

О РЕШЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2019 г. *А.В. Шильков*

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
ale-shilkov@yandex.ru

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №14-11-00699.

DOI: 10.1134/S0234087919060042

Изложен метод решения внутренних граничных задач для эллиптических уравнений второго порядка с помощью перехода к лучевым переменным. Область разбивается на ячейки, в пределах которых коэффициенты и источники имеют свойства гладкости и непрерывности, необходимые для существования в ячейке регулярного классического решения. Конечные разрывы коэффициентов (если они есть) проходят по границам ячеек. Регулярное решение в ячейке ищется в виде суперпозиции вкладов объемных и граничных источников, размещенных на лучах, входящих в данную точку от границ ячейки. Далее составляется конечно-аналитическая схема для численного нахождения обобщенного решения в области с разрывными коэффициентами и источниками посредством сшивки регулярных решений, выходящих из ячеек на границах ячеек. В схеме отсутствует жесткая зависимость точности аппроксимации от размеров и формы ячеек, присущая конечно-разностным схемам.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, граничная задача, метод лучевых переменных, численные методы, конечно-аналитическая схема.

ON THE SOLUTION OF SECOND-ORDER LINEAR ELLIPTIC EQUATIONS

A.V. Shilkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow

A method for solving interior boundary value problems for second-order linear elliptic equations by introducing ray variables is described. The region is divided into cells, within which the coefficients and sources of the equations have the smoothness and continuity properties necessary for the existence of regular solutions in the cell. The finite discontinuities of the coefficients (if any) pass along the cell boundaries. The regular solution in a cell is sought in the form of a superposition of the contributions made by vol-

ume and boundary sources placed on rays arriving at a given point from the cell boundaries. Next, a finite-analytic scheme for the numerical solution of boundary value problems in a domain with discontinuous coefficients and sources is constructed by matching the regular solutions emerging from cells at the cell boundaries. The scheme does not exhibit the rigid dependence of the accuracy of approximation on the sizes and shape of the cells, which is inherent in finite-difference schemes.

Keywords: elliptic equations, boundary value problem, method of ray variables, numerical methods, finite-analytic scheme.

1. Введение

В первой части работы найдены регулярные решения внутренних граничных задач для линейных эллиптических уравнений второго порядка с помощью перехода к лучевым переменным. Решение ищется в виде суперпозиции вкладов источников, размещенных на лучах, приходящих в данную точку области от ее границ. На коэффициенты, источники и границу области накладываются ограничения, необходимые для существования регулярного классического решения. Также на коэффициенты уравнений накладываются некоторые дополнительные ограничения. Метод лучевых переменных отличается от известных методов решения граничных задач, таких как метод функций Грина и метод разделения переменных.

Во второй части работы составлена конечно-аналитическая схема для численного нахождения обобщенного решения в области с разрывными коэффициентами и источниками. Область разбивается на ячейки, в пределах которых коэффициенты и источники уравнений имеют необходимые свойства гладкости и непрерывности, а конечные разрывы коэффициентов (если они есть) проходят по границам ячеек. Схема строится с помощью шивки регулярных решений, выходящих из ячеек на границах ячеек. Для составления схемы оказалось удобным использовать представление решений в лучевых переменных. В сравнении с разностными схемами аналитические схемы имеют ряд недостатков и ряд преимуществ. Наиболее важное преимущество состоит в отсутствии жесткой зависимости точности аппроксимации от размеров и формы ячеек.

Первые публикации [1-3], посвященные аналитическим схемам, появились позже публикаций, посвященных разностным схемам. Однако по воспоминаниям участников американского и советского атомных проектов первоначально схемы применялись для решения одномерных задач наравне с разностными схемами и методами Монте-Карло. Позднее, ввиду трудностей переноса схем с одномерных задач на многомерные задачи, их развитие замедлилось. Аналитическим схемам посвящено относительно мало работ

(см. [1-15] и цит. литературу). В первых работах [2,3] схема называлась «точной». Термин конечно-аналитическая схема дискретизации появился позднее [8].

Определения. Пусть в ограниченной области V евклидова пространства E_N некоторый процесс описывается системой линейных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{\partial F^i}{\partial r^i} + \varkappa_i^u F^i + \varkappa_0^u Y = S, \\ \frac{\partial [A^{ij} Y]}{\partial r^j} + B^{ij} k_j^w Y + \varkappa_0^w F^i = S^i, \quad 1 \leq i \leq N. \end{cases} \quad (1)$$

$$A^{ij} = A^{ji}, \quad b_A < A^{ij} \Omega_i \Omega_j < c_A, \quad \det B^{ij} \neq 0, \quad |B^{ij} \Omega_i \Omega_j| < c_B, \quad |\Omega| = 1,$$

$$|S(\mathbf{r})|, |S^i(\mathbf{r})| < c_S, \quad |\varkappa_0^u(\mathbf{r})|, |\varkappa_i^u(\mathbf{r})|, |k_i^w(\mathbf{r})| < c_\varkappa, \quad b_w < \varkappa_0^w(\mathbf{r}) < c_w.$$

Здесь $\mathbf{r} = (r^1, r^2, \dots, r^N)$ есть вектор координат, $Y(\mathbf{r})$ – искомая скалярная функция (далее – плотность), $F^i(\mathbf{r})$ – искомая векторная функция (поток), $S(\mathbf{r})$ и $S^i(\mathbf{r})$ – заданные скалярная и векторная функции (источники). В (1) и последующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся координатным индексам. $A^{ij}(\mathbf{r})$ и $B^{ij}(\mathbf{r})$ – тензорные функции типа (2,0), A^{ij} – положительно определенная билинейная форма на ковекторах, B^{ij} – невырожденный тензор. Тензоры, источники и коэффициенты уравнений \varkappa_0^u , \varkappa_i^u , \varkappa_0^w , k_i^w ограничены положительными постоянными $b_{(\cdot)}, c_{(\cdot)} > 0$. Коэффициент \varkappa_0^w принимает только положительные значения. Тензор B^{ij} можно исключить из системы

$$B^{ij} k_j^w = \delta_k^i B^{kl} k_l^w = A^{ij} A_{jk} B^{kl} k_l^w = A^{ij} \varkappa_j^w = \varkappa_j^w A^{ij}, \quad \varkappa_j^w = A_{jk} B^{kl} k_l^w \quad (2)$$

заменой векторного коэффициента $k_i^w(\mathbf{r})$ на коэффициент $\varkappa_i^w(\mathbf{r})$. Здесь A_{ij} – котензор (обратный тензор) тензора A^{ij} : $A_{jk} A^{ki} = A^{ki} A_{jk} = \delta_j^i$, δ_k^j – символ Кронекера.

Разбиение области на ячейки. Тензор $A^{ij}(\mathbf{r})$, источники $S(\mathbf{r})$, $S^i(\mathbf{r})$ и коэффициенты уравнений могут иметь конечные разрывы на некоторых поверхностях размерности $N-1$. Ограничимся решением задач, в которых область V допускает разбиение на непересекающиеся подобласти (далее – ячейки) V_m , $m = 1, \dots, M$, такое, что ячейки плотно покрывают область, по-

верхности разрывов (если разрывы есть) проходят по границам ячеек. Для каждой ячейки выполнены условия, необходимые для существования в ней регулярного решения. В частности, A^{ij} , B^{ij} , χ_0^u , χ_i^u , χ_0^w , χ_i^w , S^i – гладкие функции в ячейке, S – непрерывная функция. Граница ячейки Γ_m состоит из гладких участков, на которых вектор нормали меняется непрерывно, а ячейка видна под телесным углом $\omega(N)/2$, составляющим половину полного телесного угла пространства $\omega(N) = 2\pi^{N/2}/\Gamma(N/2)$, $\omega(3) = 4\pi$. В точках пересечения участков ячейка видна под телесным углом, который больше числа c_ω и меньше $\omega - c_\omega$. На границе Γ_m каждой ячейки V_m на решения системы (1) наложим условия

$$G_{ij}n^j[F^i - F_{ext}^i] = \frac{1-\chi}{1+\chi}\beta[Y - Y_{ext}], \quad \mathbf{r} \in \Gamma_m, \quad (3)$$

$$G_{ij} = G_{ji}, \quad 0 < b_G < G_{ij}\Omega^i\Omega^j < c_G, \quad |\Omega| = 1, \quad 0 < b_\beta < \beta(\mathbf{r}) < c_\beta, \quad -1 < \chi(\mathbf{r}) \leq 1.$$

$G_{ij}(\mathbf{r})$, $\chi(\mathbf{r})$, $\beta(\mathbf{r})$, $Y_{ext}(\mathbf{r})$, $F_{ext}^i(\mathbf{r})$ – заданные на гладких участках границы ограниченные кусочно-непрерывные функции, $n^i(\mathbf{r})$ – вектор внешней нормали, G_{ij} – положительно определенная билинейная форма на векторах. Индекс ячейки m в обозначениях величин опущен. Функция χ имеет смысл коэффициента отражения границы. При $\chi = 0$ отражение отсутствует. Если на участке границы $\chi \rightarrow -1$, то условия (3) переходят в граничные условия Дирихле. Если на участке границы тензор G_{ij} совпадает с котензором A_{ij} (обратным тензором) тензора A^{ij} : $A_{jk}A^{ki} = A^{ki}A_{jk} = \delta_j^i$, то условия (3) соответствуют граничным условиям обобщенной задачи Неймана [16, с.436; 17, с.158; 18, с.16]. Случай $\chi = 1$ соответствует условиям классической задачи Неймана. Случай $G_{ij} \neq A_{ij}$, $\chi \neq -1$ называют условием с косой производной. Общий случай называют смешанными граничными условиями. Далее под термином граничные условия Дирихле понимается ситуация, когда на участке границы поставлены условия Дирихле. Его следует отличать от термина «граничная задача Дирихле», когда данный тип условий поставлен на всей границе.

Если из второго векторного уравнения системы (1) выразить поток F^i и подставить в первое уравнение, то в ячейках (областях гладкости/непрерывности функций) система сводится к уравнению второго порядка:

$$\frac{\partial^2[A^{ij}Y]}{\partial r^i \partial r^j} + \left[\varkappa_j^u - \frac{\partial \ln \varkappa_0^w}{\partial r^j} \right] \frac{\partial[A^{ij}Y]}{\partial r^i} + k_j^w \frac{\partial[B^{ij}Y]}{\partial r^i} - \left[\varkappa_0^u \varkappa_0^w - \varkappa_i^u B^{ij} k_j^w - \varkappa_0^w B^{ij} \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{k_j^w}{\varkappa_0^w} \right] \right] Y = -\varkappa_0^w S + \varkappa_i^u S^i + \varkappa_0^w \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{S^i}{\varkappa_0^w} \right], \quad \mathbf{r} \in V_m. \quad (4)$$

Вследствие положительной определенности тензора A^{ij} дифференциальный оператор уравнения (4) приводится локально (в точке) к оператору эллиптического типа [19, с.156].

Приведение системы к стандартному виду. Пусть в пределах каждой ячейки поля векторных коэффициентов \varkappa_i^u и \varkappa_i^w потенциальны, т.е. можно подобрать скалярные функции $\Phi^u(\mathbf{r})$, $\Phi^w(\mathbf{r})$ такие, что

$$\varkappa_i^{u,w} = -2 \frac{\partial \Phi^{u,w}}{\partial r^i}, \quad \frac{\partial \varkappa_i^{u,w}}{\partial r^j} = \frac{\partial \varkappa_j^{u,w}}{\partial r^i} = -2 \frac{\partial^2 \Phi^{u,w}}{\partial r^i \partial r^j}, \quad \mathbf{r} \in V_m. \quad (5)$$

При постоянных коэффициентах в ячейке $\varkappa_i^{u,w} = \varkappa_{m,i}^{u,w} = \text{const}$ искомые потенциалы – $\Phi^{u,w}(\mathbf{r}) = -\varkappa_{m,i}^{u,w} [r^i - r_m^i] / 2 + \Phi_0^{u,w}$. В случае линейной зависимости коэффициентов от координат: $\varkappa_i^{u,w}(\mathbf{r}) = 2P_{ij}^{u,w} [r^j - r_m^j] + \varkappa_{m,i}^{u,w}$, где $P_{ij}^{u,w} = P_{ji}^{u,w}$ – постоянная билинейная форма:

$$\Phi^{u,w} = -\frac{1}{2} P_{ij}^{u,w} [r^i - r_m^i] [r^j - r_m^j] - \frac{1}{2} \varkappa_{m,i}^{u,w} [r^i - r_m^i] + \Phi_0^{u,w}, \quad \mathbf{r} \in V_m.$$

Нетрудно указать и ряд других простых потенциалов, с помощью которых (или их суперпозиции) задаются потенциальные коэффициенты. Это, например, функции, зависящие от расстояния до точки, прямой или плоскости (множеств размерности от 0 до $N-1$).

Если выполнено (5), то замена искомых функций, тензора и коэффициентов [15]

$$Y = \frac{U}{a} e^{\Phi^u + \Phi^w}, \quad F^i = \left[W^i - D^{ij} \frac{\varkappa_j^w - \varkappa_j^u}{2\varkappa_0^w} U \right] e^{\Phi^u + \Phi^w} + \frac{S^i}{\varkappa_0^w}, \quad (6)$$

$$A^{ij} = a D^{ij}, \quad \varkappa_u = \frac{\varkappa_0^u}{a} + D^{ij} \frac{[\varkappa_j^w - \varkappa_j^u][\varkappa_i^w - \varkappa_i^u]}{4\varkappa_0^w} - D^{ij} \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{\varkappa_j^w - \varkappa_j^u}{2\varkappa_0^w} \right], \quad \varkappa_w = \varkappa_0^w,$$

преобразует систему уравнений (1), (2) в ячейке к стандартному виду

$$\begin{cases} \frac{\partial W^i}{\partial r^i} + \varkappa_u U = Q, \\ \frac{\partial [D^{ij}U]}{\partial r^j} + \varkappa_w W^i = 0, \end{cases} \quad Q = \left[S - \frac{\varkappa_i^u S^i}{\varkappa_0^w} - \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{S^i}{\varkappa_0^w} \right] \right] e^{-\Phi^u - \Phi^w}. \quad (7)$$

Здесь U – новая плотность, W^i – новый поток, $a(\mathbf{r})$, $a > 0$ – ограниченная положительная гладкая функция. Коэффициент \varkappa_w принимает положительные значения, коэффициент \varkappa_u может иметь любой знак. Граничные условия (3) преобразуются в условия аналогичного вида:

$$G_{ij} n^j [W^i - W_{ext}^i] = \frac{1-\chi}{1+\chi} \alpha [U - U_{ext}], \quad \alpha = \frac{\beta}{a} + \frac{1+\chi}{1-\chi} \frac{\varkappa_i^w - \varkappa_i^u}{2\varkappa_0^w} G_{kj} n^j D^{ik}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_m. \quad (8)$$

Уравнение (4) переходит в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial [D^{ij}U]}{\partial r^j} \right] - \varkappa_u U = -Q, \quad \mathbf{r} \in V_m. \quad (9)$$

Выбором функции $a(\mathbf{r})$ тензор $D^{ij}(\mathbf{r}) = A^{ij}/a$ всегда можно нормировать так, чтобы один из его инвариантов $\det D^{ij}$ или $Sp D^{ij}$ был равен заданной гладкой функции в ячейке. Далее считаем, что след тензора равен единице:

$$Sp D^{ij}(\mathbf{r}) = D^{ij} \delta_{ij} = 1, \quad a(\mathbf{r}) = Sp A^{ij}(\mathbf{r}). \quad (10)$$

Нормировка делает тензор $D^{ij}(\mathbf{r})$ в ячейке функцией относительно малой вариации, близкой к постоянному тензору.

Симметричный тензор $D^{ij} = D^{ji}$ ортогональным преобразованием локальной системы координат можно привести к диагональному виду с положительными числами на диагонали. Если далее выполнить растяжение вдоль ортогональных координатных осей, то уравнение (9) перейдет (локально) в стационарное уравнение Шредингера, в случае постоянных коэффициентов – в уравнение Гельмгольца, в случае $|\varkappa_u| \ll \varkappa_w$ – в уравнение Пуассона.

Необходимость разрешения уравнений (1), (3), (7), (8) возникает в математическом моделировании многих проблем физики и техники. Это расчеты теплообмена в технических установках, процессов переноса нейтронов в ядерных реакторах и теплового излучения в газах и плазме, протекания химических реакций, распространения реагентов в природных средах, колебаний конструкций и распространения электромагнитных волн.

Существование и единственность решения. Вопросы существования регулярного решения граничной задачи в одной ячейке V_m и обобщенного решения в полной области V с разрывными коэффициентами обсуждаются в работах [16-22]. Существование и поведение решений зависит от знака произведения коэффициентов $\varkappa_u \varkappa_w$. Коэффициент \varkappa_w принимает ограниченные положительные значения: $b_w < \varkappa_w(\mathbf{r}) < c_w$, $b_w > 0$. Поэтому для классификации задач достаточно рассматривать знак коэффициента \varkappa_u .

Дополним разбиение области V на ячейки так, чтобы ячейки были не только областями непрерывности функций и коэффициентов, но и были однородны относительно знака коэффициента \varkappa_u . В результате разбиения могут возникать однородные ячейки трех типов. Ячейки А с положительным коэффициентом, в которых $\varkappa_u / \varkappa_w \geq c_u$, где c_u – малое положительное число $0 < c_u \ll 1$. Ячейки Б с отрицательным коэффициентом: $\varkappa_u / \varkappa_w \leq -c_u$. Вырожденные ячейки В: $|\varkappa_u / \varkappa_w| \leq c_u$. В вырожденной ячейке решение уравнений (7), (9) близко к решению уравнения Пуассона

$$\begin{cases} \frac{\partial W^i}{\partial r^i} = Q, \\ \frac{\partial [D^{ij}U]}{\partial r^j} + \varkappa_w W^i = 0, \end{cases} \quad \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial [D^{ij}U]}{\partial r^j} \right] = -Q, \quad \mathbf{r} \in V_m. \quad (11)$$

Представим регулярное решение задачи (7), (8) в ячейке V_m в виде суммы: $U = U_0 + U_\lambda$, $W^i = W_0^i + W_\lambda^i$. Функции U_0 , W_0^i удовлетворяют неоднородной задаче (7), (8) с источником $Q' = Q + [\lambda^2 - 1]\varkappa_u U_\lambda$; функции U_λ , W_λ^i удовлетворяют однородной граничной задаче

$$\begin{cases} \frac{\partial W_\lambda^i}{\partial r^i} + \lambda^2 \varkappa_u U_\lambda = 0, \\ \frac{\partial [D^{ij}U_\lambda]}{\partial r^j} + \varkappa_w W_\lambda^i = 0, \end{cases} \quad G_{ij} n^j W_\lambda^i \Big|_{\Gamma_m} = \frac{1-\chi}{1+\chi} \alpha U_\lambda \Big|_{\Gamma_m},$$

где $\lambda > 0$ – собственное число. Для регулярного решения граничной задачи в ячейке имеет место альтернатива [16, с.443; 17, с.157; 18, с.17].

1) В ячейке А или В ($\varkappa_u / \varkappa_w \geq -c_u$) однородная задача решений не имеет, кроме тривиального решения $U_\lambda = W_\lambda^i = 0$. Неоднородная задача (7), (8) имеет единственное решение. Исключение составляет классическая задача Неймана для уравнений (11) в вырожденной ячейке В, в которой плотность

U определяется с точностью до постоянной. Задача разрешима, если полная мощность источников Q равна полному потоку через границу ячейки.

2) Ячейка Б, $\varkappa_u/\varkappa_w \leq -c_u$ может иметь ряд собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots > 0$ и соответствующих им нетривиальных решений однородной задачи, интерпретируемых как собственные колебания. Множество решений однородной задачи состоит из линейных комбинаций собственных колебаний. Пусть в ячейке возбуждена некоторая комбинация собственных колебаний. Тогда неоднородная граничная задача (7), (8) имеет единственное решение, если выполнено условие ортогональности источника Q каждому колебанию данной комбинации. Если условие ортогональности источника не выполнено, то неоднородная задача решений не имеет. Если в ячейке нет возбужденных собственных колебаний, то неоднородная граничная задача имеет единственное решение.

Цель и структура работы. Некоторые регулярные решения граничных задач в ячейке, полученные методом функций Грина или методом разделения переменных при частном виде тензора $D^{ij} = D\delta^{ij}$, источников, коэффициентов, граничных условий и простой форме ячейки, приведены в [17, с.125; 23, с.116; 24, с.492]. Коэффициенты и источники уравнений обычно полагаются постоянными, ячейка имеет форму параллелепипеда или плоского, цилиндрического, сферического слоя. Этих решений недостаточно для составления конечно-аналитических схем решения задач, возникающих в практических исследованиях.

Цель работы состоит в нахождении регулярного решения неоднородной граничной задачи (7), (8) в ячейке V_m произвольной формы при ограничениях (12) на поведение коэффициентов уравнений и в составлении конечно-аналитической схемы для численного нахождения обобщенного решения в области V с разрывными коэффициентами и источниками. Регулярное решение в ячейке ищется методом лучевых переменных [15]. Структура работы следующая. В разделе 2 вводятся лучевые переменные, в этих переменных формулируется общее решение системы в ячейке. В разделе 3 приведены решения типичных задач. В разделе 4 исследуются некоторые свойства решений. В разделе 5 обсуждены условия сшивки решений из разных ячеек и составлена конечно-аналитическая схема.

2. Метод лучевых переменных

Ограничения на тензор и коэффициенты. Вследствие (10) тензор D^{ij} близок к постоянному тензору в ячейке. Во многих практических зада-

ках коэффициенты $\varkappa_u(\mathbf{r})$ и $\varkappa_w(\mathbf{r})$ подобны друг другу, так что их отношение $\varkappa_u / \varkappa_w$ меняется значительно медленнее коэффициентов по отдельности. Будем считать, что производные тензора и отношения коэффициентов равномерно ограничены в пределах ячейки малыми постоянными c_D и c_R :

$$\left| \Omega^i \frac{\partial D^{ij}}{\partial r^j} \right| \leq c_D \varkappa_w, \quad \left| \Omega^i \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{\varkappa_u}{\varkappa_w} \right] \right| \leq c_R \varkappa_w, \quad |\Omega|=1, \quad \mathbf{r} \in V_m. \quad (12)$$

При постоянном тензоре и постоянном отношении $c_D = c_R = 0$.

Лучевые переменные. Определим в пределах ячейки гладкое риманово многообразие R_N с метрикой $g_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}$ – билинейной формой на векторах, где $D_{ij}(\mathbf{r})$ – котензор тензора D^{ij} . Метрика задает локальный масштаб расстояния между точками многообразия и порождает совокупность геодезических линий. Снабдим многообразие римановой связностью [25; 26, с.359]. Рассмотрим в E_N точку ячейки \mathbf{r} и прикрепленный к ней единичный вектор Ω , $|\Omega|=1$, принимающий произвольное направление в пределах телесного угла ω . Через точку в заданном направлении Ω проходит только одна геодезическая линия многообразия R_N , вообще говоря, не являющаяся прямой. Назовем лучом направленный отрезок геодезической линии от точки входа \mathbf{r}_{in} до точки выхода из ячейки \mathbf{r}_{out} (рис.1).

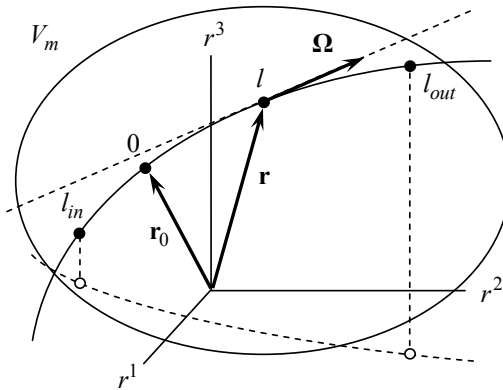


Рис.1. Луч (\mathbf{r}, Ω) входит в ячейку в точке \mathbf{r}_{in} с натуральной координатой l_{in} , проходит в направлении Ω через точку наблюдения \mathbf{r} с координатой l и покидает ячейку в точке \mathbf{r}_{out} с координатой l_{out} . За начало отсчета принята точка \mathbf{r}_0 .

Зафиксируем на луче (\mathbf{r}, Ω) начальную точку \mathbf{r}_0 и введем координату $p(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ – расстояние вдоль луча от точки \mathbf{r}_0 до точки \mathbf{r} в масштабе, зада-

ваемом метрикой g_{ij} , и натуральную координату $l(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ – соответствующее расстояние в масштабе длины пространства E_N . Дифференциалы расстояний и телесных углов связаны соотношениями

$$[dp]^2 = g_{ij} dr^i dr^j = D_{ij} \Omega^i \Omega^j [dl]^2 = h^2 [dl]^2, \quad dr^i = \Omega^i dl, \quad (13)$$

$$dp = h dl, \quad p(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \int_0^l h dl', \quad \frac{\partial p}{\partial r^i} = \frac{D_{ij} \Omega^j}{h}, \quad d\omega_R = \frac{d\omega}{e},$$

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \sqrt{D_{ij} \Omega^i \Omega^j}, \quad e(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = h^N \sqrt{\det D^{ij}}.$$

Здесь h есть длина единичного вектора $\mathbf{\Omega}$ в масштабе длины R_N ; $d\omega$ – элемент телесного угла в направлении $\mathbf{\Omega}$ в пространстве E_N , $d\omega_R$ – его образ в R_N , e – масштабный множитель, $\det D^{ij}$ – детерминант тензора D^{ij} . Кроме размерной координаты $p(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ введем на луче безразмерную лучевую координату τ :

$$\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) = \int_0^p \varkappa dp' = \int_0^l \varkappa h dl', \quad \varkappa(\mathbf{r}) = \left\{ \begin{array}{ll} |\varkappa_u \varkappa_w|^{1/2}, & \text{А, Б} \\ \varkappa_w, & \text{В} \end{array} \right\}, \quad (14)$$

$$d\tau = \varkappa dp = \varkappa h dl, \quad \frac{\partial \tau}{\partial r^i} = \varkappa \frac{\partial p}{\partial r^i} = \varkappa \frac{D_{ij} \Omega^j}{h},$$

где $\varkappa(\mathbf{r})$ – положительный коэффициент, равный среднему геометрическому коэффициентов $|\varkappa_u|$ и \varkappa_w . В вырожденной ячейке В полагаем $\varkappa = \varkappa_w$.

При постоянном тензоре $D^{ij} = \text{const}$, $c_D = 0$ риманово многообразие R_N переходит в аффинное пространство с прямыми лучами $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, которые совпадают с соответствующими лучами в евклидовом пространстве E_N . Масштабы длины h и телесного угла e зависят от направления луча. В случае $D^{ij} = \delta^{ij}/N$, $Sp D^{ij} = 1$ многообразие становится евклидовым пространством с уменьшенным в \sqrt{N} раз масштабом длины в сравнении с E_N .

Основное решение. В общем случае решение уравнений (7), (11) в ячейке строится с помощью функции Леви [16, с.232; 17, с.152; 18, с.24]. В частном случае, когда выполняются условия (12), решение можно представить в ином, специальном виде, если перейти к лучевым переменным.

Будем искать регулярное решение системы (7) или (11) в точке ячейки

$\mathbf{r} \in V_m \subset E_N$ в виде суперпозиции вкладов объемных и граничных источников, размещенных на лучах, приходящих в точку от границы ячейки:

$$U(\mathbf{r}) = \int_{\omega} \left[\frac{S_{out}(\tau)}{X} [J_{in}(\tau) + I_{in}] + \frac{S_{in}(\tau)}{X} [J_{out}(\tau) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (15)$$

$$W^i(\mathbf{r}) = \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau)}{X} [J_{in}(\tau) + I_{in}] - \frac{C_{in}(\tau)}{X} [J_{out}(\tau) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

$$J_{in}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau_{in}}^{\tau} S_{in}(\tau') e(\tau') Q(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa}, \quad J_{out}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau}^{\tau_{out}} S_{out}(\tau') e(\tau') Q(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa}. \quad (16)$$

Здесь $h(\mathbf{r}, \Omega)$, $e(\mathbf{r}, \Omega)$, $X(\mathbf{r}, \Omega)$ – функции направления луча; $S_{in}(\tau)$, $C_{in}(\tau)$, $S_{out}(\tau)$, $C_{out}(\tau)$ – заданные функции лучевой координаты; $J_{in}(\tau)$, $J_{out}(\tau)$ – интегралы от объемных источников, вычисляемые вдоль луча. Первый дает вклад источников с отрезка луча $\tau_{in} < \tau' < \tau$, второй – с отрезка $\tau < \tau' < \tau_{out}$. Индексами *in* и *out* обозначены величины, относящиеся соответственно к точке входа и точке выхода луча из ячейки. $I_{in}(\mathbf{r}, \Omega)$, $I_{out}(\mathbf{r}, \Omega)$ – свободные параметры, определяемые для луча (\mathbf{r}, Ω) . Далее мы увидим, что это вклады граничных источников. При обходе полного телесного угла ω вклад каждого объемного источника и каждой точки границы учитывается дважды: один раз на лучах (\mathbf{r}, Ω) и второй раз на противоположных лучах $(\mathbf{r}, -\Omega)$. Функции лучевой координаты даются комбинациями элементарных функций:

$$S_{in}(\tau) = \frac{\varkappa_w}{\varkappa} \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\tau - \tau_{in}) \\ \sin(\tau - \tau_{in}) \end{array} \right\} + \gamma_{in} \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\tau - \tau_{in}) \\ \cos(\tau - \tau_{in}) \end{array} \right\}, \quad (17)$$

$$C_{in}(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\tau - \tau_{in}) \\ \cos(\tau - \tau_{in}) \end{array} \right\} + \gamma_{in} \frac{\varkappa}{\varkappa_w} \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\tau - \tau_{in}) \\ -\sin(\tau - \tau_{in}) \end{array} \right\},$$

$$S_{out}(\tau) = \frac{\varkappa_w}{\varkappa} \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\tau_{out} - \tau) \\ \sin(\tau_{out} - \tau) \end{array} \right\} + \gamma_{out} \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\tau_{out} - \tau) \\ \cos(\tau_{out} - \tau) \end{array} \right\},$$

$$C_{out}(\tau) = \left\{ \begin{array}{l} \cosh(\tau_{out} - \tau) \\ \cos(\tau_{out} - \tau) \end{array} \right\} + \gamma_{out} \frac{\varkappa}{\varkappa_w} \left\{ \begin{array}{l} \sinh(\tau_{out} - \tau) \\ -\sin(\tau_{out} - \tau) \end{array} \right\},$$

$$S_{in}(\tau)C_{out}(\tau) + C_{in}(\tau)S_{out}(\tau) = \text{const} = X(\mathbf{r}, \Omega), \quad \tau_{in} < \tau < \tau_{out},$$

$$X(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \frac{\varkappa_w}{\varkappa} \left\{ \frac{\sinh(\tau_{out} - \tau_{in})}{\sin(\tau_{out} - \tau_{in})} \right\} + \gamma_{in} \gamma_{out} \frac{\varkappa}{\varkappa_w} \left\{ \frac{\sinh(\tau_{out} - \tau_{in})}{-\sin(\tau_{out} - \tau_{in})} \right\} + [\gamma_{in} + \gamma_{out}] \left\{ \frac{\cosh(\tau_{out} - \tau_{in})}{\cos(\tau_{out} - \tau_{in})} \right\}.$$

Верхняя строка относится к ячейке А, $\varkappa_u/\varkappa_w \geq c_u$, нижняя – к ячейке Б, $\varkappa_u/\varkappa_w \leq -c_u$. В вырожденной ячейке В, $|\varkappa_u/\varkappa_w| \leq c_u$ функции (17) непрерывно переходят в функции

$$S_{in}(\tau) = \tau - \tau_{in} + \gamma_{in}, \quad S_{out}(\tau) = \tau_{out} - \tau + \gamma_{out}, \quad (18)$$

$$C_{in}(\tau) = C_{out}(\tau) = 1, \quad X(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}) = \tau_{out} - \tau_{in} + \gamma_{in} + \gamma_{out},$$

где для вычисления лучевой координаты τ используется коэффициент $\varkappa = \varkappa_w$ (см. (14)). Функции лучевой координаты (17), (18) содержат свободные параметры $\gamma_{in}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, $\gamma_{out}(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$, определяемые (как и свободные параметры I_{in} , I_{out}) для луча $(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega})$. Форма решения (15) получена в [15] распространением на многомерный случай решений одномерных задач [12].

Для доказательства того, что функции (15) удовлетворяют уравнениям (7), (11), вычислим производные функций, пользуясь связями (13), (14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^i}{\partial r^i} &= \int_{\omega} \frac{\partial \tau}{\partial r^i} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau)}{X} [J_{in}(\tau) + I_{in}] - \frac{C_{in}(\tau)}{X} [J_{out}(\tau) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega} = \\ &= Q - \varkappa_u U + \delta_u, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial D^{ij} U}{\partial r^j} &= D^{ij} \int_{\omega} \frac{\partial \tau}{\partial r^j} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{S_{out}(\tau)}{X} [J_{in}(\tau) + I_{in}] + \frac{S_{in}(\tau)}{X} [J_{out}(\tau) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega} + \\ &+ U \frac{\partial D^{ij}}{\partial r^j} = -\varkappa_w W^i + \delta_w^i. \end{aligned}$$

Невязки δ_u , δ_w^i зависят от величины производных $\partial D^{ij}/\partial r^j$, $\partial[\varkappa/\varkappa_w]/\partial r^i$

$$\begin{aligned} \delta_u &= \int_{\omega} \frac{\varkappa}{X} \left[[J_{in}(\tau) + I_{in}] \left[\gamma_{out} \left\{ \frac{\sinh(\tau_{out} - \tau)}{-\sin(\tau_{out} - \tau)} \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\varkappa}{\varkappa_w} \right] - \frac{C_{out}(\tau)}{hX} \frac{\partial[hX]}{\partial \tau} \right] \right] \frac{d\omega}{\omega} - \\ &- \int_{\omega} \frac{\varkappa}{X} \left[[J_{out}(\tau) + I_{out}] \left[\gamma_{in} \left\{ \frac{\sinh(\tau - \tau_{in})}{-\sin(\tau - \tau_{in})} \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\varkappa}{\varkappa_w} \right] - \frac{C_{in}(\tau)}{hX} \frac{\partial[hX]}{\partial \tau} \right] \right] \frac{d\omega}{\omega}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_w^i = & U \frac{\partial D^{ij}}{\partial r^j} + \varkappa \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{hX} \left[[J_{in}(\tau) + I_{in}] \left[\left\{ \frac{\sinh(\tau_{out} - \tau)}{\sin(\tau_{out} - \tau)} \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\varkappa_w}{\varkappa} \right] - \frac{S_{out}(\tau)}{X} \frac{\partial X}{\partial \tau} \right] \right] \frac{d\omega}{\omega} + \\ & + \varkappa \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{hX} \left[[J_{out}(\tau) + I_{out}] \left[\left\{ \frac{\sinh(\tau - \tau_{in})}{\sin(\tau - \tau_{in})} \right\} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\varkappa_w}{\varkappa} \right] - \frac{S_{in}(\tau)}{X} \frac{\partial X}{\partial \tau} \right] \right] \frac{d\omega}{\omega}, \\ \frac{\partial X}{\partial \tau} = & [X - \gamma_{in} C_{out}(\tau_{in}) + \gamma_{out} C_{in}(\tau_{out})] \frac{\varkappa}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\varkappa_w}{\varkappa} \right], \quad \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\Omega^i \Omega^j}{2h} \frac{\partial D_{ij}}{\partial \tau}. \end{aligned}$$

Если постоянные c_D, c_R в неравенствах (12) стремятся к нулю $c_D, c_R \rightarrow 0$, то модули невязок равномерно стремятся к нулю $|\delta_u|, |\delta_w^i| \rightarrow 0$ во внутренних точках ячейки V_m . Функции (15) в точности удовлетворяют уравнениям (7), (11) при произвольных параметрах лучей $I_{in}, I_{out}, \gamma_{in}, \gamma_{out}$. Лучи являются отрезками прямых линий (см. комментариев к (14)). Если постоянные c_D, c_R и производные $\partial D^{ij} / \partial r^j, \partial [\varkappa / \varkappa_w] / \partial r^i$ малы, то функции (15) удовлетворяют уравнениям приближенно. Лучи могут немного искривляться в больших по размерам ячейках.

3. Регулярные решения граничных задач в ячейке

Смешанная граничная задача. Запишем основное решение (15) в точке гладкого участка границы, рассматривая ее как точку входа лучей в ячейку

$$U(\mathbf{r}_{in}) = 2 \int_{\Omega_{\mathbf{n}<0}} \left[\frac{S_{out}(\tau_{in})}{X} I_{in} + \frac{\gamma_{in}}{X} [J_{out}(\tau_{in}) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (19)$$

$$W^i(\mathbf{r}_{in}) = 2 \int_{\Omega_{\mathbf{n}<0}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau_{in})}{X} I_{in} - \frac{1}{X} [J_{out}(\tau_{in}) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

и рассматривая ее как точку выхода лучей из ячейки:

$$U(\mathbf{r}_{out}) = 2 \int_{\Omega_{\mathbf{n}>0}} \left[\frac{\gamma_{out}}{X} [J_{in}(\tau_{out}) + I_{in}] + \frac{S_{in}(\tau_{out})}{X} I_{out} \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (20)$$

$$W^i(\mathbf{r}_{out}) = 2 \int_{\Omega_{\mathbf{n}>0}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{1}{X} [J_{in}(\tau_{out}) + I_{in}] - \frac{C_{in}(\tau_{out})}{X} I_{out} \right] \frac{d\omega}{\omega}.$$

В (19) интегрирование проводится по телесному углу $\omega/2$, под которым видна ячейка, и состоящему из направлений входа лучей в ячейку $\Omega: \Omega_{\mathbf{n}_{in}} < 0$, в (20) – по телесному углу $\omega/2$, состоящему из направлений выхода лучей из

ячейки $\Omega : \Omega \mathbf{n}_{out} > 0$. Углы равны половине телесного угла пространства. Здесь \mathbf{n}_{in} и \mathbf{n}_{out} – векторы внешней нормали в точке входа и соответственно в точке выхода луча из ячейки. Подставим значения в граничные условия (8). В результате вычислений получим, что граничные условия будут удовлетворены при следующих параметрах лучей:

$$\gamma_{in} = -\frac{1 + \chi_{in}}{1 - \chi_{in}} \frac{G_{ij} n_{in}^i \Omega^j}{\alpha_{in} h}, \quad \gamma_{out} = \frac{1 + \chi_{out}}{1 - \chi_{out}} \frac{G_{ij} n_{out}^i \Omega^j}{\alpha_{out} h}, \quad (21)$$

$$I_{in} = U_{in}^{ext} + \gamma_{in} \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W_{ext, in}^i, \quad I_{out} = U_{out}^{ext} - \gamma_{out} \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W_{ext, out}^i.$$

Параметры определены для лучей, которые начинаются и оканчиваются на гладких участках границы. Решение неоднородной смешанной задачи в ячейке в условиях его существования найдено.

Задача Дирихле. Граничные условия задачи Дирихле следуют из граничных условий (8) в результате перехода к пределу $\chi \rightarrow -1$, $U_{ext} \rightarrow U(\mathbf{r}_\Gamma)$ на всей границе ячейки. Решение задачи Дирихле дается формулами (15)–(21) при параметрах лучей

$$\gamma_{in} = \gamma_{out} = 0, \quad I_{in} = U(\mathbf{r}_{in}), \quad I_{out} = U(\mathbf{r}_{out}), \quad \mathbf{r}_{in}, \mathbf{r}_{out} \in \Gamma_m. \quad (22)$$

Задача Неймана. Решение обобщенной задачи Неймана, если исходить из определения [17, с.158; 18, с.16], дается формулами (15)–(21) при $G_{ij} = D_{ij}$. Для нахождения решения классической задачи Неймана выполним в граничных условиях (8) переход к пределу $\chi \rightarrow +1$, $W_{ext}^i \rightarrow W^i(\mathbf{r}_\Gamma)$. Соответственно в (15)–(21) перейдем к пределу $\gamma_{in}, \gamma_{out} \rightarrow \infty$:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\varkappa_w}{\varkappa} \int_{\omega} \frac{K_{out}(\tau)}{L_{out}(\tau_{in})} \left[H_{in}(\tau) + \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W^i(\mathbf{r}_{in}) \right] \frac{d\omega}{\omega} + \quad (23)$$

$$+ \frac{\varkappa_w}{\varkappa} \int_{\omega} \frac{K_{in}(\tau)}{L_{in}(\tau_{out})} \left[H_{out}(\tau) - \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W^i(\mathbf{r}_{out}) \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

$$W^i(\mathbf{r}) = \int_{\omega} \frac{L_{out}(\tau)}{L_{out}(\tau_{in})} \left[\frac{\Omega^i}{h} H_{in}(\tau) + W^i(\mathbf{r}_{in}) \right] \frac{d\omega}{\omega} +$$

$$+ \int_{\omega} \frac{L_{in}(\tau)}{L_{in}(\tau_{out})} \left[-\frac{\Omega^i}{h} H_{out}(\tau) + W^i(\mathbf{r}_{out}) \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

$$H_{in}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau_{in}}^{\tau} K_{in}(\tau') e(\tau') Q(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa}, \quad H_{out}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau}^{\tau_{out}} K_{out}(\tau') e(\tau') Q(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa},$$

$$K_{in} = \begin{Bmatrix} \cosh(\tau - \tau_{in}) \\ \cos(\tau - \tau_{in}) \end{Bmatrix}, \quad L_{in} = \begin{Bmatrix} \sinh(\tau - \tau_{in}) \\ -\sin(\tau - \tau_{in}) \end{Bmatrix}, \quad K_{out} = \begin{Bmatrix} \cosh(\tau_{out} - \tau) \\ \cos(\tau_{out} - \tau) \end{Bmatrix},$$

$$L_{out} = \begin{Bmatrix} \sinh(\tau_{out} - \tau) \\ -\sin(\tau_{out} - \tau) \end{Bmatrix}.$$

Решение справедливо в ячейках А и Б и не относится к вырожденной ячейке В. Решение классической задачи Неймана в вырожденной ячейке существует, если источник удовлетворяет условию разрешимости задачи.

Для получения конечного ответа формулы (15)–(23) необходимо дополнить уравнениями для нахождения геодезических линий (если $D^{ij}(\mathbf{r}) \neq \text{const}$), вычисления интегралов от источников вдоль лучей (16) и вычисления интегралов по угловым переменным. Искривление геодезических линий может проявляться в больших по размерам ячейках. Сведения о геодезических линиях можно найти в литературе по дифференциальной геометрии [25, с.54; 26, с.415].

Поведение решения вблизи изломов границы. Формулы решения на границе (19), (20) допускают дальнейшее преобразование в случае, когда точка $\mathbf{r}_{in,out}$ лежит вблизи точки \mathbf{r}_A , принадлежащей пересечению гладких участков границы. Пусть $\mathbf{r}_{in,out} = \mathbf{r}_A + \mathbf{s}$, где \mathbf{s} есть малый вектор перемещения. В точке \mathbf{r}_A вектор нормали не определен. Рассмотрим случай, когда точка \mathbf{r}_A лежит на ребре острого двугранного угла $\omega_{in,out} \leq \omega/2$, который не превышает телесного угла полупространства. Разобьем интеграл в (19), (20) на интеграл по телесному углу $\omega_{in,out}$, под которым из точки \mathbf{r}_A видна ячейка, и интеграл по дополнительному углу $\omega/2 - \omega_{in,out}$. Последний легко вычислить в пределе $\mathbf{s} \rightarrow 0$ и преобразовать (19) к виду

$$U(\mathbf{r}_{in}) = [1 - \lambda_{in}] \int_{\omega_{in}} \left[\frac{S_{out}(\tau_{in})}{X} I_{in} + \frac{\gamma_{in}}{X} [J_{out}(\tau_{in}) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega_{in}} + \lambda_{in} U_{in}^{ext}, \quad (24)$$

$$W^i(\mathbf{r}_{in}) = [1 - \lambda_{in}] \int_{\omega_{in}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau_{in})}{X} I_{in} - \frac{1}{X} [J_{out}(\tau_{in}) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega_{in}} + \lambda_{in} W_{ext,in}^i,$$

$$U(\mathbf{r}_{out}) = [1 - \lambda_{out}] \int_{\omega_{out}} \left[\frac{\gamma_{out}}{X} [J_{in}(\tau_{out}) + I_{in}] + \frac{S_{in}(\tau_{out})}{X} I_{out} \right] \frac{d\omega}{\omega_{out}} + \lambda_{out} U_{out}^{ext},$$

$$W^i(\mathbf{r}_{out}) = [1 - \lambda_{out}] \int_{\omega_{out}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{1}{X} [J_{in}(\tau_{out}) + I_{in}] - \frac{C_{in}(\tau_{out})}{X} I_{out} \right] \frac{d\omega}{\omega_{out}} + \lambda_{out} W_{ext,out}^i.$$

Здесь $\lambda_{in,out} = 1 - 2\omega_{in,out} / \omega$, $\lambda_{in,out}$ есть доля дополнительного телесного угла в телесном угле полупространства. Интегрирование в (24) проводится по телесному углу, под которым из точки \mathbf{r}_A , $\mathbf{r}_A \approx \mathbf{r}_{in,out}$, видна ячейка.

Если в точке границы $\mathbf{r}_{in,out} \approx \mathbf{r}_A$ поставлены условия Дирихле (8), $\chi_{in,out} \rightarrow -1$ и параметры лучей (21) принимают значения (22), то формулы (24) переходят в формулы

$$U(\mathbf{r}_{in,out}) = U(\mathbf{r}_{in,out}), \quad \omega_{in,out} \leq \omega/2, \quad (25)$$

$$W^i(\mathbf{r}_{in}) = \int_{\omega_{in}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau_{in})}{X} U(\mathbf{r}_{in}) - \frac{1}{X} [J_{out}(\tau_{in}) + I_{out}] \right] \frac{d\omega}{\omega_{in}},$$

$$W^i(\mathbf{r}_{out}) = \int_{\omega_{out}} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{1}{X} [J_{in}(\tau_{out}) + I_{in}] - \frac{C_{in}(\tau_{out})}{X} U(\mathbf{r}_{out}) \right] \frac{d\omega}{\omega_{out}}.$$

Если двугранный угол тупой и $\omega_{in,out} > \omega/2$, то формулы (19), (20) не допускают упрощений.

Из (19), (20), (24), (25) следует, что при переходе с одной грани двугранного угла на другую грань значение решения на границе может испытывать конечный разрыв. Для острых углов $\omega_{in,out} \leq \omega/2$ разрыв может возникать вследствие разрывности параметра луча $\gamma_{in,out}$. Для тупых углов $\omega_{in,out} > \omega/2$ к фактору разрывности параметра луча добавляется фактор видимости границы ячейки. Конечный разрыв решения может возникать вследствие того, что из точек, расположенных на разных гранях, видны разные участки границы ячейки.

Если на гранях острого угла $\omega_{in,out} \leq \omega/2$ поставлены условия Дирихле, то при переходе через ребро решение (25) меняется непрерывно. Если угол тупой $\omega_{in,out} > \omega/2$, то из-за разной видимости границы может возникнуть разрыв потока $W^i(\mathbf{r}_{in,out})$.

Формулы (24), (25) обобщаются на точки границы, лежащие вблизи

вершины трехгранного, многогранного или конического угла, опирающегося на выпуклое основание.

4. Эквивалентные формы решения

Получим эквивалентные формы решения смешанной задачи (7), (8).

Ячейки А и Б. Пусть коэффициенты и источники системы уравнений (7) – $2M$ раз дифференцируемые функции. Преобразуем систему (7):

$$\begin{cases} \frac{\partial[W^i - K_0^i]}{\partial r^i} + \varkappa_u \left[U - \frac{Q}{\varkappa_u} \right] = -\frac{\partial K_0^i}{\partial r^i}, \\ \frac{\partial}{\partial r^j} \left[D^{ij}U - \frac{D^{ij}Q}{\varkappa_u} \right] + \varkappa_w [W^i - K_0^i] = -\frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij}Q}{\varkappa_u} \right] - \varkappa_w K_0^i. \end{cases} \quad (26)$$

Если определить поток K_0^i и источник Q_1 в соответствии с формулами

$$K_0^i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij}Q}{\varkappa_u} \right], \quad Q_1(\mathbf{r}) = -\frac{\partial K_0^i}{\partial r^i} = \frac{\partial}{\partial r^i} \left[\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij}Q}{\varkappa_u} \right] \right], \quad (27)$$

то мы получим эквивалентную задачу относительно функций U_1 и W_1^i :

$$\begin{cases} \frac{\partial W_1^i}{\partial r^i} + \varkappa_u U_1 = Q_1, & U_1 = U - Q/\varkappa_u, \\ \frac{\partial[D^{ij}U_1]}{\partial r^j} + \varkappa_w W_1^i = 0, & W_1^i = W^i - K_0^i, \end{cases} \quad (28)$$

$$G_{ijn}^j [W_1^i - W_{1,ext}^i] = \frac{1-\chi}{1+\chi} \alpha [U_1 - U_1^{ext}], \quad \mathbf{r} \in \Gamma_m,$$

$$U_1^{ext} = U^{ext} - \frac{Q}{\varkappa_u}, \quad W_{1,ext}^i = W_{ext}^i - K_0^i.$$

Продолжим последовательно применять преобразование задач (26) в задачи (28). Введем рекуррентно вычисляемые источники

$$Q_0 = Q, \quad K_0^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij}Q_0}{\varkappa_u} \right], \quad N_0 = 0, \quad V_0^i = 0, \quad (29)$$

$$Q_1 = -\frac{\partial K_0^i}{\partial r^i}, \quad K_1^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij}Q_1}{\varkappa_u} \right], \quad N_1 = \frac{Q_0}{\varkappa_u}, \quad V_1^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial[D^{ij}N_1]}{\partial r^j}, \dots,$$

$$Q_n = -\frac{\partial K_{n-1}^i}{\partial r^i}, \quad K_n^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_n}{\varkappa_u} \right], \quad N_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k}{\varkappa_u}, \quad V_n^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial [D^{ij} N_n]}{\partial r^j}.$$

Источники Q_n , $0 \leq n \leq M$, определяют последовательность граничных задач:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_n^i}{\partial r^i} + \varkappa_u U_n = Q_n, \\ \frac{\partial [D^{ij} U_n]}{\partial r^j} + \varkappa_w W_n^i = 0, \end{cases} \quad \mathbf{r} \in V_m, \quad (30)$$

$$G_{ijn}^j [W_n^i - W_{n,ext}^i] = \frac{1-\chi}{1+\chi} \alpha [U_n - U_n^{ext}], \quad \begin{cases} U_n^{ext} = U^{ext} - N_n \\ W_{n,ext}^i = W_{ext}^i - V_n^i \end{cases}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_m.$$

Решение задачи (7), (8) связано с решениями задач (30) соотношениями

$$U = U_1 + \frac{Q}{\varkappa_u} = U_2 + \frac{Q}{\varkappa_u} + \frac{Q_1}{\varkappa_u} = \dots = U_n + N_n, \quad N_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{Q_k}{\varkappa_u},$$

$$W^i = W_1^i + K_0^i = W_2^i + K_0^i + K_1^i = \dots = W_n^i + V_n^i, \quad V_n^i = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial [D^{ij} N_n]}{\partial r^j}.$$

Записывая формулы (15), (16), (21) для задач (30), получим эквивалентные формы регулярного решения смешанной граничной задачи (7), (8):

$$U(\mathbf{r}) = N_n(\mathbf{r}) + \int_{\omega} \left[\frac{S_{out}(\tau)}{X} [J_{in}^{(n)}(\tau) + I_{in}^{(n)}] + \frac{S_{in}(\tau)}{X} [J_{out}^{(n)}(\tau) + I_{out}^{(n)}] \right] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (31)$$

$$W^i(\mathbf{r}) = V_n^i(\mathbf{r}) + \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau)}{X} [J_{in}^{(n)}(\tau) + I_{in}^{(n)}] - \frac{C_{in}(\tau)}{X} [J_{out}^{(n)}(\tau) + I_{out}^{(n)}] \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

$$J_{in}^{(n)}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau_{in}}^{\tau} S_{in}(\tau') e(\tau') Q_n(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa}, \quad J_{out}^{(n)}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau}^{\tau_{out}} S_{out}(\tau') e(\tau') Q_n(\tau') \frac{d\tau'}{\varkappa},$$

$$I_{in}^{(n)} = U_{n,in}^{ext} + \gamma_{in} \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W_{n,ext,in}^i, \quad I_{out}^{(n)} = U_{n,out}^{ext} - \gamma_{out} \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} W_{n,ext,out}^i.$$

Аналогично можно получить формы решений частных задач (22), (23).

В практических приложениях форма решения (31) может оказаться более удобной. В качестве примера рассмотрим ячейку А с постоянными ко-

эффицентами $\varkappa_u, \varkappa_w > 0$, в которой распределение объемных источников Q задается многочленом второго порядка

$$Q(\mathbf{r}) = \varkappa_u R_0 + \varkappa_u \varkappa_w R_i [r^i - r_n^i] + \frac{\varkappa_u^2 \varkappa_w}{2} R_{ij} [r^i - r_n^i][r^j - r_n^j].$$

Вычислим объемные источники:

$$N_1(\mathbf{r}) = \frac{Q(\mathbf{r})}{\varkappa_u}, \quad V_1^i(\mathbf{r}) = K_0^i(\mathbf{r}) = -D^{ij} R_j - \varkappa_u D^{ij} \frac{R_{kj} + R_{jk}}{2} [r^k - r_n^k], \quad K_1^i(\mathbf{r}) = 0,$$

$$\frac{Q_1}{\varkappa_u} = D^{ij} \frac{R_{ij} + R_{ji}}{2} = \text{const}, \quad J_{in}^{(1)}(\tau) = \frac{Q_1}{\varkappa_u} [C_{in}(\tau) - 1], \quad J_{out}^{(1)}(\tau) = \frac{Q_1}{\varkappa_u} [C_{out}(\tau) - 1].$$

Полагая $n = 1$, получим

$$U(\mathbf{r}) = \frac{Q}{\varkappa_u} + \frac{Q_1}{\varkappa_u} \left[1 - \int_{\omega} \frac{S_{in}(\tau) + S_{out}(\tau)}{X} \frac{d\omega}{\omega} \right] + \int_{\omega} \left[\frac{S_{out}(\tau)}{X} I_{in}^{(1)} + \frac{S_{in}(\tau)}{X} I_{out}^{(1)} \right] \frac{d\omega}{\omega},$$

$$W^i(\mathbf{r}) = V_1^i(\mathbf{r}) + \frac{Q_1}{\varkappa_u} \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{h} \frac{C_{in}(\tau) - C_{out}(\tau)}{X} \frac{d\omega}{\omega} + \int_{\omega} \frac{\Omega^i}{h} \left[\frac{C_{out}(\tau)}{X} I_{in}^{(1)} - \frac{C_{in}(\tau)}{X} I_{out}^{(1)} \right] \frac{d\omega}{\omega}.$$

Регулярное решение смешанной граничной задачи в ячейке произвольной формы выражается только через интегралы по угловым переменным.

Замечание. Эквивалентные формы решения (31) можно получить другим способом, если интегрировать по частям интегралы $J_{in}(\tau)$, $J_{out}(\tau)$ (16).

Вырожденная ячейка В. Введем объемные источники, вычисляемые рекуррентным образом:

$$Q_0(\mathbf{r}) = Q, \quad K_0^i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_0}{\varkappa_w} \right], \quad Q_1(\mathbf{r}) = -\frac{\partial K_0^i}{\partial r^i}, \quad (32)$$

$$K_1^i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_1}{\varkappa_w} \right], \dots,$$

$$Q_n(\mathbf{r}) = -\partial K_{n-1}^i / \partial r^i, \quad K_n^i(\mathbf{r}) = -\frac{1}{\varkappa_w} \frac{\partial}{\partial r^j} \left[\frac{D^{ij} Q_n}{\varkappa_w} \right], \quad 0 \leq n \leq M.$$

Интегрируя по частям интегралы $J_{in}(\tau)$, $J_{out}(\tau)$ (16), получим

$$J_{in}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{S_{in}^{2k+2}(\tau') Q_k(\mathbf{r}')}{[2k+2]! \varkappa_w} \right]_{\mathbf{r}_{in}}^{\mathbf{r}} + \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{S_{in}^{2k+3}(\tau') K_k^i(\mathbf{r}')}{[2k+3]!} \right]_{\mathbf{r}_{in}}^{\mathbf{r}} + J_{in}^{(n)}(\tau), \quad (33)$$

$$J_{out}(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{S_{out}^{2k+2}(\tau') Q_k(\mathbf{r}')}{[2k+2]! \varkappa_w} \right]_{\mathbf{r}_{out}}^{\mathbf{r}} - \frac{D_{ij} \Omega^j}{h} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{S_{out}^{2k+3}(\tau') K_k^i(\mathbf{r}')}{[2k+3]!} \right]_{\mathbf{r}_{out}}^{\mathbf{r}} + J_{out}^{(n)}(\tau),$$

$$J_{in}^{(n)}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau_{in}}^{\tau} \frac{S_{in}^{2n+1}(\tau') e(\tau') Q_n(\tau')}{[2n+1]! \varkappa_w} d\tau' \approx \left[\frac{S_{in}^{2n+2}(\tau')}{[2n+2]!} \right]_{\mathbf{r}_{in}}^{\mathbf{r}} \frac{Q_n(\mathbf{r})}{\varkappa_w},$$

$$J_{out}^{(n)}(\tau) = \frac{1}{e} \int_{\tau}^{\tau_{out}} \frac{S_{out}^{2n+1}(\tau') e(\tau') Q_n(\tau')}{[2n+1]! \varkappa_w} d\tau' \approx \left[\frac{S_{out}^{2n+2}(\tau')}{[2n+2]!} \right]_{\mathbf{r}_{out}}^{\mathbf{r}} \frac{Q_n(\mathbf{r})}{\varkappa_w}, \quad 0 \leq n \leq M.$$

Подстановка (33) в (15) дает эквивалентные формы решения.

5. Конечно-аналитическая схема

Построим конечно-аналитическую схему для нахождения решения системы уравнений (1), (3) или (7), (8) в области с разрывными коэффициентами и источниками.

Конечно-аналитическая схема представляет собой дискретную аппроксимацию решения задачи, построенную с помощью сшивки регулярных решений в ячейках, на которые поделена область. Сшивка регулярных решений выполняется на границах ячеек, которые проходят по поверхностям конечных разрывов коэффициентов и источников уравнений (если таковые имеются). Термин возник как аналог термина "конечно-разностная схема" [8]. Заметим, что последняя есть дискретная аппроксимация задачи, построенная с помощью сшивки конечных разностей решения в ячейках.

Как и в теории разностных схем, введем понятие шаблона. Шаблон построенной далее конечно-аналитической схемы состоит из конечного набора точек, лежащих на гладких участках границы ячейки $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_p, \dots, \mathbf{r}_S \in \Gamma_m$. Точки шаблонов, лежащие на внешней границе Γ области V , будем называть «внешними» точками. Все остальные точки шаблонов будем называть «внутренними» точками области V . Любая внешняя точка принадлежит границе одной ячейки. Любая внутренняя точка лежит на общем участке границы, отделяющем две смежные ячейки.

Условия сшивки. Определим условия сшивки регулярных решений, выходящих из ячеек. Первое условие сшивки под названием «выпуклость

шаблонов» состоит в том, что из любой точки шаблона видны все остальные точки этого же шаблона. Для того чтобы шаблон был выпуклым, достаточно, чтобы ячейка была выпуклым множеством. Ограничимся построением аналитической схемы с выпуклыми ячейками.

Второе условие сшивки назовем условием «выравнивания шаблонов» смежных ячеек. Желательно, чтобы точки шаблонов смежных ячеек, лежащие на общем участке границы, совпадали. В противном случае схему необходимо дополнить интерполяционными формулами для переноса значений решения из точки в точку вдоль общей границы. Интерполяция может приводить к потерям точности.

Третье условие, назовем его «физическим» условием, состоит в правильном выборе сшиваемых величин. Выбор величин содержит долю произвола. При ответе на вопрос «что сшивать?» следует исходить из специфики прикладной задачи. Вместе с тем можно дать некоторые рекомендации. Имеется довольно широкое многообразие систем (1), (3). При потенциальности векторных коэффициентов (5) они приводятся к стандартному виду (7), (8). Поэтому искать сшиваемые величины целесообразно среди функций, входящих в уравнения (7), (8). Это могут быть линейные или нелинейные комбинации функций.

Рассмотрим «естественные условия» сшивки, означающие, что во внутренних точках области нет внешних источников U_{ext} , W_{ext}^i ; выбор сшиваемых величин определяется смыслом уравнений системы (7). Обратимся ко второму уравнению. Оно выражает условие статического равновесия сил – отклик системы в виде потока W^i и градиента величины $D^{ij}U$ на действие внешней силы S^i (см. (1),(6)). Пусть внутренняя точка p лежит на гладком участке границы, отделяющем ячейки V_m и V_k . Запишем проекцию условия равновесия сил на направление нормали к границе. Из него следуют соотношения детального баланса:

$$n_p^i(m)W_p^i(m) + n_p^i(k)W_p^i(k) = n_p^i(m)[W_p^i(m) - W_p^i(k)] = 0, \quad (34)$$

$$D_p^{ij}(m)n_p^i(m)n_p^j(m)U_p(m) = D_p^{ij}(k)n_p^i(k)n_p^j(k)U_p(k), \quad \mathbf{n}_p(k) = -\mathbf{n}_p(m).$$

Первое условие выражает равенство компонентов потока, нормальных к элементу границы, второе выражает равенство соответствующих компонентов тензора давления. Учтено, что векторы внешней нормали ячеек противоположны по направлению. Обращаем внимание, что второе условие инвариантно относительно нормировки тензора D^{ij} (см. (10)).

Замечание. Естественные условия сшивки (34) в равной мере имеют отношение и к разностным схемам, и к схемам метода конечных элементов. В работах, посвященных разработке схем переноса энергии излучением или переноса нейтронов в ядерных реакторах, можно встретить подмену второго условия (34) более простым условием $U_p(m) = U_p(k)$. Это верно лишь в случае $D^{ij} = \delta^{ij}/N$, т.е. когда используется так называемое диффузионное приближение. В общем случае вызываемые подменой погрешности невелики. Но они могут быть источником появления расхождений при выполнении сравнения с результатами других расчетов или с точным решением.

Уравнения конечно-аналитической схемы. В каждой точке шаблона \mathbf{r}_p определим свою подходящую квадратурную формулу для вычисления интегралов по углу ω_p , $|\omega_p| = \omega/2$, под которым видна ячейка V_m :

$$2 \int_{\omega_p} f(\mathbf{\Omega}) \frac{d\omega}{\omega} \approx \sum_{q \neq p} \theta_{qp} f(\mathbf{\Omega}_{qp}), \quad \mathbf{\Omega}_{qp} \in \omega_p, \quad \mathbf{n}_p \mathbf{\Omega}_{qp} > 0, \quad \sum_{q \neq p} \theta_{qp} = 1. \quad (35)$$

Здесь $f(\mathbf{\Omega})$ – ограниченная интегрируемая функция, $\mathbf{\Omega}_{qp}$ – узлы квадратурной формулы, представляющие собой направляющие векторы лучей, проходящих в точку p из других точек $q \neq p$ шаблона, θ_{qp} – веса квадратурной формулы, \mathbf{n}_p – вектор внешней нормали.

Запишем решение смешанной задачи (30), (31) для ячейки m в точке шаблона p с помощью квадратурной формулы (35). За начало отсчета на луче примем точку q :

$$U_p(m) = \sum_{q \neq p} \frac{\theta_{qp} \gamma_p}{X_{qp}} \left[U_q^{ext} - N_{n,q} + \gamma_q \frac{D_{ij} \Omega_{qp}^j}{h_{qp}} [W_{ext,q}^i - V_{n,q}^i] + J_q^{(n)}(\tau_p) \right] + \quad (36)$$

$$+ [U_p^{ext} - N_{n,p}] \sum_{q \neq p} \theta_{qp} \frac{S_q(\tau_p)}{X_{qp}} - [W_{ext,p}^i - V_{n,p}^i] \sum_{q \neq p} \theta_{qp} \gamma_p \frac{D_{ij} \Omega_{qp}^j}{h_{qp}} \frac{S_q(\tau_p)}{X_{qp}} + N_{n,p},$$

$$W_p^i(m) = \sum_{q \neq p} \frac{\theta_{qp}}{X_{qp}} \left[\gamma_q [W_{ext,q}^i - V_{n,q}^i] + \frac{\Omega_{qp}^i}{h_{qp}} [U_q^{ext} - N_{n,q} + J_q^{(n)}(\tau_p)] \right] - \quad (37)$$

$$- [U_p^{ext} - N_{n,p}] \sum_{q \neq p} \theta_{qp} \frac{\Omega_{qp}^i}{h_{qp}} \frac{C_q(\tau_p)}{X_{qp}} + [W_{ext,p}^i - V_{n,p}^i] \sum_{q \neq p} \theta_{qp} \gamma_p \frac{C_q(\tau_p)}{X_{qp}} + V_{n,p}^i,$$

$$h_{qp} = \sqrt{D_{ij} \Omega_{qp}^i \Omega_{qp}^j}, \quad \gamma_q = -\frac{1 + \chi_q G_{ij}^{(q)} n_q^j \Omega_{qp}^i}{1 - \chi_q \alpha_q h_{qp}}, \quad \gamma_p = \frac{1 + \chi_p G_{ij}^{(p)} n_p^j \Omega_{qp}^i}{1 - \chi_p \alpha_p h_{qp}},$$

$$\tau_p = \tau_p(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p) = \int_0^{l_p} h_{qp} \varkappa dl', \quad \tau = \int_0^l h_{qp} \varkappa dl', \quad J_q^{(n)}(\tau_p) = \frac{1}{e} \int_0^{\tau_p} S_q(\tau) e(\tau) Q_n(\tau) \frac{d\tau}{\varkappa},$$

$$S_q(\tau) = \frac{\varkappa_W}{\varkappa} \begin{Bmatrix} \sinh \tau \\ \sin \tau \\ \tau \end{Bmatrix} + \gamma_q \begin{Bmatrix} \cosh \tau \\ \cos \tau \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad C_q(\tau) = \begin{Bmatrix} \cosh \tau \\ \cos \tau \\ 1 \end{Bmatrix} + \gamma_q \frac{\varkappa}{\varkappa_W} \begin{Bmatrix} \sinh \tau \\ -\sin \tau \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$X_{qp} = \frac{\varkappa_W}{\varkappa} \begin{Bmatrix} \sinh \tau_p \\ \sin \tau_p \\ \tau_p \end{Bmatrix} + \gamma_q \gamma_p \frac{\varkappa}{\varkappa_W} \begin{Bmatrix} \sinh \tau_p \\ -\sin \tau_p \\ 0 \end{Bmatrix} + [\gamma_q + \gamma_p] \begin{Bmatrix} \cosh \tau_p \\ \cos \tau_p \\ 1 \end{Bmatrix}.$$

Для составления конечно-аналитической схемы необходимо сшить решения (36), (37), выходящие из смежных ячеек V_m и V_k во внутренних точках области. Ограничимся схемой с естественными условиями сшивки (34). В этом случае во всех внутренних точках области должны быть поставлены условия Дирихле, а во внешних точках области V , лежащих на границе Γ – смешанные граничные условия (8). Соответственно, для внутренних точек p, q в формулах (36), (37) выполним замену (22): $\gamma_{p,q} = 0$, $U_{p,q}^{ext} = U_{p,q}$. В результате из уравнений (36), (37) исключаются внешние источники U_{ext} , W_{ext}^i во внутренних точках области. Уравнение (36) связывает плотность $U_p(m)$ со значениями плотности $U_q(m)$ в остальных точках шаблона $q \neq p$. Уравнение (37) связывает поток $W_p^i(m)$ со значениями плотности $U_q(m)$ во всех точках шаблона, включая данную точку. Исключим из первого условия (34) потоки $W_p^i(m)$, $W_p^i(k)$ в общей точке p с помощью уравнения (37). Прделаем это для всех внутренних точек области. Полученные уравнения вместе с (36) и вторым условием сшивки (34) составят полную систему алгебраических уравнений относительно плотностей $U_p(m)$ в точках шаблонов. Конечно-аналитическая схема составлена.

Нахождение решения. Пусть система алгебраических уравнений конечно-аналитической схемы разрешима. Решение системы может быть найдено алгоритмами вычислительной линейной алгебры [27] или иными методами. Далее по известным значениям плотности $U_p(m)$ с помощью соот-

ношений (37) вычисляются потоки $W_p^i(m)$. Часто значений решения в точках шаблонов бывает достаточно для ответов на запросы прикладной задачи. Напомним, что точки шаблонов лежат на границах ячеек.

Если требуется найти решение внутри ячеек, то выполняется второй этап. Пусть \mathbf{r} есть некоторая точка внутри ячейки. Выпустим из нее лучи так, чтобы они пришли в точки шаблона. Продолжим лучи назад до пересечения с границей ячейки в некоторых точках. Эти точки могут не совпасть с точками шаблона. Определим новый шаблон, включив в него точки старого шаблона и новые точки. Затем построим квадратурную формулу для вычисления интегралов по угловым переменным. Эта формула аналогична формуле (35) с тем отличием, что интегрирование выполняется по полному телесному углу ω . Узлами формулы являются направляющие векторы лучей Ω_{qp} , приходящих из точек нового шаблона. Дискретизация уравнений (15), (16) или (32) с помощью квадратурной формулы дает искомое решение в выбранной точке. Процедура повторяется для других точек области, пока не будет достигнута необходимая степень детализации решения.

В сравнении с разностными схемами и схемами метода конечных элементов аналитические схемы имеют ряд недостатков и ряд преимуществ. Наиболее важное преимущество состоит в отсутствии жесткой зависимости точности аппроксимации от размеров и формы ячеек. В аналитической схеме требования на размеры ячеек сводятся к условиям (5), (12). Это условия совсем иного типа, чем требования аппроксимации разностных схем. Они гораздо мягче и зависят от исходных, физических параметров задачи.

Имеется широкий класс задач численного моделирования ядерных реакторов, защиты от излучений, радиационной газовой динамики, переноса излучений в атмосфере, задач пограничного слоя, в которых разностные схемы столкнулись с большими трудностями. Рассмотрим распространение излучений – нейтронов или фотонов электромагнитного излучения. Если решать задачу с физическими (настоящими) сечениями взаимодействия излучений с веществом, то ячейки оказываются прозрачными для излучений одних энергий и одновременно непрозрачными для излучений других энергий. Непрозрачностью называется выполнение условия $\Delta\tau = \tau_{out} - \tau_{in} > 1$, когда приведенная длина отрезка луча от точки входа до точки выхода из ячейки больше единицы. Непрозрачность возникает вблизи резонансов поглощения и испускания, где резко увеличиваются коэффициенты уравнений κ_u, κ_w . Типичное отношение коэффициента при энергии резонанса к зна-

чению этого же коэффициента между резонансами (среднему фону) может составлять $10^2 - 10^5$. Число сильных резонансов может составлять $10^3 - 10^5$.

Разностные схемы аппроксимируют уравнения, если ячейки прозрачны для излучений всех энергий. Т.е. требуется сильно измельчать пространственную сетку. Поэтому современные детерминистические транспортные коды решают не физические, а модельные уравнения со сглаженными на интервалах сетки энергий коэффициентами. Сглаживание выполняется применением многогруппового приближения, метода функций пропуска, другими методами. Лучшие транспортные коды, использующие разностные схемы, на многомерных пространственных задачах достигли отметки 100–200 интервалов–групп по сетке энергий. Так что для проведения расчетов с физическими не сглаженными коэффициентами требуется еще на несколько порядков увеличить мощность современных суперкомпьютеров. Схожие трудности, связанные с требованием сильно уменьшать шаг конечно-разностных схем в целях сохранения аппроксимации, возникают при моделировании пограничного слоя [4, 5, 10].

Конечно-аналитические схемы измельчать пространственную сетку не требуют. Это преимущество схемы показали, например, при решении одномерных задач переноса излучений [6, 7, 12, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Владимиров В.С.* Численное решение кинетического уравнения для сферы // Выч. математика, сб. 3. Ред. А.А. Абрамов. – М.: Изд-во АН СССР, 1958, с.3-33;
Vladimirov V.S. Chislennoe reshenie kineticheskogo uravneniia dlia sfery // Vych. matematika, sb. 3. Red. A.A. Abramov. – М.: Izd-vo AN SSSR, 1958, s.3-33.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Однородные разностные схемы высокого порядка точности на неравномерных сетках // Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т.1(3), с.425-440;
Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Homogeneous difference schemes of a high degree of accuracy on non-uniform nets // USSR Comput. mathematics and math. physics, 1962, v.1(3), p.465-486.
3. *Самарский А.А.* Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971;
Samarskii A.A. Vvedenie v teoriyu raznostnykh skhem – М.: Nauka, 1971.
4. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки, 1969, т. 6(2), с.237-248;
Il'in A.M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative // Math. notes of the Acad. of sciences of the USSR, 1969, v.6(2), p.596-602.
5. *Емельянов К.В.* Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных // Свердловск: Труды Ин-та матем. и механики Уральского научн. центра АН СССР, 1973, №11, с.30-42;

- Emelyanov K.V.* Raznostnaia skhema dlia trekhmernogo ellipticheskogo uravneniia s malym parametrom pri starshikh proizvodnykh // Sverdlovsk: Trudy In-ta matem. i mekhaniki Uralskogo Nauchn. Tsentra AN SSSR, 1973, №11, p.30-42.
6. *Куликов Ю.Н., Четверушкин Б.Н.* Неявный разностный метод определения температуры в задачах радиационной газовой динамики // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973, т.13(1), с.136-146;
Kulikov Yu.N., and Chetverushkin B.N. An implicit difference method for temperature determination in problems of radiation gas dynamics // USSR Comput. mathematics and math. physics, 1974, v.13(1), p.174-186.
 7. *Чарахчьян А.А.* Расчет нестационарных, сферически симметричных течений излучающего серого газа // Динамика излучающего газа. Вып. 1. Ред. В.В. Александров. – М.: ВЦ АН СССР, 1974, с.54-74;
Charakhchyan A.A. Raschet nestatsionarnykh, sfericheski simmetrichnykh techenii izluchaiushchego serogo gaza // Dinamika izluchaiushchego gaza. Vyp. 1. Red. V.V. Aleksandrov. – М.: VTs AN SSSR, 1974, s.54-74.
 8. *Chen C.J., Naseri-Nashet H., and Ho K.S.* Finite analytic numerical solution of heat transfer in two dimensional cavity flow // J. Numer. heat transfer, 1981, v.4(2), p.179-197.
 9. *Sun Y., and Militzer J.* The piecewise parabolic finite analytic method. Part I: Theory // Appl. math. modelling, 1992, v.16, p.576-588.
 10. *Chen C.J., Bernatz R.A., Carlson K.D., Lin W., and de Vahl D.G.* Finite analytic method in flows and heat transfer // Appl. mech. rev., 2002, v.55(2), p.B34-B34.
 11. *Pontaza J.P., Chen H.C., and Reddy J.N.* A local-analytic-based discretization procedure for the numerical solution of incompressible flows // Num. methods in fluids, 2005, v.49(6), p.657-699.
 12. *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 2: Конечно-аналитическая характеристическая схема для одномерных задач // Матем. моделирование, 2014, т.26, №7, с.33-53;
Shilkov A.V. Even and odd parity kinetic equations of particle transport. 2: A finite analytic characteristic scheme for one dimensional problems // Math. models and computer simulations, 2015, v.7, №1, p.36-50.
 13. *Шильков А.В.* Четно-нечетные кинетические уравнения переноса частиц. 3: Конечно-аналитическая схема на тетраэдрах // Матем. моделирование, 2015, т.27, №2, с.34-62;
Shilkov A.V. Even and odd parity kinetic equations of particle transport. 3: Finite analytic schemes on tetrahedral // Math. models and computer simul., 2015, v.7, №5, p.409-429.
 14. *Basko M.M., and Tsygvintsev I.P.* A hybrid model of laser energy deposition for multidimensional simulations of plasmas and metals // Comp. physics communications, 2017, v.214, p.59-70.
 15. *Шильков А.В.* Решение эллиптических уравнений методом лучевых переменных. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017, препринт № 119, 35 с.;
Shilkov A.V. Reshenie ellipticheskikh uravnenii metodom luchevykh peremennykh. – М.: IPM im. M.V. Keldysha, 2017, preprint № 119, 35 s.
 16. *Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высшая школа, 1970;
Koshlyakov N.S., Gliner E.B., and Smirnov M.M. Uravneniia v chastnykh proizvodnykh matematicheskoi fiziki. – М.: Vysshiaia shkola, 1970.
 17. *Бабич В.М., Каплевич М.Б., Михлин С.Г. и др.* Линейные уравнения математической физики. Справочник. – М.: Наука, 1964;
Vabich V.M., Kapilevich M.B., and Mikhlin S.G. Lineinye uravneniia matematicheskoi fiziki. Spravochnik. – М.: Nauka, 1964.
 18. *Миранда К.* Уравнения с частными производными эллиптического типа. – М.: ИЛ, 1957;

- Miranda C.* Partial differential equations of elliptic type. Transl. from the ital. – Berlin-Heidelberg: Springer, 1970. XII.
19. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики, т.2. – М.: Гостехиздат, 1945; *Courant R., and Hilbert D.* Methods of mathematical physics, v.2. Partial differential equations. – New York: Wiley Interscience, 1962.
20. *Ландис Е.М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. – М.: Наука, 1971; *Landis E.M.* Second order partial differential equations of elliptic and parabolic type. AMS, Transl. of math. monographs, 1998, v.171.
21. *Ладыженская О.А., Уралтцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. *Ladyzhenskaya O.A., and Uraltseva N.N.* Lineinye i kvazilineinye uravneniia ellip-ticheskogo tipa. – М.: Nauka, 1973.
22. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. *Mikhlin S.G.* Linear equations of mathematical physics. – Holt, Rinehart and Winston, 1967.
23. *Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н.* Сборник задач по математической физике. 4-е изд. – М.: Физматлит, 2004; *Budak B.M., Samarskii A.A., and Tikhonov A.N.* A Collection of problems in mathematical physics. – Oxford: Pergamon Press, 1964.
24. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001. *Polyanin A.D., and Nazaikinskii V.E.* Linear partial differential equations for engineers and scientists. 2nd ed. Boca Raton. CRC Press, 2016.
25. *Бурого Ю.Д., Залгаллер В.А.* Введение в риманову геометрию. – СПб.: Наука, 1994; *Burago Yu.D., and Zalgaller V.A.* Vvedenie v rimanovu geometriiu. – SPb: Nauka, 1994.
26. *Рашиевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. – М.: Наука, 1967; *Rashevsky P.K.* Vvedenie v rimanovu geometriiu. – М.: Nauka, 1967.
27. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. *Demmel J.W.* Applied numerical linear algebra. SIAM, Philadelphia, PA, USA, 1997.

Поступила в редакцию 19.11.18

После доработки 19.11.18

Принята к публикации 10.12.18