

## **АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ОКОЛО ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ**

© 2019 г. *В.Н. Булгаков, В.П. Котенев, Ю.С. Ожгибисова*

АО "ВПК "НПО машиностроения"

МГТУ им. Н.Э. Баумана

v.n.bulgakov@vpk.npomash.ru, y.s.ozhgibisova@vpk.npomash.ru

DOI: 10.1134/S0234087919060054

При высокоскоростном обтекании наиболее нагруженными в тепловом отношении являются, как правило, затупленные элементы тел сложной формы, где газодинамические параметры испытывают значительные изменения. В связи с этим большое значение имеет быстрая оценка теплового нагружения на затупленных телах. Рассматриваются уравнения ламинарного пограничного слоя при установившемся осесимметричном течении сжимаемого совершенного газа, записанные в специальных координатах. В качестве граничного условия на стенке принято условие «прилипания», а на границе – равенство скорости и температуры соответствующим значениям внешнего потока. В методе Польгаузена вводят понятия толщины вытеснения и толщины потери импульса, находят связи для отношения этих величин к толщине пограничного слоя и выводят дифференциальное уравнение для определения формпараметра пограничного слоя, через который определяют остальные характеристики пограничного слоя. Модификация метода Польгаузена проводится для того, чтобы упростить процедуру расчета, исключив из неё дифференциальные уравнения. Аналогично скорости в виде полинома четвертой степени представляется специальная функция, в которую входит энтальпия и безразмерный «кинетический» параметр, подлежащий определению. Для нахождения коэффициентов полинома используются граничные условия на стенке и на границе пограничного слоя. Кинетический параметр определяется по-разному для тел различной формы. Приводятся результаты применения предложенного метода для расчета тепловых потоков, численное исследование которых также приведено в ряде работ в рамках полных систем уравнений Навье-Стокса и Прандтля. Сравнение результатов свидетельствует об эффективности изложенного метода.

Ключевые слова: пограничный слой, вязкость, метод Польгаузена, сверхзвуковое обтекание, тепловой поток, звуковая точка.

## ANALYTICAL STUDY OF LAMINAR BOUNDARY LAYER NEAR BLUNTED BODIES

*V.N. Bulgakov, V.P. Kotenev, Iu.S. Ozhgibisova*

JSC «MIC «Mashinostroeniia»  
Bauman Moscow State Technical University

In high-speed flow, blunt body elements having an irregular shape due to which gas dynamic parameters undergo considerable changes are, as a rule, the most thermally loaded parts. In this connection, quick evaluation of thermal loading on blunt bodies is important. Laminar boundary layer equations given in special coordinates in the constant axisymmetric flow of a compressible perfect gas are considered. The «adhesion» condition is accepted as a boundary condition on the wall, and equality of speed and temperature to the corresponding values of the external flow is accepted on the border. In the Pohlhausen's method, concepts of displacement thickness and momentum thickness are introduced, relations between these values and the boundary layer thickness are established, and a differential equation is derived to define the boundary layer form-parameter using which other characteristics of the boundary layer are identified. The Pohlhausen's method is modified in order to simplify the calculation, excluding from it the differential equations. Similar to velocity, a special function which includes enthalpy and dimensionless «kinetic» parameter to be determined is introduced as a biquadratic polynom. Boundary conditions on the wall and on the border of the boundary layer are used to determine the polynom coefficients. The kinetic parameter is defined in a different way for bodies of various shapes. Application results of the proposed method for calculation of thermal flows which numerical analysis is also given in number of papers within full systems of Navier-Stokes and Prandtl equations. Comparison of the results shows efficiency of the proposed method.

Key words: boundary layer, viscosity, Pohlhausen method, supersonic flow, heat transfer, sonic point.

### 1. Введение

При высокоскоростном обтекании наиболее нагруженными в тепловом отношении являются, как правило, затупленные элементы тел сложной формы, где газодинамические параметры испытывают значительные изменения [1–6]. В данной работе предлагается аналитический метод для проведения многокритериальных серийных расчетов.

### 2. Математическая постановка

Рассмотрим уравнения ламинарного пограничного слоя при установившихся осесимметричных течениях сжимаемого совершенного газа.

Введем следующие обозначения: пусть нижний индекс «0» соответст-

ует параметрам на стенке (поверхность обтекаемого тела), а «1» – параметрам на границе пограничного слоя,  $x$  – координата, направленная вдоль образующей тела, а  $y$  – по нормали к ней. Дальнейшие исследования будем проводить в координатах:

$$\xi \equiv x, \quad \eta = \frac{1}{\delta_1} \int_0^y \frac{\mu_1(x)}{\mu(x, y)} dy. \quad (1)$$

Здесь  $\mu$  – динамическая вязкость,  $\delta_1 = \int_0^{\delta(x)} \frac{\mu_1}{\mu} dy$  – приведенная толщина пограничного слоя, т.е.  $0 \leq \eta \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq \delta(x)$ , где  $\delta(x)$  – толщина погранслоя.

Система уравнений пограничного слоя в этих переменных имеет вид

$$\rho u \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} = - \frac{dP}{dx} + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial P}{\partial \eta} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho u r}{\partial x} + \frac{\partial \rho u r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \rho v r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\rho u \left( \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \rho v \frac{\mu_1}{\mu \delta_1} \frac{\partial h}{\partial \eta} = u \frac{dP}{dx} + \frac{1}{Pr} \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \frac{\partial^2 h}{\partial \eta^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left( \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho}, \quad P = \rho R T.$$

Здесь  $\rho$  – плотность,  $u$  и  $v$  – проекции вектора скорости на направления  $x$  и  $y$ ,  $r$  – цилиндрический радиус тела,  $P$  – давление,  $h$  – энтальпия,  $Pr$  – число Прандтля,  $R$  – газовая постоянная,  $T$  – температура,  $\gamma$  – показатель адиабаты.

Граничные условия на стенке и на границе пограничного слоя:

$$u_0 = v_0 = 0 \text{ при } y = 0, \quad (3)$$

$$u = u_1, \quad h = h_1 \text{ при } y = \delta(x). \quad (4)$$

Коэффициент динамической вязкости газов  $\mu$  определяется с помощью формулы Сазерленда или с использованием степенной зависимости:

$$\frac{\mu}{\mu_a} = \frac{T_{00} + T_a}{T_{00} + T} \left( \frac{T}{T_a} \right)^{3/2}, \quad T_a = 273 \text{ К}, \quad T_{00} = 110 \text{ К}, \quad \mu_a = 1.72 \cdot 10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}, \quad (5)$$

$$\mu / \mu_0 = (T / T_0)^\omega = (h / h_0)^\omega. \quad (6)$$

Из уравнения движения на стенке следует:

$$-\left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right)_0 = -\frac{\mu_0 \delta_1^2}{\mu_1^2} \frac{1}{u_1} \frac{dP}{dx} = \Lambda(x), \quad (7)$$

где  $\bar{u} = u / u_1(x)$  – безразмерная скорость,  $u_1(x)$  – скорость на границе пограничного слоя,  $\Lambda(x)$  – формпараметр пограничного слоя.

Используя граничные условия (3), (4) и равенство нулю первой и второй производных от скорости по координате  $\eta$  на границе пограничного слоя, находим коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  полинома Польгаузена [7–9]:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= a(x)\eta + b(x)\eta^2 + c(x)\eta^3 + d(x)\eta^4 = \\ &= (2 + \Lambda / 6)\eta - (\Lambda / 2)\eta^2 + (\Lambda / 2 - 2)\eta^3 + (1 - \Lambda / 6)\eta^4. \end{aligned} \quad (8)$$

### 3. Параметры на границе пограничного слоя

Дальнейшее рассмотрение будем производить, используя результаты по распределению давления на поверхности затупленных тел, полученные в [10]:

$$\frac{P}{P'_0} = \left( \frac{1 - k\chi^2}{1 + k\chi^2} \right)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad (9)$$

где  $k = \frac{\gamma-1}{\gamma+3} \frac{1}{(\sigma_* - 90^\circ)^2}$ ,  $\chi = \sigma - 90^\circ$ ,  $\sigma$  – угол между осью тела и вектором скорости,  $\sigma_*$  – положение звуковой точки,  $P'_0$  – давление торможения.

Применение формулы (9) предполагает, что давление найдено из невязкого обтекания. Известно, что при достаточно больших числах Рейнольдса распределения давления, полученные из решения уравнений Навье-Стокса и Эйлера, близки.

Формула (9) позволяет вычислить параметры на границе пограничного слоя:

$$u_1^2 / H = 2(1 - \bar{h}_1), \quad (10)$$

где  $\bar{h}_1 = h_1 / H = (P/P'_0)^{(\gamma-1)/\gamma}$ ,  $H$  – полная энтальпия (энтальпия торможения).

Далее в работе безразмерные параметры с чертой также отнесены к значению  $H$ .

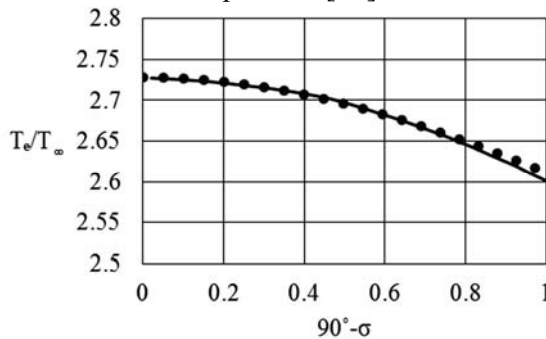
#### 4. Адиабатическая стенка

Для адиабатической стенки тепловой поток равен нулю, а температура на поверхности тела вычисляется по формуле

$$\frac{T_e}{T_\infty} = \bar{h}_e \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \right). \quad (11)$$

Здесь  $T_\infty$  – температура набегающего потока,  $\bar{h}_e = \sqrt{\text{Pr}} + (1 - \sqrt{\text{Pr}}) \bar{h}_1$  – так называемая адиабатическая энтальпия, соответствующая теплоизолированной поверхности.

На рис.1 приведены данные адиабатической температуры на сфере, полученные при решении задачи обтекания в точной вязкой постановке при помощи численного интегрирования для  $M_\infty = 2.94$  [11]. Сплошной линией обозначены результаты применения соотношения (11) с использованием формулы (9), а точками – данные работы [11].



**Рис.1.** Адиабатическая температура на стенке на поверхности сферы:  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $M_\infty = 2.94$ .

Результаты, полученные по соотношению (11), хорошо согласуются с данными численного расчета, что подтверждает точность формулы (9).

#### 5. Оценка формпараметра

Будем рассматривать режим относительно холодной стенки, т.е. она нагревается и тепловой поток  $Q$  к ней положителен.

На стенке выполнены условия

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_0 = \left( \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_0 = \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)_0 = 0. \quad (12)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2) с учетом (12):

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_0 / \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_0 = \frac{6c}{2b}. \quad (13)$$

Из (5), с учетом  $h = c_p T$ , где  $c_p$  – коэффициент теплоемкости, следует

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \left(\frac{3}{2} - \frac{\bar{h}_0}{T_{00}/T'_0 + \bar{h}_0}\right) \frac{1}{\bar{h}_0} \left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta}\right)_0. \quad (14)$$

Здесь  $T'_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2\right)$  – температура в точке торможения,  $M_\infty$  – число Маха набегающего потока,  $T_\infty$  определяется с помощью таблиц стандартной атмосферы по заданным числам Маха  $M_\infty$  и Рейнольдса  $Re_\infty = \frac{\rho_\infty V_\infty R_0}{\mu_\infty}$ , где  $R_0$  – значение радиуса кривизны в точке торможения.

Для степенной зависимости (6) производная принимает вид

$$\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}\right)_0 = \frac{\omega}{h_0} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_0. \quad (15)$$

Так как  $Q > 0$ , то  $(\partial h / \partial \eta)_0 > 0$ . Из формул (8), (13) – (15) получаем

$$0 < \Lambda < 4. \quad (16)$$

## 6. Распределение энтальпии в пограничном слое

Проведем модификацию метода Польгаузена, исключив из процедуры дифференциальное уравнение. Представим в виде полинома четвертой степени следующую функцию:

$$h + \alpha(x) \frac{u^2}{2} = h_0 + p(x)\eta + q(x)\eta^2 + s(x)\eta^3 + t(x)\eta^4, \quad (17)$$

где  $\alpha(x)$  – безразмерный «кинетический» параметр, подлежащий определению. При  $\alpha = 1$  соотношение (17) дает полную энтальпию единицы массы газа.

Для определения коэффициента  $p$  используем (13) – (17),  $q$  – последнее уравнение (энергии) системы (2) с учетом граничных условий (3) и (17). Для нахождения  $s$  продифференцируем уравнение энергии с учетом (12),

(17) и дополнительного условия  $\bar{h}_0 = \text{const}$ , которое, как правило, используется в расчетах, тогда

$$p = \frac{h_0}{\kappa} \frac{12-3\Lambda}{\Lambda}, \quad q = (\alpha - \text{Pr}) \frac{u_1^2}{2} \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)^2, \quad s = -(\alpha - \text{Pr}) \frac{u_1^2}{2} \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right) \Lambda. \quad (18)$$

Здесь  $\kappa = \frac{3}{2} - \frac{\bar{h}_0}{T_{00}/T_0 + \bar{h}_0}$  или  $\kappa = \omega$  в зависимости от того, какой закон для вязкости используется.

## 7. Определение формпараметра пограничного слоя

Согласно формуле (17) применительно к границе пограничного слоя:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 = p + 2q + 3s + 4t. \quad (19)$$

Для определения  $(\partial \bar{h} / \partial \eta)_1$  продифференцируем уравнение движения системы (2) с учетом того, что  $\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)_1 = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_1 = 0$ :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_1 = -\frac{1}{\rho_1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial \eta}\right)_1 \frac{dP}{dx}. \quad (20)$$

Поскольку  $\frac{\partial P}{\partial \eta} = 0$ , то  $-\frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial \eta} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \eta}$  и  $\frac{1}{h_1} \left(\frac{\partial h}{\partial \eta}\right)_1 \frac{dP}{dx} = \frac{\mu_1^2}{\mu \delta_1^2} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \eta^3}\right)_1$ . Учитывая (7), (8) и (20), получим искомое выражение:  $\left(\frac{\partial \bar{h}}{\partial \eta}\right)_1 = -\frac{\mu_0}{\mu_1} \bar{h}_1 \frac{12 - \Lambda}{\Lambda}$ .

Комбинация уравнений (17) и (19) на границе пограничного слоя дает соотношение для определения формпараметра  $\Lambda$ :

$$\begin{aligned} & \frac{3\bar{h}_0}{\kappa} \frac{12-3\Lambda}{\Lambda} + 2(\alpha - \text{Pr})(1 - \bar{h}_1) \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right)^2 - (\alpha - \text{Pr})(1 - \bar{h}_1) \left(2 + \frac{\Lambda}{6}\right) \Lambda = \\ & = 4 \left[ 1 + (\alpha - 1)(1 - \bar{h}_1) - \bar{h}_0 \right] + \frac{\mu_0}{\mu_1} \bar{h}_1 \frac{12 - \Lambda}{\Lambda}. \end{aligned} \quad (21)$$

## 8. Определение кинетического параметра

Кинетический параметр  $\alpha(x)$  определяется по-разному для тел различной формы. В случае сферы положим  $\alpha = \text{Pr}$  и уравнение (21) для опреде-

ления формпараметра сводится к линейному. Для сферы отношение радиуса  $R$  миделевого сечения к длине  $L$  есть 1. Геометрию тел большого и малого удлинения будем рассматривать с помощью эллипсоидов.

Выбор  $\alpha = \left(\frac{R}{L} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\Lambda^2} + \text{Pr}$  дает хороший результат для тел малого удлинения ( $R/L > 1$ ), т.е. уравнение (21) сводится к квадратному. Для тел большого удлинения ( $R/L < 1$ ) решаем кубическое уравнение (21), положив  $\alpha = \left(2\frac{R}{L} - 1\right) \text{Pr}$ . Корень  $\Lambda$  во всех случаях выбирается так, чтобы формпараметр соответствовал оценке (16).

### 9. Уточнение формпараметра пограничного слоя

На критической линии будем считать, что  $(\partial \bar{h} / \partial \eta)_1 = 0$ . Это оправдывается тем, что здесь достигается энтальпия восстановления, совпадающая с максимальной полной энтальпией. Тогда из (21) можно определить значение формпараметра в точке торможения:  $\Lambda(90^\circ) = \frac{36 \bar{h}_0 / \kappa}{9 \bar{h}_0 / \kappa + 4(1 - \bar{h}_0)}$ .

Введем поправочный коэффициент  $\theta = \Lambda(90^\circ) / \Lambda_0(90^\circ)$ , где параметр  $\Lambda_0(\sigma)$  найден с помощью (21). Окончательно формпараметр пограничного слоя представим в виде  $\Lambda(\sigma) = \theta \Lambda_0(\sigma)$ .

После определения формпараметра  $\Lambda(\sigma)$  и коэффициента  $t$ , с помощью соотношения (17) можно построить профиль  $h$ . На рис.2 представлено типичное поведение функции  $h$  с характерным максимумом внутри пограничного слоя.

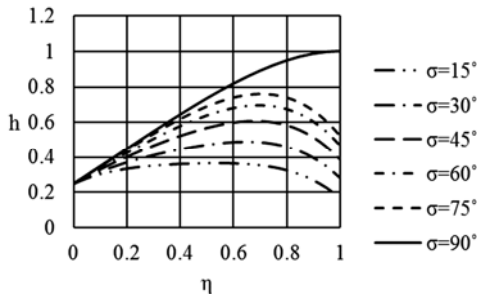


Рис.2. Распределение энтальпии:  $\text{Pr} = 0.7$ ,  $M_\infty = 2.94$ ,  $\omega = 0.7$ .

### 10. Расчет тепловых потоков

Тепловой поток определяется следующим соотношением согласно (1), (7) и (18) и с учетом того, что  $\frac{du_1}{dx} = -\frac{1}{R(\sigma)} \frac{du_1}{d\sigma}$ :



$$\begin{aligned} \frac{Q}{Q_0} &= \frac{\mu_0 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0}{\text{Pr} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0} \bigg/ \left( \frac{\mu_0 \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0}{\text{Pr} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_0} \right)_{\sigma=90^\circ} = \\ &= \frac{12-3\Lambda \left( -\frac{\rho_1}{R(\sigma)} \frac{du_1}{d\sigma} \right)^{1/2}}{\Lambda^{3/2}} \bigg/ \left( \frac{12-3\Lambda \left( -\frac{\rho_1}{R(\sigma)} \frac{du_1}{d\sigma} \right)^{1/2}}{\Lambda^{3/2}} \right)_{\sigma=90^\circ}, \end{aligned} \quad (22)$$

где  $Q_0$  – значение теплового потока в точке торможения,  $R(\sigma)$  – радиус кривизны образующей тела.

### 11. Пересчет тепловых потоков

Формулу (22) будем применять, когда  $\bar{h}_0 = 0.15 \div 0.35$ . Известно, что коэффициент теплопередачи слабо зависит от величины  $\bar{h}_0$ . Поэтому если  $\bar{h}_0$  лежит вне этого отрезка, будем осуществлять пересчет теплового потока, предварительно рассчитанного для указанного диапазона. Для реализации такого подхода представим тепловой поток в следующем виде с учетом того, что  $h_e = H$  и  $A/c_P$  – коэффициент теплопередачи:

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{A/c_P}{(A/c_P)_{\sigma=90^\circ}} \frac{\bar{h}_e - \bar{h}_0}{1 - \bar{h}_0}.$$

Поэтому для пересчета будем использовать следующее выражение:

$$\frac{(Q/Q_0)}{(Q/Q_0)_C} = \frac{(\bar{h}_e - \bar{h}_0)/(1 - \bar{h}_0)}{(\bar{h}_e - \bar{h}_{0C})/(1 - \bar{h}_{0C})}. \quad (23)$$

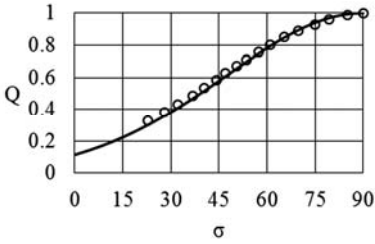
Индекс «C», означает, что  $\bar{h}_{0C}$  не входит в указанный выше диапазон.

### 12. Результаты

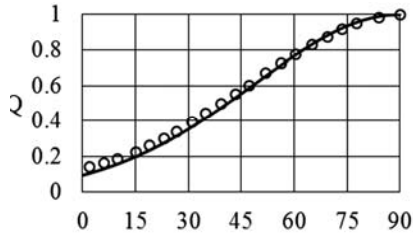
Рассмотрим результаты применения формул (22) и (23) для расчета тепловых потоков для сферы и эллипсоидов с различным отношением полуосей  $n = b/a$ , численное исследование которых также приведено в работах [12-15] в рамках полных систем уравнений Навье-Стокса и Прандтля. В [12,13] используется степенной закон для вязкости, а в [14,15] – формула Сазерленда.

На всех графиках результаты работы [12] показаны символом «круг», а результаты работы [14] – символом «черный круг». Сплошная линия – результаты данной работы, полученные с использованием степенной зависимости, а штриховой пунктир – применение в работе формулы Сазерленда.

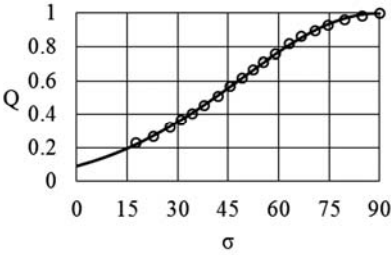
Результаты для сферы в сравнении с работой [12] приведены в зависимости от угла  $\sigma$ , а для эллипсоидов – в зависимости от длины дуги вдоль образующей тела  $S$ .



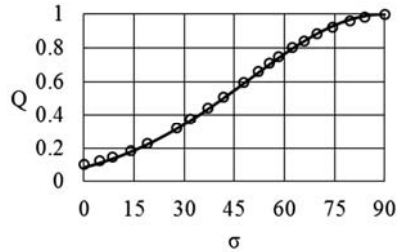
**Рис.3.**  $M_\infty = 4.11$ ,  $n=1$ ,  $Pr = 0.72$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.25$ ,  $\omega = 0.5$ .



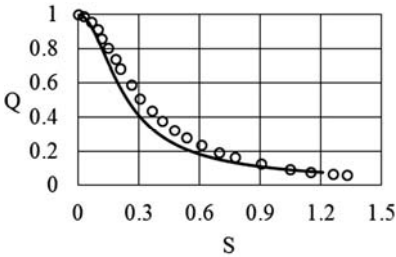
**Рис.4.**  $M_\infty = 10$ ,  $n=1$ ,  $Pr = 0.72$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.25$ ,  $\omega = 0.5$ .



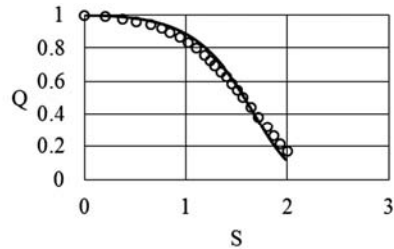
**Рис.5.**  $M_\infty = 6$ ,  $n=1$ ,  $Pr = 0.72$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.35$ ,  $\omega = 0.5$ .



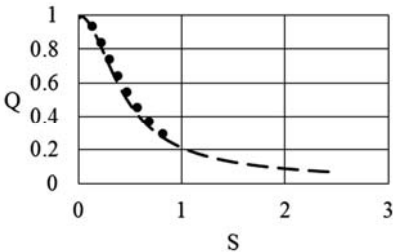
**Рис.6.**  $M_\infty = 10$ ,  $n=1$ ,  $Pr = 0.72$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.35$ ,  $\omega = 0.5$ .



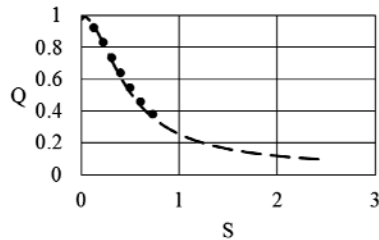
**Рис.7.**  $M_\infty = 10$ ,  $a=1$ ,  $b=0.5$ ,  $n=0.5$ ,  
 $Pr = 0.75$ ,  $\bar{h}_0 = 0.16$ ,  $\omega = 0.5$ .



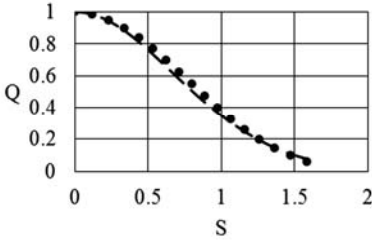
**Рис.8.**  $M_\infty = 10$ ,  $a=1$ ,  $b=1.5$ ,  $n=1.5$ ,  
 $Pr = 0.75$ ,  $\bar{h}_0 = 0.16$ ,  $\omega = 0.5$ .



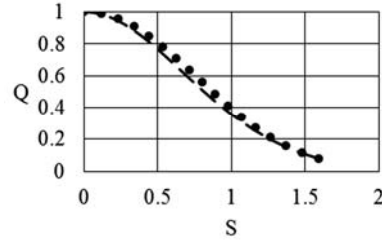
**Рис.9.**  $M_\infty = 6$ ,  $a=2$ ,  $b=1$ ,  $n=0.5$ ,  $Pr=0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



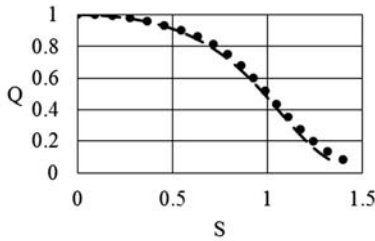
**Рис.10.**  $M_\infty = 3$ ,  $a=2$ ,  $b=1$ ,  $n=0.5$ ,  $Pr=0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



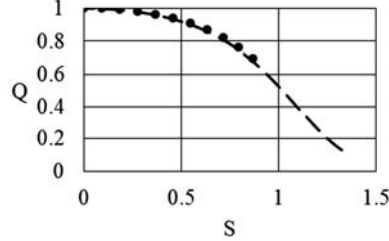
**Рис.11.**  $M_\infty = 10$ ,  $n = 1$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  
 $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



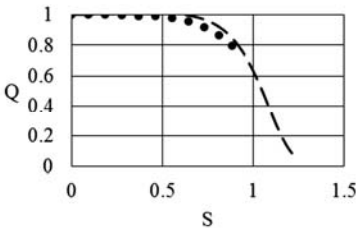
**Рис.12.**  $M_\infty = 6$ ,  $n = 1$ ,  $Pr = 0.7$ ,  $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  
 $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



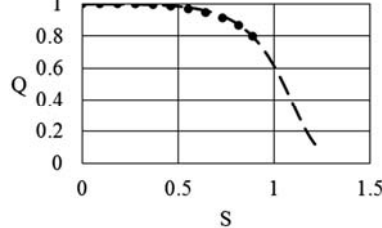
**Рис.13.**  $M_\infty = 6$ ,  $a = 2/3$ ,  $b = 1$ ,  $n = 1.5$ ,  $Pr = 0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



**Рис.14.**  $M_\infty = 3$ ,  $a = 2/3$ ,  $b = 1$ ,  $n = 1.5$ ,  $Pr = 0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



**Рис.15.**  $M_\infty = 10$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $n = 2$ ,  $Pr = 0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .



**Рис.16.**  $M_\infty = 3$ ,  $a = 0.5$ ,  $b = 1$ ,  $n = 2$ ,  $Pr = 0.7$ ,  
 $\bar{h}_0 = 0.05$ ,  $\omega = 0.7$ ,  $T_\infty = 260$ .

### 13. Выводы

Разработан аналитический метод для получения информации о параметрах обтекания тел. На основе дифференциальных уравнений пограничного слоя, записанных в специальных переменных, удастся быстро определять формпараметр пограничного слоя, который в совокупности с зависимостью для определения давления [10] используется в дальнейших расчетах для нахождения тепловых потоков на телах различного удлинения.

Проведено сравнение с результатами работ различных авторов для выяснения диапазона применимости метода. Сопоставление результатов с известными численными данными [12–15] показали хорошее согласование тепловых потоков, что позволяет сделать вывод о корректности аналитического моделирования, а также о достоверности полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.В. Братчев, Е.Г. Ватолина, В.В. Горский и др.* Под ред. В.В. Горского. Математическое моделирование тепловых и газодинамических процессов при проектировании летательных аппаратов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2011, 212 с.;  
*A.V. Bratchev, E.G. Vatolina, V.V. Gorskiy i dr.* Pod red. V.V. Gorskogo. Matematicheskoe modelirovanie teplovykh i gazodinamicheskikh protsessov pri proektirovanii letatelnykh apparatov. – М.: Izd-vo MG TU im. N.E. Baumana, 2011, 212 s.
2. *Б.А. Землянский, В.В. Лунев, В.И. Власов и др.* Под ред. Б.А. Землянского. Конвективный теплообмен летательных аппаратов. – М.: Физматлит, 2014, 380 с.;  
*B.A. Zemlyanskiy, V.V. Lunev, V.I. Vlasov i dr.* Pod red. B.A. Zemlyanskogo. Konvektivnyy teploobmen letatelnykh apparatov. – М.: Fizmatlit, 2014, 380 s.
3. *Ю.И. Димитриенко, В.П. Котенев, А.А. Захаров.* Метод ленточных адаптивных сеток для численного моделирования в газовой динамике. – М.: Физматлит, 2011, 280 с.;  
*Yu.I. Dimitrienko, V.P. Kotenev, A.A. Zakharov.* Metod lentochnykh adaptivnykh setok dlia chislennoho modelirovaniia v gazovoi dinamike. – М.: Fizmatlit, 2011, 280 s.
4. *С.Т. Суржиков.* Радиационная газовая динамика спускаемых космических аппаратов. Многотемпературные модели. – М.: ИПМех РАН, 2013, 706 с.;  
*S.T. Surzhikov.* Radiatsionnaia gazovaia dinamika spuskaemykh kosmicheskikh apparatov. Mnogotemperaturnye modeli. – М.: IPMekh RAN, 2013, 706 s.
5. *С.Т. Суржиков.* Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. – М.: ИПМех РАН, 2011, 192 с.;  
*S.T. Surzhikov.* Raschetnoe issledovanie aerotermodinamiki giperzvukovogo obtekaniiia zatuplennykh tel na primere analiza experimentalnykh dannykh. – М.: IPMekh RAN, 2011, 192 s.
6. *Ю.Д. Шевелев.* Пространственные задачи вычислительной аэрогидродинамики. – М.: Наука, 1986, 368 с.;  
*Iu.D. Shevelev.* Prostranstvennyye zadachi vychislitel'noy aerogidrodinamiki. – М.: Nauka, 1986, 368 s.
7. *Г.Н. Абрамович.* Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1969, 824 с.;  
*G.N. Abramovich.* Prikladnaia gazovaia dinamika. – М.: Nauka, 1969, 824 s.
8. *В.В. Лунев.* Течение реальных газов с большими скоростями. – М.: Физматлит, 2007, 327 с.;  
*V.V. Lunev.* Techenie realnykh gazov s bolshimi skorostiami. – М.: Fizmatlit, 2007, 327 s.
9. *П.Н. Романенко.* Гидродинамика и тепломассообмен в пограничном слое. – М.: Энергия, 1974, 464 с.;  
*P.N. Romanenko.* Hidrodinamika i teplomassoobmen v pogranichnom sloe. – М.: Energiia, 1974, 464 s.
10. *В.П. Котенев.* Точная зависимость для определения давления на сфере при произвольном числе Маха сверхзвукового набегающего потока // Математическое моделирование, 2014, т.26, №9, с.141-148;  
англ. пер.: *V.P. Kotenev.* Exact relation for determining the pressure distribution on a sphere at an Arbitrary Mach number in a supersonic incoming flow // Mathematical models and computer simulations, 2015, v.7, №2, p.128-133.

11. *P. Kutler, S.R. Chakravarthy, C.P. Lombard.* Supersonic flow over ablated nosetips using an unsteady implicit numerical procedure // AIAA Paper 78-213, 1978, 14 p.
12. *И.Г. Брыкина, В.И. Сахаров.* Сравнение приближенных аналитических и численных решений для тепловых потоков при сверхзвуковом обтекании тел вязким газом // Изв. РАН, МЖГ, 1996, №1, с.125-132;  
*I.G. Brykina, V.I. Sakharov.* Comparison of approximate analytical and numerical solutions for heat fluxes in viscous supersonic flow past a body // Fluid Dynamics, 1996, v.31, №1, p.107-113.
13. *И.Г. Брыкина.* Методы расчета теплопередачи и трения при пространственном гиперзвуковом ламинарном обтекании тел во всем диапазоне чисел Рейнольдса. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, 2013, автореферат диссерт. докт. физ.-мат. наук.  
*I.G. Brykina.* Metody rascheta teploperedachi i trenia pri prostranstvennom giperzvukovom laminarnom obtekanii tel vo vsem diapazone chisel Rejnoldsa. – М.: MGU im. M.V. Lomonosova, 2013, avtoreferat dissert. dokt. fiz.-mat. nauk.
14. *Н.П. Колина.* Ламинарный пограничный слой на затупленных осесимметричных телах различной формы // Труды ЦАГИ, 1968, № 1106, с. 268-328;  
*N.P. Kolina.* Laminatnyj pogranichnyj sloj na zatuplennykh osesimmetrichnykh telakh razlichnoy formy // Trudy TSAGI, 1968, № 1106, p. 268-328.
15. *В.А. Башкин, Н.П. Колина.* Ламинарный пограничный слой на эллипсоидах вращения // Известия АН СССР «Механика жидкости и газа», 1966, № 8.  
*V.A. Bashkin, N.P. Kolina.* Laminarnyj pogranichnyj sloj na ellipsoidakh vrashcheniia // Izvestia AN SSSR «Mekhanika zhidkosti i gaza», 1966, № 8.

Поступила в редакцию 06.12.18

После доработки 06.12.18

Принята к публикации 11.02.19