(f_V(kX - \omega t) + f_V(kX + \omega t)) = u_0 \omega f_V(kX) \cos(\omega t). \quad (30)$$

Положим $\omega t = \pi / 2$. В этом случае $f_V(kX - \pi / 2) + f_V(kX + \pi / 2) = 0$. Прибавляя к аргументам $\pi / 2$, для любого X находим

$$f_V(kX + \pi) = -f_V(kX). \quad (31)$$

Далее заменим в (30) $\omega t \rightarrow \omega t + \pi / 2$. В результате найдем

$$V_A(f_V(kX - \omega t - \pi / 2) + f_V(kX + \omega t + \pi / 2)) = -u_0 \omega f_V(kX) \sin(\omega t). \quad (32)$$

Заменив в (32) $kX - \pi / 2 \rightarrow kX$, находим

$$V_A(f_V(kX - \omega t) + f_V(kX + \omega t + \pi)) = -u_0 \omega f_V(kX + \pi / 2) \sin(\omega t). \quad (33)$$

Учитывая (31), имеем

$$V_A(f_V(kX - \omega t) - f_V(kX + \omega t)) = -u_0 \omega f_V(kX + \pi / 2) \sin(\omega t). \quad (34)$$

Далее положим $kX = 0$. Из уравнения (34) получаем $V_A(f_V(-\omega t) - f_V(\omega t)) = -u_0 \omega f_V(\pi / 2) \sin(\omega t)$, а из уравнения (30) находим $V_A(f_V(-\omega t) + f_V(\omega t)) =$

$= u_0 \omega f_V(0) \cos(\omega t)$. Вычитая из второго уравнения первое, имеем:

$$V_A f_V(\omega t) = \frac{u_0 \omega}{2} (f_V(0) \cos(\omega t) + f_V(\pi/2) \sin(\omega t)). \quad (35)$$

Принимая $\omega t = 0$, находим $V_A = (u_0 \omega) / 2$. Таким образом, функция f_V может быть записана в общем виде для аргумента Z :

$$f_V(Z) = f_V(0) \cos(Z) + f_V(\pi/2) \sin(Z). \quad (36)$$

Для отождествления формул (29) и (30) нужно принять $f_V(Z) = \text{tg} Z$. В этом случае равенство (36) оказывается несправедливым, следовательно, можно сделать вывод о том, что система (9), (10) не имеет решения в виде бегущих волн (28). Это следствие того, что для нелинейной системы (9), (10) принцип суперпозиции бегущих волн в образовании стоячих волн роли не играет. Вероятно, возникновение стоячих волн в данном случае связано с неустойчивостью нелинейной системы (9), (10).

5. Заключение

При течении жидкости через участок упругого трубопровода с закрепленными концами возможно возникновение автоколебаний стенки и потока или флаттера оболочечной моды. Эти автоколебания проявляются в виде вибрации трубопровода. Течение жидкости в таком трубопроводе описывается нелинейной системой гидродинамических уравнений, которую можно решить в элементарных функциях. Решение показывает, что возможно образование стоячих волн в упругом трубопроводе с закрепленными концами. Эти стоячие волны не являются результатом суммы прямой и обратной бегущих волн, как это происходит в линейных системах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. М.Т. Томпсон. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. Пер. с англ. – М.: Мир, 1985, 256 с.;
J.M.T. Thompson. Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering. – Chichester, NY: John Wiley & Sons, 1982.
2. Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. – М.: Мир, 1977, 624 с.;
G.B. Whitham F.R.S. Linear and Nonlinear Waves. – NY: John Wiley & Sons, 1974.
3. Б.М. Будаков, А.А. Самарский, А.Н. Тихонов. Сборник задач по математической физике. – М.: Наука, 1980, с.14, 160;
B.M. Budakov, A.A. Samarski, A.N. Tikhonov. Sbornik zadach po matematicheskoj fizike. – М.: Nauka, 1980, s.14, 160.

4. *А.Н. Матвеев.* Молекулярная физика. – М.: Высшая школа, 1981, 316с.
A.N. Matveev. Molekuliarnaia fizika. – М.: Vysshaia shkola, 1981, 316s.
5. *А.Н. Волобуев.* Основы несимметричной гидромеханики. – Самара: ООО «СамЛюкс-Принт», 2011, 188 с.
A.N. Volobuev. Basis of Nonsymmetrical Hydrodynamics. – NY: Nova Science Publishers, Inc., 2012, 198 p.
6. *В.И. Феодосьев.* Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986, с.275.
V.I. Feodosev. Soprotivlenie materialov. – М.: Nauka, 1986, s.275
7. *К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид.* Механика кровообращения. Пер. с англ. – М.: Мир, 1981, 330с.
C.G. Caro, T.J. Pedley, R.C. Schroter, W.A. Seed. The Mechanics of the Circulation. – Oxford: Oxford University Press, 1978.
8. *В.А. Красильников, В.В. Крылов.* Введение в физическую акустику. – М.: Наука, 1984, 403 с.
V.A. Krasilnikov, V.V. Krylov. Vvedenie v fizicheskuiu akustiku. – М.: Nauka, 1984, 403 s.
9. *А.Н. Тихонов, А.А. Самарский.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972, 736 с.
A.N. Tikhonov, A.A. Samarski. Uravnenia matematicheskoi fiziki. – М.: Nauka, 1972, 736s.
10. *Г.М. Фихтенгольц.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1. – М.: Физматгиз, 1962, 607 с.
G.M. Fikhtengolts. Kurs differentsialnogo i integralnogo ischislenia, t.1. – М.: Fizmatgiz, 1952, 607 s.

Поступила в редакцию 30.05.2018

После доработки 17.09.2018

Принята к публикации 19.11.2018